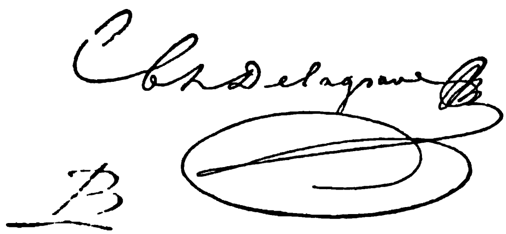
# LEÇONS

DE

# GÉOMÉTRIE

## ANALYTIQUE



## DES MÊMES AUTEURS

### BRIOT ET BOUQUET

**Leçons de Trigonométrie.** 6e édition. In-8. . . . . . . . . 3 50

**Complément de Géométrie analytique,** leçons faites par M. Briot à l'École normale supérieure et rédigées par les élèves. In-8. 5 fr.

**Théorie des fonctions elliptiques.** 2e édition. In-4. . . . 30 fr

### BRIOT

**Leçons d'Algèbre,** 2e partie, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. 7e édition. In-8. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 fr.

**Éléments de Géométrie,** théorie. 7e édition . . . . . . . . 5 fr.

**Essai sur la Théorie mathématique de la lumière.** In-8. 4 fr.

**Théorie mécanique de la chaleur.** In-8. . . . . . . . . . 7 50

Coulommiers. — Imp. Paul Brodard.

# LEÇONS

DE

# GÉOMÉTRIE

# ANALYTIQUE

PAR MM.

**C. BRIOT**

Professeur à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale.

**J.-C. BOUQUET**

Membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences, maître de conférences à l'École Normale.

**QUATORZIÈME ÉDITION**

Revue et annotée

Par M. **APPELL**, Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences.



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1893

## AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR

A la suite des changements apportés aux programmes des Écoles et de l'introduction de nouvelles méthodes dans l'enseignement, la géométrie analytique de MM. Briot et Bouquet présentait quelques lacunes que M. Appell, professeur à la Faculté des sciences de Paris, et élève de MM. Briot et Bouquet, a essayé de combler, en s'inspirant des leçons de ses anciens maîtres.

Les modifications et les additions ont été faites de telle façon que cet ouvrage, tout en conservant le caractère de simplicité et de précision que lui avaient donné ses savants auteurs, puisse être utile non seulement aux élèves des lycées, mais encore aux étudiants des Facultés des sciences, candidats à l'agrégation. Les principaux changements portent sur les sujets suivants :

### GÉOMÉTRIE PLANE

Coordonnées du point qui divise un segment donné dans un rapport donné (n° 57).

Équation des droites passant par le point de concours de deux droites données (n° 69).

Développement de la théorie du cercle.

Sur les fonctions des coefficients de l'équation d'une conique

et de l'angle des axes qui ne changent pas quand on fait une transformation de coordonnées (n° 144).

Application au calcul des axes d'une conique à centre, du paramètre d'une parabole (n° 214).

Équation réduite commune aux trois courbes du second ordre (n° 263).

Coordonnées tangentielles (n° 306).

Coordonnées homogènes, points à l'infini (n° 330).

Coordonnées trilinéaires (n° 331).

Intersection de deux coniques. Discussion de l'équation en $\lambda$ par la méthode de M. Darboux (n° 332).

Signification géométrique de certaines relations simples entre les racines de l'équation en $\lambda$ (page 374).

Application de la théorie des polynômes homogènes du second degré à l'étude des propriétés des courbes du second ordre (page 383).

Courbes tangentes, courbes normales (n° 343).

Points d'inflexion, Hessienne (n° 355).

Classe d'une courbe. Formules de Plucker (sans démonstration) (page 421).

Construction des courbes en coordonnées polaires. Équation de la tangente et de la normale. Sous-tangente et sous-normale (n° 376).

Notions sur les courbes unicursales (page 485). Ce chapitre est destiné à préparer l'étude de la géométrie sur une courbe et des applications géométriques du théorème d'Abel.

## GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Théorie de la ligne droite. Cette théorie a été modifiée conformément à l'usage qui s'est introduit partout de prendre les équations d'une droite sous la forme

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}.$$

Longueur d'un arc de courbe. Courbure (n° 482).

Sur les fonctions des coefficients de l'équation d'une surface

du second ordre qui ne changent pas quand on fait un changement d'axes rectangulaires (n° 510).

Remarques sur l'équation en S (page 607).

Axes d'une section centrale d'une surface du second ordre à centre (n° 517 *bis*).

Signification du signe du discriminant (n° 580 *bis*).

Courbes gauches du quatrième ordre (n° 597).

Note sur les sections circulaires (n° 598).

Notions sur les complexes de droites (n° 599).

De nombreux exercices ont été ajoutés dans le texte, notamment à propos des coordonnées tangentielles, des coordonnées homogènes, de l'équation en $\lambda$, des courbes unicursales et des complexes.

Enfin, on a placé à la fin de l'ouvrage la liste des sujets de composition donnés aux principaux concours.

# GÉOMÉTRIE
## ANALYTIQUE

La *Géométrie analytique* a pour but l'étude des *figures* par les procédés du calcul ou de l'*analyse* algébrique.

C'est à DESCARTES que l'on doit la représentation des figures par des symboles algébriques; il en résulte, comme nous le verrons, une méthode générale pour la résolution des questions de géométrie.

Nous nous occuperons d'abord des figures planes ou à deux dimensions, et ensuite des figures dans l'espace ou à trois dimensions.

# GÉOMÉTRIE PLANE

## LIVRE I

### PRÉLIMINAIRES

## CHAPITRE PREMIER

### Des Coordonnées.

On détermine la position d'un point dans un plan au moyen de deux quantités, que l'on nomme les *coordonnées* du point.

Il y a une infinité de *systèmes de coordonnées*; nous indiquerons seulement les systèmes les plus simples et les plus employés.

### COORDONNÉES RECTILIGNES.

**1.** Soient deux droites ou axes fixes X'X et Y'Y tracées dans le plan (fig. 1); la position d'un point quelconque M du plan sera déterminée par l'intersection de deux droites G'G, H'H parallèles aux axes. La position de la parallèle H'H est définie par le segment OP qu'elle intercepte sur X'X; il faut, de plus, indiquer dans quel sens est portée la longueur OP; on convient, pour cela, d'affecter la distance OP du signe + si elle est portée sur OX par exemple, du signe — si elle est portée sur OX'. De même, la position de la parallèle G'G est définie par la longueur OQ affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est portée sur OY ou OY'.

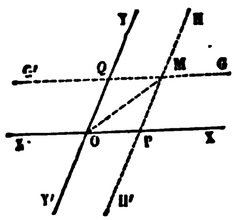


Fig. 1.

Ces deux longueurs OP et OQ (affectées chacune du signe convenable), qui déterminent ainsi la position des deux parallèles, et par conséquent le point M, sont les *coordonnées rectilignes* du point. On les désigne ordinairement par les lettres $x$ et $y$. Cependant la coordonnée désignée par $x$ porte plus particulièrement le nom d'*abscisse*, l'autre, $y$, celui d'*ordonnée*. Les deux droites fixes X'X et Y'Y s'appellent les *axes des coordonnées;* le premier est l'axe des $x$, le deuxième l'axe des $y$. Le point O, à partir duquel on compte les coordonnées sur chaque axe, dans un sens ou dans l'autre, prend le nom d'*origine des coordonnées.*

Si l'on donne à $x$ et à $y$ toutes les valeurs possibles positives ou négatives, en d'autres termes, si l'on fait varier $x$ et $y$ de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient tous les points du plan; d'ailleurs chaque couple de valeurs donne un point et un seul.

Nous ferons remarquer que les deux coordonnées du point M sont les projections de la droite OM, parcourue dans le sens OM, sur les axes OX et OY, la projection sur chaque axe se faisant parallèlement à l'autre. La projection sur l'axe des $x$, comme la coordonnée $x$ elle-même, est la longueur OP, affectée

du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est portée dans la direction OX ou dans la direction opposée OX'; de même la projection sur l'axe des $y$, comme la coordonnée $y$, est la longueur OQ, affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est portée dans la direction OY ou dans la direction opposée OY'.

### COORDONNÉES RECTILIGNES RECTANGULAIRES.

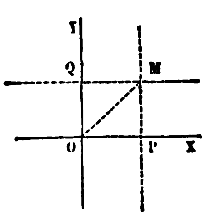


Fig. 2.

**2.** Ordinairement on trace les axes fixes perpendiculaires entre eux : dans ce cas, les deux coordonnées du point M (fig. 2) sont les distances de ce point aux deux axes; ce sont aussi les projections orthogonales de la droite OM sur les deux axes.

### COORDONNÉES POLAIRES.

**3.** Soit O un point fixe nommé *pôle*, OX un axe fixe (fig. 3), on peut déterminer la position du point M par la longueur $\rho$ du *rayon vecteur* OM et par l'angle $\omega$ que fait ce rayon vecteur avec l'axe.

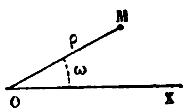


Fig. 3.

La position du point M est déterminée par l'intersection d'un cercle de rayon $\rho$, ayant pour centre le pôle, et d'une demi-droite OL partant du pôle et faisant avec l'axe OX l'angle $\omega$ (fig. 3); mais il faut convenir du sens dans lequel on compte l'angle $\omega$, à partir de l'axe OX.

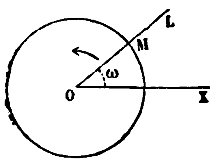


Fig. 4.

On obtient tous les points du plan en faisant varier $\rho$ de 0 à $+\infty$ et $\omega$ de 0 à $2\pi$. En effet, si, laissant $\omega$ constant, on fait varier $\rho$ de 0 à $+\infty$, on a tous les points de la demi-droite OL; si, ensuite, on fait varier $\omega$ de 0 à $2\pi$, la demi-droite OL part de la position OX et décrit tout le plan.

### COORDONNÉES BI-POLAIRES.

**4.** On peut aussi définir la position d'un point M par ses distances $u$ et $v$ à deux points fixes F et F' (fig. 5). La position

du point M se trouve alors déterminée par l'intersection de deux cercles, décrits des points F et F' comme centres, avec les rayons $u$ et $v$. Mais ce système n'offre pas la même perfection théorique que les deux précédents; d'abord, tout couple de valeurs de $u$ et $v$ n'est pas admissible; il faut que la distance des pôles soit moindre que leur somme et plus grande que leur différence; lorsque cette condition est remplie, les deux circonférences se coupant en deux points, il en résulte un ambiguïté fâcheuse.

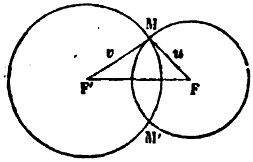


Fig. 5.

On peut encore déterminer la position du point M à l'aide des angles MFF', MF'F; nous désignerons ces angles, comptés dans un sens déterminé, par $\alpha$ et $\beta$; chacun d'eux pourra varier entre 0 et $2\pi$; à tout couple de valeurs de $\alpha$ et $\beta$ correspond un point du plan et un seul.

### IDÉE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES.

5. Le nombre des systèmes de coordonnées est infini. En général, on détermine la position d'un point dans un plan par l'intersection de deux lignes tracées dans ce plan. Soient (fig. 6) A', A'', A''',.... une première série de lignes de même espèce, correspondant à diverses valeurs $u'$, $u''$, $u'''$,.... de la variable $u$; B', B'', B''',... une seconde série de lignes de même espèce, correspondant à diverses valeurs $v'$, $v''$, $v'''$,... de la variable $v$; un point quelconque du plan est défini par les deux lignes qui passent en ce point, et les valeurs particulières qu'il faut donner aux variables $u$ et $v$ pour avoir ces deux lignes s'appellent les *coordonnées* du point. L'ensemble de ces deux séries de lignes constitue un système de coordonnées.

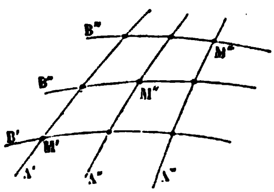


Fig. 6.

Dans le premier des systèmes que nous avons étudiés, chacune des deux séries de lignes se compose de droites parallèles; c'est pourquoi on désigne ces coordonnées sous le nom de coordonnées rectilignes.

Dans le système polaire, la première série se compose de demi-droites émanant du pôle O, et définies par l'angle variable $\omega$ qu'elles font avec l'axe OX (fig. 4); la seconde série, de cercles concentriques, décrits du point O comme centre avec le rayon variable $\rho$.

Dans le premier système bi-polaire, chacune des séries se compose de cercles concentriques (fig. 5). Dans le second, chacune des séries se compose de demi-droites partant de l'un des points fixes F ou F'.

## REPRÉSENTATION DES LIGNES PLANES PAR DES ÉQUATIONS.

**6.** Soit une ligne plane quelconque AB (fig. 7); traçons dans le plan deux axes OX et OY, et désignons par $x$ et $y$ les deux coordonnées OP et MP d'un point M quelconque de la ligne; quand le point M se meut sur la ligne, les deux coordonnées varient simultanément; si l'on donne à l'abscisse une valeur arbitraire OP, la grandeur de l'ordonnée correspondante MP est parfaitement déterminée, et la variation de l'abscisse entraîne celle de l'ordonnée. Ainsi l'ordonnée MP est une fonction de l'abscisse OP; la nature de cette fonction dépend de celle de la ligne. Quand la ligne est définie géométriquement, on conçoit que l'on puisse, de la définition géométrique de la ligne, déduire une équation entre $x$ et $y$, servant à définir analytiquement la fonction $y$. L'équation en $x$ et $y$ que l'on trouve de cette manière s'appelle l'équation de la ligne.

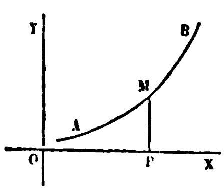


Fig. 7.

**7.** Supposons, réciproquement, que l'on donne une équation

$$F(x,y) = 0,$$

entre les deux variables $x$ et $y$; chaque couple de valeurs réelles de $x$ et $y$ satisfaisant à cette équation détermine un point du plan Soient $x_0$ et $y_0$ des valeurs réelles de $x$ et $y$ vérifiant l'équation; si l'on fait varier $x$ d'une manière continue à partir de $x_0$, l'une des valeurs de $y$ variera aussi d'une manière continue à partir de $y_0$, et sera en général réelle tant que $x$ restera

comprise entre certaines limites; le point, dont les coordonnées sont $x$ et $y$, décrira dans le plan une ligne continue. Ainsi *l'ensemble des solutions réelles d'une équation à deux variables est, en général, figuré par une ligne plane.*

**8.** Ce que nous venons de dire des cordonnées rectilignes a lieu évidemment dans tout autre système de coordonnées. Dans le système polaire, quand le point M se meut sur la ligne donnée, le rayon vecteur $\rho$ varie avec l'angle $\omega$; c'est une fonction de $\omega$, et la ligne est représentée par une certaine équation entre $\rho$ et $\omega$.

**9.** La représentation des figures par des équations est la base de la Géométrie analytique; elle permet d'appliquer à l'étude des figures les procédés du calcul algébrique. On s'occupe, en Géométrie analytique, de trois questions fondamentales : quand une figure est définie géométriquement, on cherche son équation; réciproquement, on apprend à construire la figure que représente une équation donnée; enfin, on étudie les relations qui existent entre les propriétés géométriques des figures et les propriétés analytiques des équations.

Les exemples que nous donnons dans le chapitre suivant feront bien comprendre comment on représente les lignes par des équations.

# CHAPITRE II

## Exemples.

En général, la définition géométrique d'une courbe, déterminant chacun de ses points, correspond à un certain système de coordonnées; si l'on choisit le système particulier indiqué par l'énoncé, l'équation de la courbe est la traduction immédiate de sa définition géométrique.

### CERCLE.

**10.** *Le cercle est le lieu des points également distants d'un point fixe appelé centre.* On le décrit à l'aide d'un compas : une pointe étant placée au centre, l'autre pointe trace la circonférence.

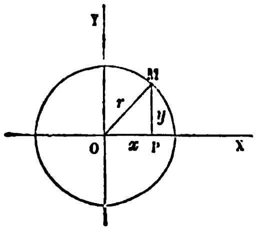


Fig. 8.

Si l'on prend le centre O pour pôle et une droite quelconque OX pour axe polaire (fig. 8), et que l'on désigne par $r$ la longueur du rayon, l'équation de la circonférence en coordonnées polaires est

$$(1) \qquad \rho = r,$$

puisque la longueur du rayon vecteur est constamment égale à $r$, quelle que soit la valeur de l'angle $\omega$.

Cherchons maintenant l'équation du cercle en coordonnées rectilignes. Si l'on prend deux axes rectangulaires OX et OY passant par le centre, le triangle rectangle OMP donne immédiatement la relation

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

qui existe entre les deux coordonnées $x$ et $y$ d'un point quelconque M de la circonférence. C'est l'équation de la circonférence dans ce système de coordonnées.

## ELLIPSE.

**11.** *L'ellipse est une courbe telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.* Ces deux points sont les *foyers* de l'ellipse.

Désignons par $2a$ la somme constante des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux foyers, et par $2c$ la distance FF′ des foyers. On peut construire l'ellipse par points en décrivant un cercle de l'un des foyers F comme centre avec un rayon arbitraire $u$, et un second cercle de l'autre foyer F′ comme centre avec un rayon $v$ égal à $2a-u$. Les points d'intersection M et M′ des deux cercles appartiennent à l'ellipse. Pour que les deux cercles se coupent, il faut que le plus grand rayon soit plus petit que $a+c$; alors le plus petit est plus grand que $a-c$.

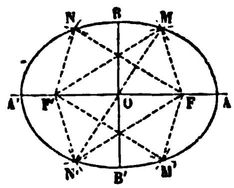


Fig. 9.

Les points M et M′ étant symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite FF′, cette droite est un *axe* de la courbe. La droite BB′ menée par le point O, milieu de FF′, perpendiculaire à FF′, est un second axe.

Les points où les axes coupent la courbe s'appellent *sommets*. On obtient les sommets A et A′ situés sur le premier axe, en prenant les distances FA, F′A′, égales à $a-c$. On détermine les sommets B et B′, situés sur le second axe, en décrivant de l'un des foyers comme centre un cercle, avec un rayon égal à $a$. La distance OA est égale à $a$, et la distance OB, que l'on désigne par $b$, est égale à $\sqrt{a^2-c^2}$. Au lieu de définir l'ellipse par les deux longueurs $2a$ et $2c$, comme précédemment, on peut la définir par les deux longueurs $2a$ et $2b$; on a alors $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Le point O, milieu de FF′, est *centre* de la courbe.

**12.** Cherchons l'équation de l'ellipse. Le système de coordonnées indiqué par l'énoncé est le premier système bipolaire (nº 4); si l'on détermine la position de chacun des points

du plan par ses distances aux deux points fixes F et F′, l'ellipse aura pour équation

$$(1) \qquad u+v=2a.$$

Dans le second système bi-polaire, l'équation a aussi une forme très-simple; si l'on désigne par $\alpha$ et $\beta$ les deux angles coordonnés MFF′, MF′F, et par $2p$ le périmètre $2a+2c$ du triangle MFF′, on a

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-2c)(p-u)}{p(p-v)}}, \qquad \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-2c)(p-v)}{p(p-u)}};$$

d'où

$$(2) \quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}=\frac{p-2c}{p}=\frac{a-c}{a+c}.$$

**13.** Cherchons enfin l'équation en coordonnées rectilignes. Prenons les deux axes de la courbe pour axes des coordonnées (fig. 10) : les longueurs PF et PF′ étant égales à $c-x$ et à $c+x$, les triangles rectangles FMP, F′MP donnent

$$u=\sqrt{y^2+(c-x)^2}, \qquad v=\sqrt{y^2+(c+x)^2}.$$

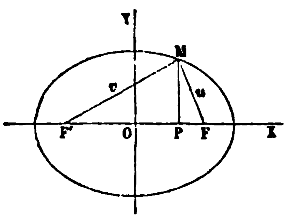


Fig. 10.

En substituant les valeurs de $u$ et de $v$ dans l'équation (1), on obtient l'équation

$$(3) \quad \sqrt{y^2+(c-x)^2}+\sqrt{y^2+(c+x)^2}=2a.$$

Pour mettre cette équation sous la forme entière, nous élèverons au carré, après avoir fait passer le premier radical dans le second membre, ce qui donne

$$y^2+(c+x)^2=4a^2+y^2+(c-x)^2-4a\sqrt{y^2+(c-x)^2},$$

ou, en simplifiant,

$$a\sqrt{y^2+(c-x)^2}=a^2-cx.$$

Une nouvelle élévation au carré conduit à l'équation

$$(4) \qquad a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2).$$

Mais l'équation (4) n'est pas équivalente à l'équation (3); elle équivaut aux quatre équations

$$u+v=2a\ ,\ u-v=2a\ ,\ -u+v=2a\ ,\ -u-v=2a,$$

que l'on obtient, quand dans l'équation (3) on change les signes des radicaux. L'équation $-u-v=2a$ n'a pas de solution réelle. Les équations $u-v=2a$, $-u+v=2a$ n'ont pas non plus de solution réelle, quand on suppose $2a>2c$; car les quantités $u$ et $v$ désignent les distances des points F et F′ à un point du plan ayant pour coordonnées $x$ et $y$, et la différence des distances ne peut pas être égale à la longueur $2a$ plus grande que la distance $2c$ ou FF′. Ainsi, quand on se borne aux solutions réelles, on peut dire que l'équation (4) est équivalente à l'équation (3). La somme constante $2a$ étant plus grande que la distance des foyers $2c$, on peut poser $a^2-c^2=b^2$, et l'équation de l'ellipse se met sous la forme $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, ou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

HYPERBOLE.

**14.** *L'hyperbole est une courbe telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes est constante.* Ces deux points fixes F et F′ sont les *foyers* de l'hyperbole.

L'hyperbole admet, comme l'ellipse, deux axes de symétrie, qui sont la droite FF′ (fig. 11) et la perpendiculaire BB′ à cette droite, en son milieu O. Elle se compose de deux branches distinctes. On peut construire par points la branche de droite, en décrivant un cercle du foyer F comme centre, avec un rayon arbitraire $u$, et un second cercle du foyer F′ comme centre, avec un rayon $v$ égal à $2a+u$. Pour que les cercles se coupent, il faut que l'on ait $u$ plus grand que $c-a$. On obtient de la même manière la seconde branche. Le point O, milieu de FF′, est centre de la courbe.

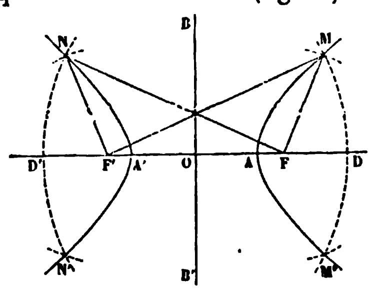


Fig. 11.

Le premier axe rencontre seul la courbe en deux points A et A′, qui sont les sommets, et que l'on détermine en prenant OA=OA′=$a$; c'est pourquoi cet axe a reçu le nom d'axe transverse.

Dans le premier système bi-polaire, si l'on appelle $u$ et $v$ les distances d'un point quelconque de la courbe aux deux foyers F et F′, les deux branches de la courbe ont respectivement pour équations

$$v-u=\pm 2a. \tag{1}$$

Dans le second système bi-polaire, les équations des deux branches sont

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}=\frac{c+a}{c-a}, \quad \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}=\frac{c-a}{c+a}. \tag{2}$$

**15.** En coordonnées rectangulaires, si l'on prend pour axes des coordonnées les deux axes de la courbe, l'équation de l'hyperbole est

$$\sqrt{y^2+(c+x)^2}-\sqrt{y^2+(c-x)^2}=\pm 2a.$$

En répétant ici les transformations du n° 13, on arrive à l'équation sous forme entière, $a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2)$, que nous avons déjà obtenue pour l'ellipse.

Cette équation, comme nous l'avons remarqué, équivaut aux quatre équations distinctes $v-u=\pm 2a$, $u+v=\pm 2a$; mais, dans le cas actuel, $2a$ étant plus petit que $2c$, les deux dernières n'ont pas de solution réelle. Si l'on pose $c^2-a^2=b^2$, l'équation de l'hyperbole devient

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3}$$

Il est bon d'observer que, dans le système rectiligne, les deux branches de l'hyperbole sont comprises dans la même équation (3), tandis que, dans le premier système bi-polaire, l'une des branches est représentée par l'équation $v-u=2a$, l'autre par l'équation $u-v=2a$. Il faut aussi deux équations distinctes dans le second système bi-polaire.

## PARABOLE.

**16.** ***La parabole est une courbe dont chacun des points est également distant d'un point fixe nommé foyer et d'une droite fixe appelée directrice.***

La perpendiculaire abaissée du foyer F sur la directrice DD' est un axe de symétrie de la courbe. Le point A, milieu de FD, est le sommet de la parabole. La courbe est située tout entière à droite de la parallèle menée par le point A à la directrice. On obtient un point quelconque de la courbe en menant une parallèle MM' à la directrice, à une distance DP plus grande que AD, et décrivant un cercle du foyer F comme centre, avec un rayon égal à cette distance DP.

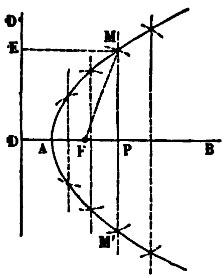


Fig. 12.

**17.** La définition de la parabole indique un système de coordonnées dont nous n'avons point encore parlé. On peut déterminer un point quelconque M du plan par ses distances MF et ME à un point fixe F et à une droite fixe DD' (fig. 13); la position du point M sera donnée par l'intersection d'un cercle décrit du point F comme centre et d'une droite parallèle à DD'. Si l'on appelle $u$ et $v$ les deux coordonnées du point M, la parabole aura pour équation, dans ce système,

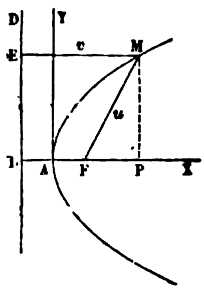


Fig. 13.

$$u = v.$$

**18.** Prenons maintenant pour origine des coordonnées rectilignes le sommet A de la parabole, pour axe des $x$ l'axe AX de la parabole, et pour axe des $y$ une perpendiculaire AY. En désignant par $p$ la distance FD du foyer à la directrice, on a

$$v = \mathrm{AP} + \mathrm{AD} = x + \frac{p}{2} \quad , \quad u = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2},$$

et l'équation de la parabole devient

$$\sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}=x+\frac{p}{2}.$$

ou (2) $y^2=2px.$

**19.** Avant d'aller plus loin nous dirons comment on définit la tangente à une courbe quelconque. En Géométrie

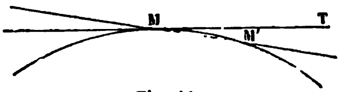


Fig. 14.

élémentaire, on appelle tangente au cercle une droite indéfinie qui n'a qu'un point commun avec la circonférence; mais cette définition n'étant pas susceptible d'être généralisée, il convient de définir la tangente d'une autre manière. Soit M un point donné sur une courbe (fig. 14); par ce point et un point voisin M', menons une droite indéfinie: dans les figures que nous étudierons, la direction MM' tend, en général, vers une direction limite MT, lorsque le point M' tend le point M. C'est cette droite MT que l'on appelle *tangente* à la courbe au point M. On appelle *normale* à la courbe au point M la perpendiculaire menée par ce point à la tangente.

Il est aisé de voir, d'après cette définition, que la tangente

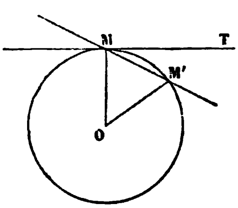


Fig. 15.

au cercle au point M est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OM (fig. 15); car, dans le triangle isocèle MOM', l'angle OMM' est égal à un angle droit, moins la moitié de l'angle au centre MOM'; quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, l'angle au centre tend vers zéro, et l'angle OMM' devient droit. La normale au cercle en M est le rayon MO.

CISSOÏDE DE DIOCLÈS.

**20.** Étant donnés un cercle, un diamètre AB, une tangente BC à l'extrémité de ce diamètre (fig. 16), si autour du point A on fait tourner une sécante AE, sur laquelle on porte à partir du point A une longueur AM égale à la portion DE de la sé-

cante comprise entre le cercle et la tangente fixe, le lieu du point M est une courbe qui porte le nom de *Cissoïde*.

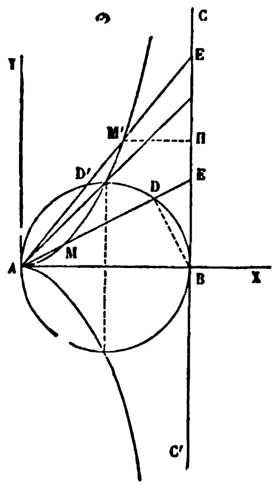


Fig. 16.

Si l'on suppose que la sécante mobile parte de la position AB et tourne autour du point A, de AX vers la perpendiculaire AY, la longueur DE et par suite AM, augmentant indéfiniment, le point M décrira une branche de courbe infinie AMM'. En faisant tourner la sécante mobile de l'autre côté de AB, on obtiendra évidemment une seconde branche égale à la première.

La droite AB est un axe de la courbe, puisque les deux branches sont symétriques par rapport à cette droite.

Les tangentes aux deux branches au point A coïncident avec l'axe. Car si la sécante AM tourne autour du point A de manière à ce que la corde AM ou DE devienne nulle, elle tend vers la position limite AB; donc AB est la tangente en A. Le point A est ce qu'on appelle un point de *rebroussement*.

On peut voir aussi que les deux branches de la courbe se rapprochent indéfiniment de la droite CC'. En effet, considérons la sécante dans la position AE'; si de la longueur totale AE' on retranche alternativement les deux longueurs égales AM' et D'E', on a M'E' = AD'. La corde AD' diminuant de plus en plus et tendant vers zéro, il en est de même de la longueur M'E', et à plus forte raison de la perpendiculaire M'H. Cette droite CC', dont la courbe se rapproche indéfiniment, s'appelle une *asymptote*.

La cissoïde a été imaginée par le géomètre grec Dioclès, pour résoudre le problème de la construction de deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données.

**21.** Cherchons l'équation de la cissoïde en coordonnées polaires; prenons le point A pour pôle et la droite AB pour axe polaire. Appelons $a$ le diamètre du cercle donné,

$\rho$ et $\omega$ les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe (fig. 17). Dans les triangles rectangles ABE, ABD, on a

$$AE = \frac{a}{\cos\omega} \quad , \quad AD = a\cos\omega;$$

d'où $\rho = DE = AE - AD = \frac{a}{\cos\omega} - a\cos\omega = \frac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}.$

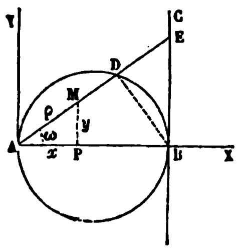


Fig. 17.

Ainsi la cissoïde est représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$(1) \qquad \rho = \frac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Cherchons maintenant l'équation en coordonnées rectilignes; prenons le point A pour origine, la droite AB pour axe des $x$ et une perpendiculaire pour axe des $y$. Dans le triangle rectangle MAP, on a

$$x = \rho\cos\omega \quad , \quad y = \rho\sin\omega \quad , \quad \rho^2 = x^2 + y^2;$$

si, dans l'équation (1), on remplace d'abord $\cos\omega$ par $\frac{x}{\rho}$, $\sin\omega$ par $\frac{y}{\rho}$, ce qui donne $\rho^2 x = ay^2$, puis $\rho^2$ par $x^2 + y^2$, on arrive à l'équation de la cissoïde en coordonnées rectilignes

$$(2) \qquad y^2(a-x) - x^3 = 0.$$

**22.** Proposons-nous de construire, au moyen de son équation en coordonnées rectilignes, la cissoïde, dont nous avons déjà trouvé la forme d'après sa définition géométrique.

En résolvant l'équation par rapport à $y$, on a

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

L'ordonnée n'est réelle que pour les valeurs de l'abscisse comprises entre 0 et $a$; donc la courbe est située tout entière entre l'axe des $y$ et la parallèle CC′ menée à la distance $a$ (fig. 16). Quand $x$ croît de 0 à $a$, la valeur numérique de $y$ croît de 0 à $\infty$, ce qui donne une branche de courbe partant de l'origine A et s'élevant indéfiniment. En même

temps, la distance $M'H = a - x$ d'un point de la courbe à la droite BC tend vers zéro, ce qui fait voir que la droite BC est asymptote de la courbe. Comme à chaque valeur de $x$ correspondent deux valeurs de $y$ égales et de signes contraires, la courbe se compose de deux branches, symétriques par rapport à l'axe AX.

### STROPHOÏDE.

**23.** Un angle droit YOX (fig. 18), et un point fixe A sur un de ses côtés, étant donnés dans un plan, on mène du point fixe A une droite quelconque AD, qui rencontre le côté OY en D, et l'on porte sur cette droite, d'un côté et de l'autre, à partir du point D, des longueurs DM et DN égales à OD; le lieu des points M et N est la *strophoïde*.

Quand la droite mobile occupe la position AO, les deux points M et N se confondent en O. Si la droite tourne de manière à ce que le point D s'élève indéfiniment sur OY, OD augmente, et le point N décrit une branche de courbe infinie ON.

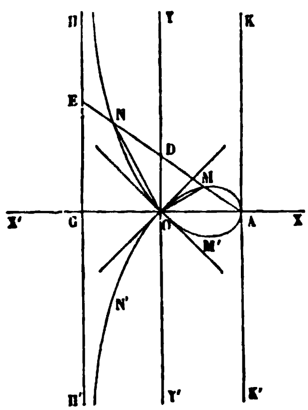


Fig. 18.

Le point M se rapproche de plus en plus du point A; car on obtient les points M et N en décrivant un cercle du point D comme centre avec DO pour rayon; quand le point D s'éloigne indéfiniment, l'angle MOA tend vers un angle droit, et le point M vient en A. Il y a évidemment une partie symétrique de l'autre côté de l'axe OX.

Le point O, par lequel passent les deux branches de courbe, est un point *double*. Les tangentes en ce point aux deux branches de courbe coïncident avec les bissectrices des angles droits YOX, YOX'. Car l'angle ODE, extérieur au triangle isocèle DOM, est égal à la somme des deux angles intérieurs opposés, et, par conséquent, à deux fois l'angle DOM; de même l'angle ODA est égal à deux fois l'angle DON. Quand la droite

AD s'applique sur AO, l'angle obtus ODE diminue et tend vers un angle droit; donc l'angle moitié YOM diminue et tend vers $\frac{\pi}{4}$. L'angle aigu ODA augmente au contraire et tend vers un angle droit; donc l'angle moitié YON augmente et tend aussi vers $\frac{\pi}{4}$. On peut remarquer d'ailleurs que les deux droites OM et ON sont rectangulaires. On voit, en outre, que l'arc OMA est situé au-dessous de sa tangente, tandis que l'arc ON est au-dessus.

La tangente au sommet A est perpendiculaire à l'axe OX; car, lorsque le point D s'élève indéfiniment, la cordo AM devient perpendiculaire à OX.

Sur le prolongement de AO prenons $OG = OA$, et par le point G élevons la perpendiculaire H'H; cette droite est asymptote de part et d'autre aux deux branches infinies de la courbe; car la distance NE, égale à AM, tend vers zéro.

**24.** Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Prenons le point O pour pôle, et la droite OA pour axe polaire; les coordonnées du point M sont $\rho = OM$, $\omega = MOA$; dans le triangle isocèle DOM, chacun des angles DOM, DMO est égal à $\frac{\pi}{2} - \omega$, et l'angle ODM à $2\omega$; l'angle OAM, complémentaire du précédent, vaut $\frac{\pi}{2} - 2\omega$. Si l'on désigne par $a$ la longueur OA, on a, dans le triangle OMA,

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\omega\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}$$

d'où

$$(1) \qquad \rho = \frac{a \cos 2\omega}{\cos \omega}.$$

Les coordonnées du point N vérifient la même équation.

Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes, en prenant pour axes les deux droites OX et OY. Si, dans l'équation précédente, mise sous la forme $\rho \cos \omega = a(\cos^2\omega - \sin^2\omega)$, on remplace $\cos \omega$ et $\sin \omega$ par leurs

valeurs $\frac{x}{\rho}$ et $\frac{y}{\rho}$, on a $x\rho^2 = a(x^2 - y^2)$; mettant ensuite à la place de $\rho^2$ sa valeur $x^2 + y^2$, on arrive à l'équation du troisième degré

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0. \tag{2}$$

**25.** Proposons-nous maintenant de construire la courbe au moyen de son équation en coordonnées rectilignes. L'équation (2), résolue par rapport à $y$, donne

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

Pour que l'ordonnée $y$ soit réelle, il faut que la quantité placée sous le radical soit positive. Quand on donne à $x$ des valeurs positives, le dénominateur étant positif, le numérateur doit être aussi positif, ce qui exige que $x$ soit plus petit que $a$. Quand on donne à $x$ des valeurs négatives, le numérateur étant positif, le dénominateur doit être aussi positif, ce qui exige que la valeur absolue de $x$ soit moindre que $a$. Ainsi l'abscisse $x$ ne peut varier que de $-a$ à $+a$; si donc on porte sur l'axe des $x$, à partir de l'origine, et de part et d'autro, des longueurs OA et OG égales à $a$, et que par les points G et A on mène des parallèles HH', KK' à l'axe des $y$, la courbe sera tout entière comprise entre ces deux parallèles. On verra la forme de la courbe en suivant la variation de la fonction

$$y = x\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

Quand $x$ varie de 0 à $a$, l'ordonnée $y$ conserve des valeurs finies; elle s'annule pour $x = 0$, et aussi pour $x = a$; il en résulte une branche de courbe OMA, partant du point O, et aboutissant au point A. Quand $x$ varie de 0 à $-a$, l'ordonnée $y$ est négative et varie de 0 à $-\infty$; il en résulte une branche ON', qui part de l'origine et s'abaisse indéfiniment, en se rapprochant de plus en plus de la droite HH', qui est une asymptote; cette branche ON' fait suite à la branche AMO.

En changeant le signe du radical, on obtient une branche AM'ON, symétrique de la première par rapport à l'axe des $x$.

### LIMAÇON DE PASCAL.

**26.** Par un point A pris sur un cercle, on mène une sécante quelconque AD, sur laquelle à partir du point D, où elle rencontre le cercle, on porte de part et d'autre une longueur donnée DM ou DN; le lieu des points M et N (fig. 19) est une courbe nommée *limaçon de Pascal.*

On obtiendra la courbe entière, en supposant que le rayon vecteur coïncide d'abord avec le diamètre AB du cercle, et tourne ensuite d'un angle droit dans un sens ou dans l'autre. On obtiendra aussi la courbe entière en faisant faire au rayon vecteur une révolution complète, et portant la longueur constante dans le sens du rayon, à partir du point où ce rayon ou son prolongement coupe le cercle. La courbe présente trois formes différentes, suivant que la longueur constante $a$ est supérieure, égale ou inférieure au diamètre $b$ du cercle.

1° Considérons d'abord le cas où la longueur $a$ est plus grande que $b$. Quand le rayon coïncide avec la direction AB, il faut, à partir du point B, porter sur ce rayon une longueur BG égale à $a$, ce qui donne un point G du lieu (fig. 19). Lorsque le rayon tourne autour du point A et prend la direction AD, on a le point M. Quand le rayon a tourné

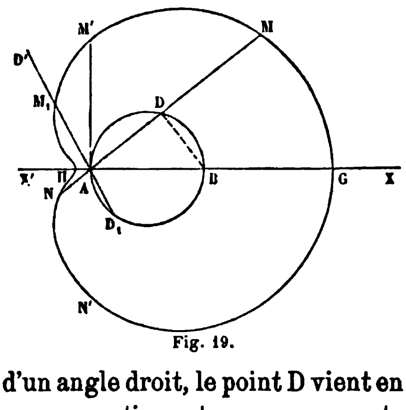


Fig. 19.

d'un angle droit, le point D vient en A, et le point M en M'. Le rayon, continuant son mouvement, prend la direction AD'; son prolongement coupe le cercle en $D_1$; il faut, à partir de ce point $D_1$, porter dans la direction même AD' une longueur $D_1M_1$ égale à $a$. Quand le rayon, ayant tourné de deux angles droits, occupe la position AX', le point $D_1$ vient en B, et le point $M_1$ en H; on a ainsi l'arc $M'M_1H$, qui fait suite au premier, et qui est aussi extérieur au cercle. Le rayon dépassant la position AX' et

tournant encore de deux angles droits, pour revenir à la position initiale AX, le point mobile décrit l'arc HN'G, symétrique de l'arc GMH, par rapport à la droite X'X. De cette manière, le point décrit la courbe entière d'un mouvement continu.

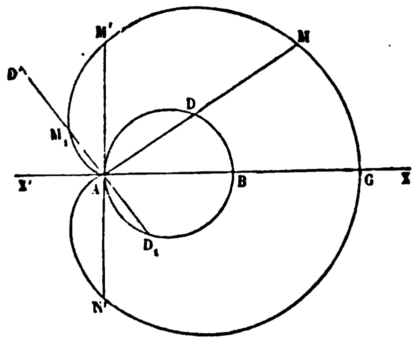


Fig. 20.

2° Supposons maintenant que la longueur $a$ soit égale à $b$. Le rayon vecteur tournant de deux angles droits, à partir de la position initiale AX, le point M décrit l'arc GMM'A (fig. 20), qui vient aboutir au point A. La tangente en A est la droite AX', position limite de la sécante $AM_1$. Le point A est un point de rebroussement.

3° Considérons enfin le cas où la longueur $a$ est plus petite que $b$. Lorsque le rayon vecteur tourne d'un angle droit à partir de la position initiale AX, le point M décrit l'arc GMM' (fig. 21). Le rayon prend ensuite la direction AD'; le point D vient en $D_1$, le point M en $M_1$. Le rayon prend une direction AD″ telle que la corde $D_2A$ est égale à $a$; le point $M_1$ vient alors en A et la courbe est tangente à la droite AD″. Le rayon continuant son mouvement, la corde $D_3A$ devient plus grande que $a$, et, si l'on prend la longueur $D_3M_3$ égale à $a$, on a un point $M_3$ situé à l'intérieur du cercle. Enfin, quand le rayon prend la direction AX', le point $M_3$ vient en H. L'arc extérieur GM'A se prolonge ainsi suivant l'arc intérieur $AM_3H$. L'autre moitié de la rotation donne l'arc HNAN″G,

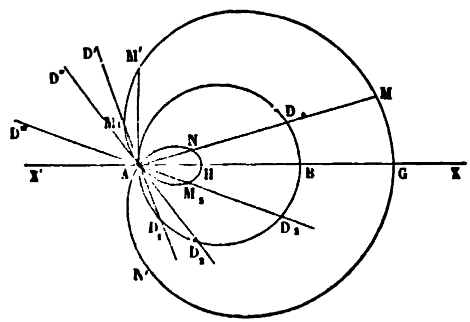


Fig. 21.

symétrique du premier par rapport à la droite X'X, et complète la courbe.

**27.** Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées polaires. Prenons le point A pour pôle, et la droite AX pour axe polaire. Appelons $\omega$ l'angle que fait la direction du rayon vecteur avec la direction AX. Quand la direction même du rayon coupe le cercle, ce qui a lieu dans la position AD, le triangle rectangle ADB donne $AD = b \cos\omega$, et, par suite,

$$\rho = DM + AD = a + b\cos\omega.$$

Quand c'est le prolongement du rayon qui rencontre le cercle, ce qui a lieu dans la position AD', l'angle $\omega$ est l'angle XAD'; le triangle rectangle $BAD_1$ donne $D_1A = -b\cos\omega$, et, par suite,

$$\rho = D_1M_1 - D_1A = a + b\cos\omega.$$

Dans la figure 21, quand le rayon occupe la direction AD''', la longueur du rayon vecteur n'est plus portée dans la direction même de ce rayon, mais dans la direction opposée; on convient d'appeler rayon vecteur du point M la quantité $AM_3$ affectée du signe —; on a alors

$$\rho = -AM_3 = D_3M_3 - AD_3 = a + b\cos\omega.$$

Ainsi, dans tous les cas, la courbe entière est représentée par l'équation

$$(1) \qquad \rho = a + b\cos\omega.$$

En coordonnées rectilignes, si l'on prend le point A pour origine, le diamètre AB pour axe des $x$, une perpendiculaire pour axe des $y$, l'équation de la courbe est

$$(2) \qquad (x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

On l'obtient en remplaçant dans l'équation (1) $\cos\omega$ par sa valeur $\frac{x}{\rho}$, puis $\rho^2$ par $x^2 + y^2$ (n° 21), et élevant au carré pour faire disparaître le radical.

**28.** On obtient cette même courbe par un autre procédé. Étant donné un cercle GH et un point fixe A, imaginons qu'une tangente mobile CM roule sur le cercle, et du point A abaissons

une perpendiculaire AM sur cette tangente (fig. 22); on demande le lieu du point M.

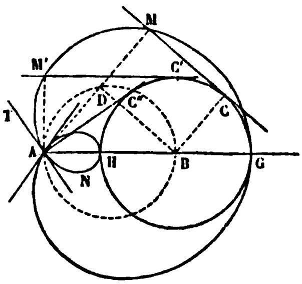


Fig. 22.

Il y a trois cas à considérer, suivant que le point A est intérieur au cercle, sur le cercle, ou extérieur. Supposons, par exemple, le point A extérieur au cercle. Lorsque la tangente touche le cercle en G, la perpendiculaire abaissée du point A coïncide avec le diamètre AG et le point G est un point du lieu. La tangente roulant sur le quart de cercle GCC', le point M décrit l'arc de courbe GMM'. La tangente s'incline ensuite jusqu'à la position C''A, et l'on a l'arc de courbe M'A. La tangente continuant son mouvement suivant C''H, le pied de la perpendiculaire tombe au-dessous du diamètre et décrit l'arc de courbe ANH. Nous avons fait rouler la tangente sur le demi-cercle GC'H; en la faisant rouler sur le demi-cercle inférieur, on obtient une partie symétrique de la première.

Cherchons l'équation de cette courbe en coordonnées polaires; désignons par $a$ le rayon BG du cercle donné, et par $b$ la distance AB. Si, par le centre B du cercle, on mène une parallèle BD à la tangente CM, on a

$$\rho = AD + DM = b\cos\omega + a.$$

Cette équation est la même que l'équation (1), d'où l'on conclut l'identité des deux courbes.

Au reste, il est facile de reconnaître géométriquement cette identité. L'angle D étant droit, le lieu du point D est le cercle décrit sur AB comme diamètre; on obtiendra donc le point M en prolongeant la corde AD d'une quantité constante DM égale à BC.

### ROSACE A QUATRE BRANCHES.

**20.** Étant données deux droites rectangulaires OX, OY, sur lesquelles glissent les extrémités d'une droite PQ de longueur constante, du point O on abaisse une perpendicu-

laire OM sur cette droite; étudier le lieu du point M (fig. 23).

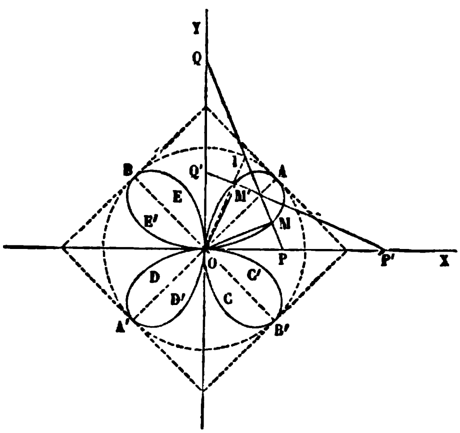



Fig. 23.

Quand la droite PQ s'applique sur OY, le point M vient en O, et la corde OM prend la direction OX; donc la tangente en O à l'arc OM coïncide avec OX. Le point I, milieu de PQ, décrit un cercle dont le centre est O, et le rayon égal à $a$, si l'on désigne par $2a$ la longueur constante PQ; or la perpendiculaire OM est plus petite que l'oblique OI; donc la distance OM est maximum quand la droite PQ est perpendiculaire à la bissectrice OA. Lorsque la droite mobile continue son mouvement, elle passe par une position P'Q' symétrique de PQ par rapport à la bissectrice OA, et l'on obtient un arc OM'A symétrique de l'arc OMA par rapport à OA. La même courbe se reproduit dans chacun des quatre angles droits. Ainsi la courbe a *quatre axes*, les deux droites fixes OX, OY, et les deux bissectrices A'A, B'B. Le point O est *centre* de la courbe.

**30.** Si l'on prend le point O pour pôle, et OX pour axe polaire, on a, dans les triangles rectangles OMP, OPQ,

$$\rho = \mathrm{OP}\cos\omega \quad , \quad \mathrm{OP} = 2a\sin\omega;$$

donc

(1) $$\rho = a\sin 2\omega.$$

En coordonnées rectilignes, la courbe est représentée par une équation du sixième degré

(2) $$(x^2+y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0.$$

TANGENTE.

**31.** Les exemples qui précèdent montrent comment on peut construire une courbe d'après sa définition géométrique,

et trouver ensuite l'équation qui la représente. Il est possible aussi quelquefois de déduire de la définition géométrique de la courbe une construction simple de la tangente. Nous en citerons deux exemples remarquables, les courbes décrites par les différents points d'une figure plane qui se meut dans un plan, et le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes à une courbe donnée. La construction relative à la première classe de courbes dépend des propositions suivantes :

LEMME. *Toute figure plane peut être amenée d'une position à une autre dans son plan par une rotation autour d'un point fixe.*

Nous remarquons d'abord que la position d'une figure plane dans un plan est déterminée lorsqu'on connaît les positions de deux de ses points. Soient A et B deux points de la figure dans sa première position (fig. 24), A′ et B′ ces mêmes points dans sa seconde position; la droite AB, de longueur invariable, s'est transportée en A′B′. Élevons des perpendiculaires aux droites AA′, BB′, en leurs milieux; ces perpendiculaires se coupent en un point I. Les deux triangles AIB, A′IB′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir AB égal à A′B′, IA et IA′ égaux comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire, et de même IB et IB′; donc les deux angles AIB, A′IB′ sont égaux; en retranchant la partie commune A′IB, on en conclut que les angles AIA′, BIB′ sont égaux. Imaginons maintenant que la figure tourne autour du point fixe I de l'angle AIA′, le rayon IA viendra sur IA′ et le point A en A′; de même, le rayon IB, tournant d'un angle BIB′ égal à AIA′, viendra sur IB′ et le point B en B′. Cette rotation autour du point I amène donc la figure de sa première position à la seconde.

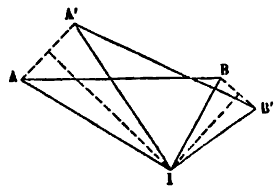


Fig. 24.

32. THÉORÈME. *Si l'on considère les courbes décrites par les différents points* A, B, C...., *d'une figure plane invariable qui se meut dans un plan, les normales à ces courbes, aux points qui correspondent à une même position de la figure, passent par un même point.*

Soient A, B, C..., différents points de la figure dans une position quelconque, A', B', C',... ces mêmes points dans une position voisine; d'après ce que nous avons dit, on peut amener la figure de la première position à la seconde en la faisant tourner autour d'un certain point $I_1$; dans ce mouvement, les rayons $I_1A$, $I_1B$, $I_1C$,... décrivent des angles respectivement égaux et viennent se placer sur $I_1A'$, $I_1B'$, $I_1C'$,... (fig. 25). Les perpendiculaires $MI_1$, $NI_1$, $PI_1$,... aux cordes AA', BB', CC',... en leurs milieux, passent toutes par le point $I_1$.

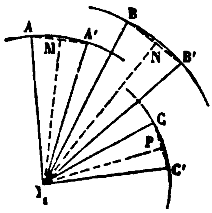


Fig. 25.

Supposons maintenant que la seconde position se rapproche de plus en plus de la première et que le point $I_1$ tende vers une position limite I; les cordes AA', BB', CC',..., prolongées, deviennent tangentes aux courbes en A, B, C,..; les perpendiculaires $MI_1$, $NI_1$, $PI_1$... aux cordes se confondent avec les perpendiculaires aux tangentes en A, B, C,..., c'est-à-dire avec les normales aux courbes. On en conclut que les normales en A, B, C,... aux courbes décrites par ces points passent toutes par un même point I.

Corollaire. Si l'on sait mener les normales aux courbes décrites par deux points A et B de la figure mobile, ces deux normales, par leur intersection, détermineront le point I; en joignant le point I à un troisième point quelconque C, on aura la normale à la courbe décrite par le point C; une perpendiculaire à la normale sera la tangente. C'est ce qui a lieu si deux points décrivent des lignes droites ou des circonférences de cercle. Voici quelques applications de cette méthode.

**33.** Nous allons faire voir que lorsque deux points de la figure mobile décrivent des droites, la courbe décrite par un point quelconque est une ellipse; la méthode précédente nous donnera le moyen de construire la tangente à l'ellipse.

Supposons d'abord que les deux extrémités d'une droite CD, de longueur invariable, glissent sur deux droites rectangulaires fixes OX, OY, et cherchons le lieu décrit par un point M de cette droite (fig. 26). Quand la droite CD est appliquée sur

OX, le point M est en A, à une distance OA égale à DM; l'extrémité D glissant sur OY et s'éloignant du point O, l'extrémité C se rapproche du point O, et le point M décrit l'arc AMB; la droite s'appliquant sur OY, le point M vient en B, à une distance MB égale à CM. Le même arc se reproduit dans chacun des quatre angles droits, et la courbe fermée que l'on obtient ainsi est une ellipse.

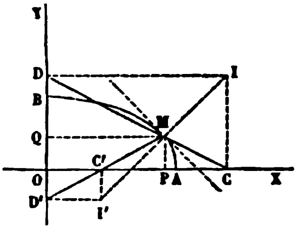



Fig. 26.

En effet, si l'on prend les deux droites fixes OX, OY pour axes des coordonnées, que l'on appelle $a$ et $b$ les deux longueurs constantes DM et CM, $x$ et $y$ les coordonnées du point M, les triangles semblables MPC, DQM donnent

$$\frac{\text{MP}}{\text{DQ}}=\frac{\text{CM}}{\text{DM}}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a};$$

c'est l'équation (5) du n° 13, résolue par rapport à $y$. Ainsi la courbe est une ellipse dont les axes $2a$ et $2b$ sont dirigés suivant les deux droites rectangulaires données.

**34.** Il n'est pas nécessaire que le point M soit situé sur la droite mobile entre les points C et D; il peut être situé sur le prolongement. Considérons la droite C'D' dont les deux points C' et D' glissent sur les deux droites rectangulaires OX et OY, et cherchons le lieu décrit par le point M. Si l'on appelle $a$ et $b$ les distances D'M et C'M, les triangles semblables MPC', D'QM donneront, comme précédemment,

$$\frac{\text{MP}}{\text{D'Q}}=\frac{\text{MC'}}{\text{MD'}}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a}.$$

C'est sur cette propriété que repose la construction d'un petit instrument appelé *compas elliptique*. Deux pointes sont fixées en deux points C et D, pris à volonté sur une droite CD, et un crayon au point M; les deux pointes glissent dans des rainures pratiquées sur deux droites rectangulaires OX et OY; le crayon M décrit l'ellipse d'un mouvement continu.

Il est évident qu'une ligne droite est à elle-même sa propre

tangente. Les points C et D du plan mobile décrivent les droites OX et OY ; les perpendiculaires CI et DI à ces droites déterminent le point I, par lequel passent les normales aux courbes décrites par les différents points de la figure mobile, pour une même position de cette figure. La droite IM est donc normale en M à l'ellipse décrite par ce point : en menant une perpendiculaire à IM, on aura la tangente.

35. Supposons maintenant que deux points E et F du plan mobile glissent sur deux droites fixes quelconques OA et OB (fig. 27). Les perpendiculaires à ces droites aux points E et F déterminent le point de concours I des normales. Le cercle décrit sur OI comme diamètre passe par les points E et F ; la droite EF étant constante ainsi que l'angle EOF, le diamètre du cercle est constant. Imaginons que le cercle soit situé dans le plan mobile et emporté dans son mouvement avec la droite EF ; ce cercle passera constamment par le point O ; tout point D de la circonférence décrira une ligne droite OY, puisque l'angle inscrit FOD, qui correspond à l'arc constant FD, est luimême constant.

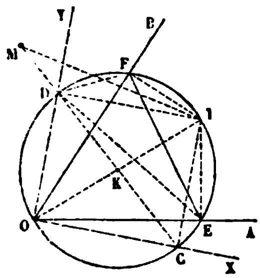


Fig. 27.

Considérons un point quelconque M du plan mobile ; joignons ce point au centre K du cercle ; les deux points C et D, extrémités du diamètre MK, décrivent deux droites rectangulaires OX et OY ; on en conclut que le point M décrit une ellipse dont les axes, égaux à deux fois les distances CM et DM, sont dirigés suivant OX et OY. La droite IM est normale à l'ellipse au point M.

### CONCHOÏDE.

36. Étant donnés un point A et une droite CC′, par le point A on mène une sécante quelconque AD et, à partir du point D où elle rencontre la droite CC′, on porte de part et d'autre une longueur donnée DM et

DN; le lieu des points M et N est une *conchoïde* (fig. 28).

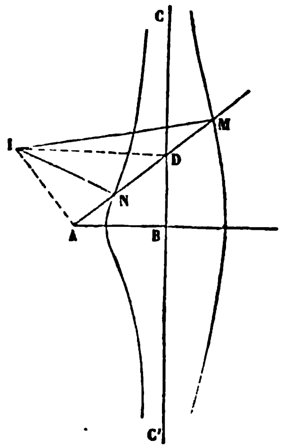


Fig. 28.

On voit aisément que cette courbe se compose de deux branches infinies, situées de part et d'autre de la droite CC', et asymptotes à cette droite. La branche de gauche présente des formes différentes suivant que la longueur DM est inférieure, égale ou supérieure à la perpendiculaire AB abaissée du point A sur la droite CC'.

Cette courbe rentre dans la catégorie précédente; on peut regarder en effet la droite AD comme se mouvant dans le plan, de manière que l'un de ses points D décrive la droite CC', tandis qu'elle glisse sur le point A autour duquel elle tourne; un point M de cette droite décrit une branche de conchoïde. Considérons le point de la droite mobile qui est en A, lorsque la droite occupe la position AD; ce point décrit une branche de conchoïde passant par le point A et tangente en ce point á la droite AD; la normale à cette courbe particulière est la droite AI perpendiculaire à AD. La normale à la ligne décrite par le point D est la perpendiculaire DI à la droite CC'; en joignant au point M le point d'intersection I de ces deux normales, on a la normale IM à la courbe décrite par le point M; la perpendiculaire à IM est la tangente en M.

Le limaçon (n° 26) est une courbe analogue à la conchoïde; il suffit de remplacer la droite CC', sur laquelle glisse le point D, par une circonférence de cercle (fig. 29). Considérons encore le point de la droite mobile qui est en A, quand la droite occupe la position AD; ce point décrit une courbe passant par le point A et tangente en ce point à la droite AD; la normale à cette courbe est la perpendiculaire AI. La normale à la circonférence décrite par le point D est le diamètre DI; le point de concours I des normales

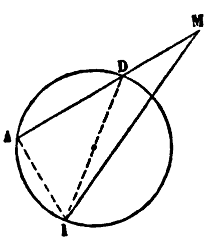


Fig. 29.

est donc l'extrémité du diamètre qui passe par le point D; en joignant IM, on a la normale à la courbe décrite par le point M.

37. La même construction peut aussi être appliquée à la cissoïde et à la strophoïde; mais il faut auparavant donner de ces courbes une autre définition géométrique. Considérons un angle droit ABC (fig. 30), dont un côté BA passe par un point fixe A, et dont un point C de l'autre côté glisse sur une droite EE'; on suppose de plus que la longueur BC est égale à la distance AO du point A à la droite EE'; le point M, milieu de BC, décrit une cissoïde, et le sommet B de l'angle droit une strophoïde.

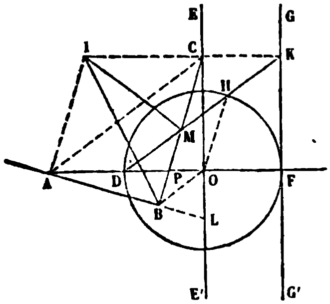



Fig. 30.

En effet, les deux triangles rectangles ABC, AOC étant égaux, les angles CAL, ACL sont égaux, et le triangle ALC isocèle; puisque AB est égal à CO, on a aussi LB=LO; donc le lieu du point B est une strophoïde (n° 23).

Le triangle ACP est aussi isocèle; joignons le point M au milieu D de AO et prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre en K avec la parallèle CK à AO. Le triangle CMK étant isocèle, on a CK=CM=AD. Enfin décrivons une circonférence du point O comme centre avec OD pour rayon, soient F l'extrémité du diamètre DO et H le point de rencontre avec DK. Le triangle isocèle MCK est égal à DOH, DH=MK, d'où DM=KH; d'ailleurs la ligne FG est tangente en F à la circonférence. Donc le lieu du point M est une cissoïde ayant pour sommet le point D et pour asymptote la droite GG' (n° 20).

Considérons maintenant le point de la figure mobile qui est en A, lorsque l'angle droit occupe la position ABC; ce point décrit une courbe passant par le point A et tangente en ce point à la droite AB; la droite AI, perpendiculaire à AB, sera la normale à cette courbe. D'autre part, la droite CI, perpendiculaire à EE', est la normale à la droite décrite par le point C; le point d'intersection I de ces deux normales est le point de concours de toutes les normales. Donc les droites IB et IM

sont normales, l'une à la strophoïde, l'autre à la cissoïde.

## PODAIRES

38. On appelle podaire d'une courbe donnée AB le lieu du pied P de la perpendiculaire abaissée d'un point fixe O sur une tangente quelconque MP à cette courbe (fig. 31). Une tangente voisine M'P' donnera un second point P' de la podaire. Soit D le point d'intersection des deux tangentes; le cercle décrit sur OD comme diamètre passe par les points P et P', et la droite PP' est une sécante du cercle. Imaginons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M, le point D viendra en M, et le diamètre OD coïncidera avec OM; la sécante PP' deviendra tangente à la fois à la podaire et au cercle; la normale à la podaire coïncidera donc avec la normale au cercle construit sur OM comme diamètre, et l'on obtiendra cette normale en joignant le point P au point C, milieu de OM.

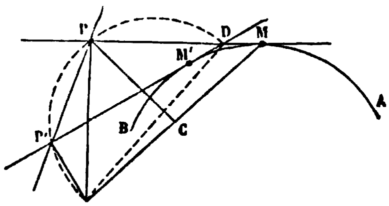


Fig. 31.

Cette construction peut être appliquée aussi au limaçon, qui est la podaire du cercle (n° 28). Mais nous verrons plus tard (n° 307) que la construction des tangentes aux podaires se ramène à la méthode générale indiquée au n° 32.

## EXERCICES.

1° Un triangle variable ABC, dont le sommet A est fixe et l'angle A constant, est inscrit dans un cercle donné. Démontrer que le lieu des centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits au triangle se compose de deux limaçons.

2° Démontrer que le lieu des sommets des angles de grandeur donnée dont les côtés sont tangents à deux cercles donnés se compose de deux limaçons.

3° Un cercle variable touche un cercle donné en un point donné, on mène une tangente commune aux deux cercles. Démontrer que le lieu du point de contact de cette tangente avec le cercle variable est une cissoïde.

4° Un plan mobile se meut dans un plan fixe, de manière que deux droites du plan mobile restent tangentes respectivement à deux cercles du plan fixe. Démontrer qu'un point du plan fixe trace une ellipse sur le plan mobile.

5° Construire les courbes qui, dans le premier système des coordonnées bi-polaires, sont définies par l'équation $u+nv=a$. Démontrer que des trois équations $u+nv=a$, $u-nv=a$, $-u+nv=a$, dans lesquelles les deux constantes $a$ et $n$ ont les mêmes valeurs, deux seulement définissent des lieux géométriques. Ces lieux sont deux courbes fermées intérieures l'une à l'autre; on les appelle ovales conjuguées de Descartes. Elles sont représentées par une même équation algébrique et entière en coordonnées rectilignes. Sur la droite qui passe par les deux pôles, il existe un troisième point, tel qu'en prenant pour pôle ce point et l'un des premiers, l'équation conserve la même forme.

6° Étant donnés deux cercles, si par un point fixe pris sur la ligne des centres on mène une sécante quelconque, et qu'on joigne chaque centre à l'un des points de rencontre de la sécante et du cercle, démontrer que le point d'intersection de ces deux droites décrit les ovales de Descartes.

7° La projection de la courbe d'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles sur un plan perpendiculaire aux axes est un système d'ovale de Descartes.

8° Construire la courbe qui, dans le premier système bi-polaire, est représentée par l'équation $uv=a^2$, $2a$ étant la distance des deux pôles. Cette courbe se nomme *lemniscate*.

9° Trouver le lieu du sommet d'un triangle dont la base $a$ reste fixe, et dans lequel les deux autres côtés $b$, $c$ et la médiane correspondante $m$ vérifient la relation $b-c=m\sqrt{2}$ (lemniscate).

10° Une ligne droite et une circonférence tournent chacune d'un mouvement uniforme autour d'un point fixe commun aux deux lignes, on connaît le rapport $m$ des deux vitesses angulaires, rapport affecté du signe + ou du signe —, suivant que les rotations sont de même sens ou de sens contraire; on demande le lieu décrit par le point de rencontre des deux lignes.

On appliquera aux cas particuliers suivants : 1° $m=\frac{3}{4}$, ou $m=\frac{3}{2}$, limaçon de Pascal; 2° $m=-1$, ou $m=\frac{1}{3}$, rosace à quatre branches; 3° $m=-\frac{1}{2}$, ou $m=\frac{1}{4}$; 4° $m=2$, ou $m=\frac{2}{3}$.

11° Même question, en prenant pour lignes mobiles deux circonférences égales qui tournent autour d'un point fixe qui leur est commun.

Applications : 1° $m=2$, limaçon de Pascal; 2° $m=3$, rosace à quatre branches; $m=-2$; 4° $m=-$ .

# CHAPITRE III

## De l'Homogénéité.

**39.** Définitions. On dit qu'une fonction $f(a, b, c,\ldots)$ est *homogène* par rapport aux lettres, $a$, $b$, $c$,..., lorsque, en remplaçant $a$ par $ka$, $b$ par $kb$,..., on a

$$f(ka, kb, kc, \ldots) = k^m f(a, b, c, \ldots);$$

l'exposant $m$ est le degré de la fonction homogène.

Telles sont, par exemple, les fonctions

$$a^2 + 2ab, \quad \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{c}\sin\frac{c}{a}}{a+b}, \quad \frac{a+\sqrt{ab}}{a+c}, \quad \frac{a}{a^3 - b^3};$$

le degré de la première est 2, celui de la seconde $\frac{1}{2}$, celui de la troisième 0, et celui de la quatrième $-2$.

On voit aisément :

1° Que la somme ou la différence de deux fonctions homogènes du même degré est une fonction homogène du même degré que les fonctions proposées;

2° Que le produit de plusieurs fonctions homogènes de degrés quelconques est une fonction homogène dont le degré est égal à la somme des degrés des fonctions proposées;

3° Que le quotient de deux fonctions homogènes est une fonction homogène dont le degré est égal à l'excès du degré du dividende sur le degré du diviseur;

4° Que la puissance d'une fonction homogène est une fonction homogène dont le degré est égal au degré de la fonction proposée multiplié par l'indice de la puissance;

5° Que la racine d'une fonction homogène est une fonction homogène dont le degré est égal au degré de la fonction proposée divisé par l'indice de la racine;

6° Qu'une fonction transcendante d'une fonction homogène et du degré o est elle-même homogène et du degré o Par exemple, les fonctions

$$\sin\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right),\quad \log\left(\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}\right)$$

sont homogènes et du degré o; car si on remplace $a$ et $b$ par $ka$ et $kb$, la lettre $k$ disparaît sous le signe transcendant, et on peut mettre en avant le facteur $k^0$. Mais, si la quantité placée sous le signe transcendant, quoique homogène, n'était pas du degré o, la lettre $k$ ne pourrait se mettre en facteur en avant du signe transcendant et la fonction ne serait pas homogène. Ainsi, la fonction $\sin(a+\sqrt{bc})$ n'est pas homogène.

Lorsqu'un monôme est rationnel et entier par rapport aux lettres $a, b, c,\ldots$, on appelle degré du monôme, par rapport à une lettre, l'exposant de cette lettre dans le monôme; degré du monôme, par rapport à plusieurs lettres, la somme des exposants de ces lettres. Un monôme est toujours une fonction homogène, d'un degré égal au degré du monôme; donc la somme de plusieurs monômes du même degré est un polynôme homogène de ce même degré. Par exemple, le polynôme

$$a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 2b^3$$

est une fonction homogène du troisième degré, par rapport aux lettres $a$ et $b$.

**40.** Lorsqu'on cherche les relations qui existent entre les longueurs des diverses lignes A, B, C,... d'une figure, on imagine ces lignes rapportées à une unité de longueur, qui ordinairement n'est pas spécifiée et reste tout à fait arbitraire. Désignons par les lettres $a, b, c,\ldots$ les nombres qui expriment ainsi les mesures des lignes de la figure, et supposons que l'on ait trouvé entre ces nombres la relation

$$(1)\qquad f(a,b,c,\ldots)=0.$$

Les raisonnements que l'on a faits pour arriver à cette relation étant indépendants de l'unité de longueur, il est évident que cette relation doit subsister, quelle que soit cette unité. Appelons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... les valeurs particulières de $a$, $b$, $c$,... pour une première unité; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$,... les valeurs de ces mêmes quantités pour une autre unité; ces deux séries de nombres vérifient les relations

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0, \tag{2}$$
$$f(\alpha', \beta', \gamma', \ldots) = 0. \tag{3}$$

Mais quand on change l'unité, les nombres varient proportionnellement, de sorte que, si l'on désigne par $k$ le rapport de la première unité à la seconde, on a

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \cdots = k;$$

d'où

$$\alpha' = k\alpha, \beta' = k\beta, \gamma' = k\gamma\ldots..$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la relation (3), il vient

$$f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots) = 0. \tag{4}$$

Concevons que, la première unité restant fixe, la seconde varie; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... seront des nombres constants, $k$ un nombre arbitraire, et l'équation (4) devra être vérifiée quel que soit ce nombre $k$.

Ainsi, *si l'équation* (1) *est vérifiée quand on y remplace les lettres* a, b, c,... *par les nombres* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,..., *elle sera aussi vérifiée quand on y remplacera ces mêmes lettres par* $k\alpha$, $k\beta$, $k\gamma$,... *quel que soit le nombre* k.

**41.** La condition précédente est évidemment remplie, lorsque le premier membre de l'équation (1) est une fonction homogène des lettres $a$, $b$, $c$,...; car alors on a

$$f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots) = k^m f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots);$$

si l'expression $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ est nulle, il en sera de même de $f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots)$, quel que soit $k$.

Réciproquement, pour que la condition précédente soit remplie, il est nécessaire que l'équation soit homogène. Nous ne considérons ici que le cas où l'équation est algébrique.

Supposons que $f(a, b, c, \ldots)$ soit un polynôme entier; si tous les termes ne sont pas du même degré, groupons les termes dont le degré est le même; appelons $\varphi(a, b, c, \ldots)$ l'ensemble des termes du degré le plus élevé $m$, $\psi(a, b, c, \ldots)$ l'ensemble des termes du degré $n$, etc., l'équation (4) devient

$$k^m \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + k^n \psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + \cdots = 0.$$

Pour que cette équation soit vérifiée, quel que soit $k$, il est nécessaire que l'on ait séparément

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0, \qquad \psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0, \ldots.$$

Comme l'unité à laquelle se rapportent les nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... est arbitraire, on a entre les lignes de la figure les relations homogènes

$$\varphi(a, b, c, \ldots) = 0, \qquad \psi(a, b, c, \ldots) = 0, \ldots.$$

Donc, *si l'équation* (1) *n'est pas homogène, elle équivaut à plusieurs équations, homogènes séparément.*

**42.** Il peut arriver qu'une équation non homogène soit vérifiée, quand on fait choix d'une unité particulière, sans que les parties qui la composent soient nulles séparément; mais alors, si l'on change l'unité, l'équation cessera d'être vérifiée.

Expliquons ceci par un exemple : Proposons-nous de déterminer les dimensions d'un cylindre, de telle sorte que sa surface totale soit équivalente à celle d'une sphère de rayon donné A et son volume à celui d'une sphère de rayon B.

Soient X le rayon et Y la hauteur du cylindre; appelons $a$, $b$, $x$, $y$ les mesures des lignes A, B, X, Y, rapportées à une unité quelconque; les inconnues devront satisfaire aux deux équations

$$(5) \qquad 2x^2 + 2xy - 4a^2 = 0,$$

$$(6) \qquad x^2 y - \frac{4}{3} b^3 = 0.$$

Chacune de ces équations est homogène : l'une est du second degré, l'autre du troisième. Si elles sont vérifiées quand on rapporte les lignes à une certaine unité, il en sera de même quand on les rapportera à une autre unité.

Les inconnues $x$ et $y$ satisfont également à l'équation non homogène

$$(7) \qquad (2x^2+2xy-4a^2)+\left(x^2y-\frac{4}{3}b^3\right)=0,$$

que l'on obtient en ajoutant les précédentes membre à membre. Considérons maintenant l'équation (7), abstraction faite de son origine. On peut trouver quatre lignes A, B, X, Y, telles que, si on les mesure avec une unité particulière, les nombres obtenus vérifient cette équation, sans annuler séparément les deux parties. Supposons, par exemple, que les lignes, rapportées à une première unité, aient pour mesures les quatre nombres $a=1$, $b=3$, $x=2$, $y=4$, dont trois ont été pris arbitrairement et le quatrième déterminé ensuite par l'équation (7); si on mesure les mêmes lignes avec une unité deux fois plus petite, on obtient des nombres deux fois plus grands $a=2$, $b=6$, $x=4$, $y=8$, qui ne satisfont plus à l'équation. Le cylindre construit avec les lignes X et Y ainsi déterminées jouit de cette propriété que la somme des nombres, qui, avec l'unité choisie, expriment les mesures de sa surface et de son volume, est égale à la somme des nombres qui expriment les mesures de la surface d'une sphère et du volume d'une autre sphère; mais la même relation n'a plus lieu quand l'unité linéaire change. L'équation (7) ne peut être vérifiée par les mesures des mêmes lignes, quand on fait varier arbitrairement l'unité de longueur, qu'autant que ces lignes satisfont aux équations (5) et (6), prises isolément.

Dans la résolution des problèmes de géométrie, on ne fait jamais de combinaisons d'équations analogues à la précédente. Les équations, que donnent immédiatement les théorèmes de la géométrie élémentaire, sont homogènes; et, quand on ajoute deux équations membre à membre, c'est afin d'obtenir une nouvelle équation plus simple que l'une des proposees; pour cela, il est nécessaire que les équations que l'on ajoute soient du même degré. Le principe de l'homogénéité pourra

servir à chaque instant à vérifier les transformations algébriques effectuées.

**43.** Lorsqu'on prend pour unité de longueur une des lignes de la figure, les équations cessent d'être homogènes; mais il est facile de rétablir l'homogénéité. Soit

$$(8) \qquad F(b', c', \ldots) = 0$$

l'équation à laquelle on arrive quand on prend pour unité la ligne A; les lettres $b'$, $c'$,... désignent les mesures des lignes B, C,... rapportées à A. Laissons l'unité arbitraire et appelons $a$, $b$, $c$,... les mesures des lignes A, B, C,...; on a

$$\frac{1}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \cdots,$$

d'où

$$b' = \frac{b}{a}, \quad c' = \frac{c}{a}, \ldots,$$

et l'équation (8) se transforme dans la suivante

$$(9) \qquad F\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \cdots\right) = 0,$$

qui est homogène.

Ainsi, par exemple, si l'on rapporte les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle à l'hypoténuse de ce triangle prise pour unité, les mesures des côtés vérifient l'équation non homogène

$$b'^2 + c'^2 = 1,$$

de laquelle on déduit l'équation homogène

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1, \quad \text{ou} \quad b^2 + c^2 = a^2,$$

en remplaçant $b'$ par $\frac{b}{a}$ et $c'$ par $\frac{c}{a}$.

Les courbes, ellipse, hyperbole, parabole, cissoïde, etc., étudiées dans le chapitre précédent, sont représentées par des équations homogènes. Une équation homogène quelconque

$$f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0,$$

entre les coordonnées variables $x$ et $y$ d'un point du plan et les longueurs $a$, $b$, $c$,... de diverses droites données, détermine une courbe, dont la position et les dimensions sont indépen-

dantes de l'unité avec laquelle on mesure les lignes. Considérons au contraire une équation numérique entre $x$ et $y$,

$$f(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire une équation ne renfermant pas d'autres lettres que $x$ et $y$, et supposons cette équation non homogène. Pour représenter par des points du plan les solutions réelles de cette équation, il faut commencer par choisir arbitrairement une échelle, ou la droite que l'on prendra pour unité. Quand l'échelle varie, la courbe ne reste plus la même; nous verrons plus tard que les diverses courbes ainsi obtenues ont des analogies remarquables; ce sont des courbes *homothétiques*.

**44.** REMARQUE I. Il arrive souvent que l'on considère dans une même question des nombres qui expriment des mesures de lignes, de surfaces et de volumes; les unités de surface et de volume restent, comme l'unité de ligne, indéterminées; mais on suppose habituellement qu'il existe entre elles cette relation, que l'unité de surface est le carré construit sur l'unité de longueur, et l'unité de volume le cube construit sur la même droite. Dans ce cas, pour vérifier l'homogénéité d'une relation dans laquelle certaines lettres S et V désignent la mesure d'une surface ou d'un volume, on remplacera ces lettres par $p^2$ et $q^3$, en désignant par $p$ et $q$ les côtés du carré ou du cube équivalents à la surface ou au volume considérés; de cette manière l'équation ne contiendra plus que des lignes. On peut aussi se dispenser de faire cette substitution, et alors, dans l'évaluation du degré de chaque terme, on double l'exposant des lettres qui désignent des surfaces, et on triple ceux des lettres qui désignent des volumes.

REMARQUE II. En général, lorsque des angles entrent dans un calcul, ces angles sont rapportés à une unité complétement déterminée et leurs mesures sont des nombres fixes. Pour évaluer un angle, on décrit de son sommet comme centre, avec un rayon arbitraire, un arc de cercle et on prend le rapport de cet arc au rayon, ce qui revient à choisir pour unité d'angle celui dans lequel l'arc est égal au rayon. Les fonctions trigonométriques des angles sont également des nombres.

Dans l'application du principe de l'homogénéité, on fera donc abstraction des lettres qui désignent des angles ou leurs fonctions trigonométriques.

## CONSTRUCTION DES FORMULES.

45. En résolvant, si cela est possible, les équations d'un problème déterminé, on obtient des formules qui indiquent les opérations arithmétiques qu'il faut effectuer sur les nombres qui mesurent les grandeurs connues pour avoir les valeurs numériques des inconnues. Mais ne pourrait-on pas déduire de chaque formule, ou même de chaque équation, une construction graphique propre à donner, non plus la valeur numérique de l'inconnue, mais l'inconnue elle-même? En un mot, est-il possible de remplacer les opérations numériques par des opérations graphiques? En géométrie élémentaire, on ne considère que les constructions qui peuvent être effectuées au moyen d'un nombre limité de lignes droites et de cercles, et qui, par conséquent, n'exigent que l'emploi de la règle et du compas. Comme le cercle est la plus simple des courbes et la plus facile à décrire, les anciens géomètres attachaient beaucoup de prix à ces sortes de constructions; d'un autre côté, ignorant l'analyse algébrique, ils manquaient de moyens pour décider si la question qu'ils avaient en vue est susceptible d'une solution de ce genre, et ce n'est qu'après avoir fait bien des efforts inutiles qu'ils se décidaient enfin à recourir à d'autres courbes. Leurs recherches ont rendu célèbres certains problèmes que l'on démontre aujourd'hui ne pouvoir être résolus par la ligne droite et le cercle. Tels sont les problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, etc.

Nous supposerons que l'inconnue est une ligne droite; quand l'inconnue est une surface ou un volume, on la représente par $ax$ ou $a^2x$, $a$ étant une ligne prise arbitrairement; la construction de la ligne $x$ donne un rectangle ou un parallélipipède équivalents à la surface ou au volume cherchés. La détermination d'un angle donné par une de ses lignes trigo-

nométriques se ramène aussi à celle d'une droite. Nous supposerons encore que toutes les lettres désignent, ainsi que $x$, des lignes droites.

**46.** Formule rationnelle. La formule qui donne l'inconnue $x$ doit être homogène et du premier degré; elle peut d'ailleurs être entière, rationnelle ou irrationnelle. Quand elle est entière, elle a la forme

$$x = a - b + c + \ldots,$$

et on obtient la longueur $x$ en portant à la suite l'une de l'autre, dans un sens ou dans l'autre, les longueurs $a$, $b$, $c$,...

La formule fractionnnaire la plus simple est

$$x = \frac{ab}{c}.$$

L'inconnue est une quatrième proportionnelle, que l'on construira par deux parallèles ou par un cercle.

On construira de même la formule

$$x = \frac{abcd}{a'b'c'} \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{cd}{c'}$$

par une série de quatrièmes proportionnelles,

$$\gamma = \frac{cd}{c'}, \quad \beta = \frac{b\gamma}{b'}, \quad x = \frac{a\beta}{a'}.$$

A l'aide de la construction précédente, un monôme $\frac{abc\ldots ghi\ldots l}{a'b'c'\ldots g'}$ du degré $m$ se ramènera à la forme $\alpha i\ldots l$, ou encore à la forme $\lambda^{m-1} t$, $\lambda$ étant une longueur quelconque et $t$ une ligne déterminée par la formule

$$t = \frac{\alpha i\ldots l}{\lambda^{m-1}}.$$

Considérons maintenant la formule

$$x = \frac{A - B + C}{A' + B' - C'},$$

dans laquelle A, B, C désignent des monômes du degré $m+1$, A', B', C' des monômes du degré $m$. On ramène d'abord chacun

de ces monômes aux formes simples

$$\lambda^m a\ ,\ \lambda^m b\ ,\ \lambda^m c,\ldots,\qquad \lambda^{m-1}a'\ ,\ \lambda^{m-1}b'\ ,\ \lambda^{m-1}c',$$

et l'on a

$$x=\frac{\lambda(a-b+c)}{a'+b'-c'}=\frac{\lambda\alpha}{\beta}.$$

On déterminera ensuite l'inconnue $x$ par une quatrième proportionnelle entre les lignes $\beta$, $\alpha$, $\lambda$.

Si la fraction était du degré $m$, les opérations qui précèdent la ramèneraient à la forme

$$\lambda^{m-1}\frac{\lambda\alpha}{\beta}=\lambda^{m-1}t.$$

**47.** Formule irrationnelle du second degré. Soit d'abord la formule

$$x=\sqrt{ab},\quad \text{ou}\quad \frac{a}{x}=\frac{x}{b}.$$

L'inconnue $x$ est une moyenne proportionnelle entre les lignes $a$ et $b$; on l'obtient par un triangle rectangle, ou par une tangente au cercle.

Lorsque le radical porte sur une fonction rationnelle du degré $m$, on transforme ainsi la formule

$$\sqrt{\lambda^{m-1}t}=\sqrt{\lambda^{m-2}\lambda t}=\lambda^{\frac{m-2}{2}}u.$$

Considérons maintenant une formule irrationnelle du second degré, dans laquelle nous supposons que les quantités réunies par le signe $+$ ou le signe $-$ sont homogènes et du même degré. Pour plus de clarté, nous imaginerons la valeur de $x$ ramenée à la forme

$$x=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}},$$

N et D désignant des fonctions dans lesquelles n'entre pas le signe de la division, ni d'exposant fractionnaire ou négatif; on peut supposer aussi qu'il n'y a pas de produit de deux radicaux ni de produit d'un radical par une quantité entière. Pour obtenir la valeur du numérateur N, il faut effectuer certaines opérations dans un ordre déterminé; le premier signe radical

porte sur une expression entière, on le ramènera à la forme $\lambda^{\frac{m}{2}}u$; si cette quantité doit être ajoutée à d'autres, on ramènera celles-ci à la même forme, et par suite aussi leur somme. Un nouveau signe radical peut porter maintenant, soit sur une quantité entière, soit sur une quantité affectée de l'exposant $\frac{m}{2}$, $m$ étant impair. Dans tous les cas, on ramènera le radical à la forme $\lambda^{\frac{m}{4}}v$, on ajoutera ce terme à d'autres de même forme, et ainsi de suite. On voit ainsi que le numérateur N prendra la forme $\lambda^{\frac{m}{2^p}}t$. Il en sera de même du dénominateur D. L'inconnue $x$ étant du premier degré, on l'obtiendra par une quatrième proportionnelle.

On démontre que les hypothèses que nous avons faites sur la composition de la formule sont nécessaires pour qu'elle soit homogène.

Ainsi, *toute expression homogène du premier degré, composée d'une manière quelconque au moyen des signes d'opérations simples, addition, soustraction, multiplication, division, élévation à une puissance entière, racine carrée; en un mot, toutes les expressions rationnelles et toutes les expressions irrationnelles ne contenant que des racines carrées, peuvent être construites au moyen d'un nombre limité de lignes droites et de cercles.*

On démontre aussi que les expressions de cette nature sont seules susceptibles d'être construites de la façon indiquée; mais cette démonstration ne peut trouver place ici. Ainsi, par exemple, le côté $x$ du cube double d'un autre dont le côté est $a$, côté donné par la formule

$$x = \sqrt[3]{2a^3},$$

ne peut pas s'obtenir par la règle et le compas; il en est de même, en général, des racines des équations du troisième et du quatrième degré, puisqu'il entre des radicaux cubiques dans l'expression de ces racines.

**48.** Construction des racines de l'équation du second degré. L'équation du second degré à une seule inconnue se

ramène à la forme $x^2+px+q=0$; pour qu'elle soit homogène, il faut que la quantité $p$ soit du premier degré, et $q$ du second degré ; si ces quantités sont rationnelles ou irrationnelles du second degré, on pourra construire une ligne $a$ équivalente à la première et un carré $b^2$ équivalent à la seconde, et l'équation du second degré présentera l'une des quatre dispositions suivantes :

$$x^2+ax+b^2=0,$$
$$x^2+ax-b^2=0,$$
$$x^2-ax+b^2=0,$$
$$x^2-ax-b^2=0.$$

Les racines de la première et de la seconde équation sont égales à celles de la troisième et de la quatrième, prises en signes contraires; il suffit donc de considérer celles-ci; or, si on les met sous la forme

$$x(a-x)=b^2 \quad , \quad x(x-a)=b^2,$$

on voit qu'il s'agit de construire un rectangle équivalent à un carré $b^2$, et dont la somme ou la différence des côtés soit égale à une ligne donnée $a$, problèmes que l'on résout en géométrie élémentaire. La résolution des équations et la construction des formules feraient au besoin retrouver les solutions de la géométrie.

L'équation bi-carrée se ramène pareillement à l'un des types

$$x^4+abx^2-c^2d^2=0,$$
$$x^4-abx^2+c^2d^2=0,$$
$$x^4-abx^2-c^2d^2=0;$$

car il est inutile de considérer l'équation $x^4+abx^2+c^2d^2=0$, qui n'a que des racines imaginaires. Si l'on pose $x^2=cz$, ces équations deviennent

$$z^2+\frac{ab}{c}z-d^2=0 \quad , \quad z^2-\frac{ab}{c}z+d^2=0 \quad , \quad z^2-\frac{ab}{c}z-d^2=0.$$

On détermine, comme on vient de le dire, les racines $z$ de celles-ci, puis on trouve $x$ par une moyenne proportionnelle entre $c$ et $z$.

# CHAPITRE IV

## Transformation des Coordonnées.

Quand on connaît l'équation d'une ligne par rapport à certaines coordonnées, il importe de pouvoir en déduire l'équation de la même ligne par rapport à d'autres coordonnées.

Pour résoudre cette question d'une manière générale, il faut trouver des formules qui expriment les coordonnées d'un point quelconque du plan dans un certain système, au moyen des coordonnées du même point dans un autre système. Ces formules sont utiles aussi dans un grand nombre d'autres questions.

Nous nous occuperons en premier lieu de la transformation des coordonnées rectilignes en d'autres coordonnées rectilignes.

### DÉPLACEMENT DE L'ORIGINE.

**49.** Supposons d'abord que l'on remplace les deux axes OX et OY par d'autres axes O'X' et O'Y' respectivement parallèles aux premiers (fig. 32) et de même sens. La position des nouveaux axes sera déterminée par les coordonnées $a$ et $b$ de la nouvelle origine O' relativement aux axes primitifs. Nous appellerons $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque M du plan relatives aux premiers axes, $x'$ et $y'$ les coordonnées du même point relatives aux nouveaux axes.

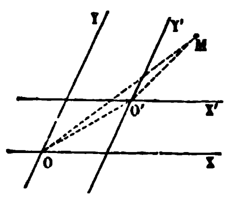


Fig. 32

Imaginons qu'un mobile aille du point O au point M en suivant la ligne droite OM ou la ligne brisée OO'M, et projetons ces deux chemins sur l'axe OX parallèlement à OY. La projection de la droite OM, avec le signe qui lui convient, est l'abscisse $x$ du point M; la projection de la droite OO' est l'abscisse $a$ du point O'; la projection de la droite O'M sur OX, ou sur l'axe parallèle O'X', est la nouvelle abscisse $x'$. Les projections des deux chemins étant égales entre elles, on a

$x = a + x'$. En projetant sur l'axe OY, parallèlement à OX, on a de même $y = b + y'$. On obtient ainsi les deux relations

(1) $$x = a + x' \quad , \quad y = b + y',$$

entre les anciennes et les nouvelles coordonnées du point M. Ces relations sont vraies, quelle que soit la position du point M dans le plan. On en déduit

(2) $$x' = x - a \quad , \quad y' = y - b.$$

### CHANGEMENT DE LA DIRECTION DES AXES.

**50.** Supposons maintenant que l'on change la direction des axes en conservant la même origine. Nous traiterons d'abord un cas particulier qui se présente souvent dans la pratique, celui où les axes des deux systèmes sont rectangulaires. Imaginons que l'on change la direction des axes en faisant tourner l'angle droit XOY (fig. 33) d'un certain angle $\alpha$ autour de l'origine, pour l'amener dans la position X'OY', et considérons l'angle $\alpha$ comme positif, si la rotation s'effectue de OX vers OY, comme négatif si la rotation s'exécute en sens inverse.

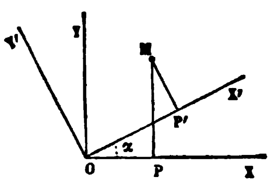


Fig. 33.

Par un point quelconque M du plan menons des parallèles MP et MP' aux axes OY et OY'; désignons par $x$ et $y$ les coordonnées du point M relatives aux premiers axes, et par $x'$ et $y'$ les coordonnées du même point relatives aux nouveaux axes. Les projections des deux chemins OPM, OP'M sur un axe quelconque sont égales. Projetons ces deux chemins d'abord sur l'axe OX; la projection de la longueur OP est cette longueur elle-même, affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est portée dans la direction OX, ou dans la direction opposée; c'est, dans tous les cas, l'abscisse $x$; PM étant perpendiculaire sur OX, sa projection est nulle; la projection du premier chemin se réduit donc à $x$. Projetons maintenant le chemin OP'M; et d'abord projetons le premier côté OP'; si la longueur OP' est portée sur OX', il faut la multiplier par $\cos\alpha$, ce qui donne la projection $OP' \times \cos\alpha$; si cette longueur est portée en sens inverse, il faut la multiplier par $\cos(\alpha + \pi)$, ce qui donne

$OP' \times \cos(\alpha+\pi)$ ou $-OP' \times \cos\alpha$; mais, dans le premier cas, on a $x'=OP'$, dans le second cas $x'=-OP'$: ainsi la projection du côté OP′ est toujours exprimée par $x'\cos\alpha$. Considérons le second côté P′M; s'il est dirigé dans le sens OY′, il fait avec OX l'angle $\alpha+\frac{\pi}{2}$, et sa projection est $P'M \times \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; s'il est dirigé en sens inverse, il fait avec OX l'angle $\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi$, et sa projection est $-P'M\times\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; mais on a, dans le premier cas $y'=P'M$, dans le second cas $y'=-P'M$; ainsi, la projection de P′M est toujours exprimée par $y'\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Il en résulte que le chemin OP′M a pour projection $x'\cos\alpha+y'\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, ou $x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$. En égalant les projections des deux chemins OPM, OP′M, on obtient la relation $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$.

Projetons ensuite les deux chemins sur l'axe OY. La projection de OP est nulle; celle de PM, affectée du signe convenable, est $y$; ainsi la projection du premier chemin se réduit à $y$. Les deux directions OX′ et OY′ font avec OY les angles $-\frac{\pi}{2}+\alpha$ et $\alpha$, ce qui donne pour la projection du second chemin $x'\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+y'\cos\alpha$, ou $x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$, et l'on a la relation $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$. On obtient ainsi les formules

$$(3)\qquad x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\quad,\quad y'=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

qui expriment les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

**51.** Occupons-nous maintenant de la question générale. Soient OX et OY deux axes quelconques faisant entre eux un angle $\theta$, OX′ et OY′ deux nouveaux axes dont on définit les directions par les angles $\alpha$ et $\beta$ qu'ils font avec OX (*fig.* 34); on convient de regarder les angles $\alpha$ et $\beta$ comme positifs, quand une droite mobile, partant de la position OX, les décrit en tournant de OX vers OY, et

comme négatifs, quand la droite tourne en sens contraire. Par un point M quelconque du plan menons les droites MP et MP′ respectivement parallèles aux axes OY et OY′. Pour avoir $x$, nous projetterons les deux chemins OPM, OP′M sur une direction OH perpendiculaire à OY, et telle qu'une droite, partant de la position OY, tourne d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ de OY vers OX, pour arriver à la position OH. La direction OX faisant avec OH l'angle $\frac{\pi}{2}-\theta$, et la direction OY étant perpendiculaire à OH, la projection du premier chemin se réduit à $x \sin\theta$. La direction OX′ fait avec OH un angle égal à l'angle HOX, augmenté de l'angle XOX′, ce qui fait $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\alpha$; de même, la direction OY′ fait avec OH un angle égal à $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\beta$; on a donc pour la projection du second chemin

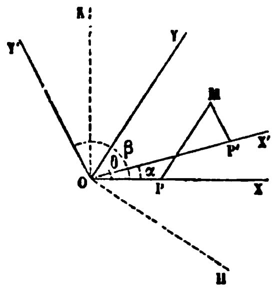



Fig. 34.

$$x' \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right)+y' \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\beta\right),$$

ou
$$x' \sin(\theta-\alpha)+y' \sin(\theta-\beta),$$

ce qui donne la relation
$$x \sin\theta = x' \sin(\theta-\alpha)+y' \sin(\theta-\beta).$$

Pour avoir $y$, projetons les deux chemins OPM, OP′M sur une direction OK perpendiculaire à OX, et telle qu'une droite, partant de la position OX, tourne d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ de OX vers OY, pour arriver à la position OK. La direction OX étant perpendiculaire à OK et la direction OY faisant avec cette droite l'angle $-\frac{\pi}{2}+\theta$, la projection du premier chemin se réduit à $y \sin\theta$. Les angles que les directions OX′ et OY′ font avec OK sont égaux aux angles qu'elles font avec OX, diminués de $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne $-\frac{\pi}{2}+\alpha$, et $-\frac{\pi}{2}+\beta$; la projection du

second chemin est donc $x' \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+y' \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\beta\right)$, ou $x' \sin\alpha + y' \sin\beta$, et l'on a la relation

$$y' \sin\theta = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

On obtient ainsi les deux formules

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' \sin(\theta-\alpha) + y' \sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}, \\ y = \dfrac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}, \end{cases}$$

pour la transformation des coordonnées obliques en d'autres coordonnées obliques.

On en déduit facilement des formules servant à revenir des nouveaux axes aux anciens. L'angle des nouveaux axes est $\beta-\alpha$; les axes OX et OY font avec OX' les angles $-\alpha$ et $-\alpha+\theta$; il suffit donc, dans les formules précédentes, de remplacer $\theta$ par $\beta-\alpha$, $\alpha$ par $-\alpha$, $\beta$ par $\theta-\alpha$, ce qui donne

$$(5) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x \sin\beta + y \sin(\beta-\theta)}{\sin(\beta-\alpha)}, \\ y' = \dfrac{-x \sin\alpha + y \sin(\theta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}. \end{cases}$$

Appelons $\theta'$ l'angle des nouveaux axes $\theta' = \beta - \alpha$ ; alors le déterminant des coefficients de $x'$ et $y'$ dans les formules (4) est

$$\frac{\sin\beta \sin(\theta-\alpha) - \sin\alpha \sin(\theta-\beta)}{\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta'}{\sin\theta},$$

et le déterminant des coefficients de $x$ et $y$ dans les formules (5) est l'inverse du précédent $\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}$.

**52.** Les formules générales donnent quelques formules particulières qu'il est bon de connaître.

1° *Cas où les axes primitifs sont rectangulaires.* Dans ce cas on a $\theta = \frac{\pi}{2}$, et les formules (4) se réduisent à

$$(6) \qquad \begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{cases}$$

2° *Cas où les nouveaux axes sont rectangulaires.* Supposons $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, les formules (4) deviennent

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin\theta}, \\ y = \dfrac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\theta}. \end{cases}$$

On pourrait supposer aussi $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, ce qui revient à changer le sens de l'axe OY', et, par conséquent, le signe de $y'$ dans les formules (7).

3° *Cas où les deux systèmes d'axes sont rectangulaires.* Si, dans les formules (6), on suppose $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, on obtient les formules (3) déjà trouvées,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y' = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases}$$

On les obtiendrait aussi en supposant dans les formules (7) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

### TRANSFORMATION GÉNÉRALE.

**53.** Supposons que l'on change à la fois l'origine et la direction des axes. On déterminera le nouveau système d'axes par les coordonnées $a$ et $b$ de la nouvelle origine O' relativement aux anciens axes, et par les angles $\alpha$ et $\beta$ que font les nouveaux axes O'X' et O'Y' avec l'axe OX (fig. 35).

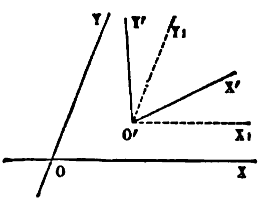


Fig. 35.

Par le point O' menons deux axes $O'X_1$ et $O'Y_1$ respectivement parallèles à OX et OY. On a, d'une part

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1;$$

d'autre part, en vertu des formules (4),

$$x_1 = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}, \quad y_1 = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta};$$

on en déduit les formules générales de transformation

$$(8)\quad \begin{cases} x = a + \dfrac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}; \\ y = b + \dfrac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Nous remarquerons que les coordonnées anciennes $x$ et $y$ s'expriment par des fonctions entières et du premier degré des coordonnées nouvelles $x'$ et $y'$.

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES EN COORDONNÉES POLAIRES.

**54.** Soient OX et OY deux axes rectangulaires; prenons l'origine pour pôle, et l'axe des $x$ pour axe polaire (fig. 36); en projetant la droite OM sur l'axe OX et sur l'axe OY, on obtient les relations

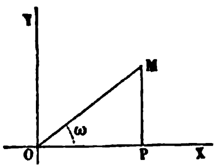


Fig. 36.

$$(9)\qquad x = \rho\cos\omega,\quad y = \rho\sin\omega.$$

On passera réciproquement des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes à l'aide des formules

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x}.$$

Nous avons fait plusieurs transformations de cette sorte, quand nous avons cherché les équations en coordonnées rectilignes de la cissoïde, de la strophoïde, du limaçon de Pascal et de la rosace (n$^{os}$ 21, 24, 27, 30).

DISTANCE DE DEUX POINTS.

**55.** Supposons d'abord les axes rectangulaires et cherchons la distance de l'origine à un point M dont nous appellerons $x$ et $y$ les coordonnées. Dans le triangle rectangle OPM (fig. 37), on a

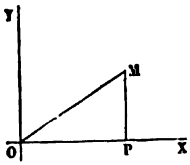


Fig. 37.

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + y^2,$$

quelle que soit la position du point M dans le plan; d'où l'on déduit, en désignant par $l$ la distance OM,

$$(10)\qquad l = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Cherchons maintenant la distance des deux points M et M', situés d'une manière quelconque dans le plan; nous appellerons

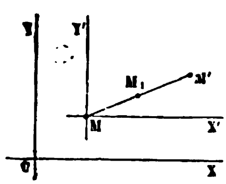



Fig. 38.

$x$ et $y$ les coordonnées du point M, $x'$ et $y'$ celles du point M', par rapport aux axes rectangulaires OX, OY. Par le point M (fig. 38) menons des axes MX', MY', parallèles aux axes proposés; les coordonnées du point M' relatives à ces nouveaux axes sont égales à $x'-x$, $y'-y$, en vertu des formules (2) du nº 49. La distance $l$ de la nouvelle origine M au point M' sera donc, d'après la formule (10),

$$(11) \qquad l=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}.$$

56. Quand les axes sont obliques et font entre eux l'angle $\theta$, l'expression de la distance est un peu plus compliquée. Cherchons d'abord la distance de l'origine O à un point quelconque M du plan. Dans le triangle OPM (fig. 39), quelle que soit la position du point M,

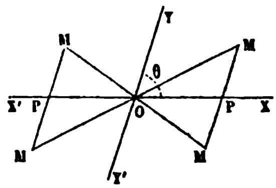



Fig. 39.

on a

$$\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{PM}^2-2.OP.PM\cos OPM.$$

Quand le point M est situé dans l'angle YOX, les coordonnées $x$ et $y$ de ce point sont égales à $+$ OP et à $+$ PM, et l'angle OPM est le supplément de l'angle $\theta$ ; on a donc

$$(12) \qquad l=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\theta}.$$

Si le point M est situé dans l'angle Y'OX', les coordonnées $x$ et $y$ étant égales à $-$ OP et à $-$ PM, et l'angle OPM le supplément de $\theta$, on obtient la même formule (12). Quand le point M est situé dans l'un des angles YOX', Y'OX, l'angle OPM est égal à $\theta$, mais l'une des coordonnées est positive, l'autre négative, ce qui reproduit encore la formule (12). Cette formule est donc générale.

Pour avoir la distance de deux points M et M', on imaginera, comme précédemment, par le point M des axes parallèles aux premiers, et l'on obtiendra la formule

$$(13) \qquad l=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+2(x'-x)(y'-y)\cos\theta}.$$

37. On a souvent besoin des coordonnées du point qui partage dans un rapport donné la droite qui joint deux points donnés. Lorsque plusieurs segments sont situés sur une même droite, on appelle *sens* d'un segment MM' le sens dans lequel marche un mobile partant du premier point M et allant vers le second M'. La valeur algébrique du rapport de deux segments est alors la valeur absolue de ce rapport, précédée du signe + ou du signe —, suivant que les deux segments sont dirigés ou non dans le même sens.

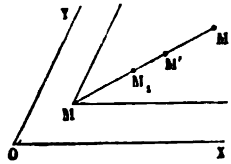


Fig. 40.

Ainsi, dans la figure (40), le rapport $\frac{MM_1}{M'M_2}$ est positif, les rapports $\frac{MM_1}{M_2M'}$, $\frac{M_1M}{M_1M'}$ sont négatifs.

Étant donnés, sur une droite indéfinie, deux points M et M' ayant pour coordonnées $x$ et $y$, $x'$ et $y'$, cherchons sur cette droite un point $M_1$ de coordonnées $x_1$ et $y_1$, tel que le rapport $\frac{M_1M}{M_1M'}$ ait une valeur donnée en grandeur et en signe $\frac{m'}{m}$. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point $M_1$, les coordonnées nouvelles du point M et du point M' seront $x-x_1$ et $y-y_1$, $x'-x_1$ et $y'-y_1$. Lorsque le rapport donné $\frac{m'}{m}$ est négatif, le point cherché $M_1$ doit se trouver entre M et M'; c'est le cas de la figure. Les différences $x-x_1$ et $x'-x_1$ ou $y-y_1$ et $y'-y_1$ sont de signes contraires; leur rapport est négatif et la valeur absolue de ce rapport est égale à la valeur absolue de $\frac{M_1M}{M_1M'}$ ou de $\frac{m'}{m}$. On a donc, en grandeur et en signe,

$$(14) \qquad \frac{x-x_1}{x'-x_1}=\frac{y-y_1}{y'-y_1}=\frac{m'}{m}.$$

Lorsque $\frac{m'}{m}$ est positif, le point cherché $M_1$ se trouve en dehors du segment MM'; les différences $x-x_1$ et $x'-x_1$ ou $y-y_1$ et $y'-y_1$ sont de mêmes signes; leur rapport est

positif et égal au rapport $\frac{M_1M}{M_1M'}$ ou à $\frac{m'}{m}$. Donc les équations (14) conviennent aussi à ce cas. On en tire les formules suivantes qui résolvent la question pour toutes les valeurs du rapport $\frac{m'}{m}$

$$x_1 = \frac{mx - m'x'}{m - m'}, \quad y_1 = \frac{my - m'y'}{m - m'}.$$

*Remarque.* Considérons le point $M_2$ dont les coordonnées $x_2$ et $y_2$ se déduisent des précédentes par le changement de signe de $m'$

$$x_2 = \frac{mx + m'x'}{m + m'}, \quad y_2 = \frac{my + m'y'}{m + m'}.$$

Ce point sera tel que l'on ait

$$\frac{M_1M}{M_1M'} = -\frac{M_2M}{M_2M'} = \frac{m'}{m};$$

on dit que ces points $M_1$ et $M_2$, correspondant à des valeurs égales et de signes contraires du rapport $\frac{m'}{m}$, sont *conjugués harmoniques* par rapport au segment MM'. Lorsque le rapport donné $\frac{m'}{m}$ est égal à $-1$, le point $M_1$ devient le milieu du segment MM' et a pour coordonnées

$$x_1 = \frac{x + x'}{2}, \quad y_1 = \frac{y + y'}{2};$$

le point $M_2$ s'éloigne à l'infini.

Si l'on pose $\frac{m'}{m} = -\lambda$, on voit que les deux points conjugués $M_1$ et $M_2$ ont pour coordonnées

$$x_1 = \frac{x + \lambda x'}{1 + \lambda}, \quad y_1 = \frac{y + \lambda y'}{1 + \lambda};$$

$$x_2 = \frac{x - \lambda x'}{1 - \lambda}, \quad y_2 = \frac{y - \lambda y'}{1 - \lambda}.$$

### CLASSIFICATION DES LIGNES PLANES.

**38.** On emploie surtout les coordonnées rectilignes pour l'étude des propriétés générales des lignes planes. Dans ce système, on classe les lignes de la manière suivante : on les distingue d'abord en *algébriques* et *transcendantes*, suivant

que les équations qui les représentent sont algébriques ou transcendantes. Une équation est dite algébrique lorsque les coordonnées $x$ et $y$ n'y entrent qu'affectées des signes d'opérations algébriques. Mais, si l'une des coordonnées entre sous un signe transcendant, comme un sinus, un logarithme, etc., l'équation est dite transcendante. On peut toujours mettre les équations algébriques sous la forme entière, en faisant disparaître les radicaux et les dénominateurs.

On classe ensuite les lignes algébriques d'après le degré de leurs équations. Les lignes du premier degré sont celles qui sont représentées par des équations du premier degré en $x$ et $y$; l'équation du second degré donne les lignes du second degré, etc.

Il est aisé de voir que le degré d'une ligne reste le même, quelle que soit la position des axes des coordonnées dans le plan. En effet, soit $f(x,y) = 0$ l'équation d'une ligne rapportée à de certains axes OX et OY, $m$ le degré de cette équation supposée entière (dans l'évaluation du degré, on ne tient compte que des coordonnées $x$ et $y$). Pour rapporter cette ligne à d'autres axes O'X' et O'Y', on substituera à $x$ et $y$ dans l'équation les valeurs données par les formules de transformation (8); ces formules étant du premier degré par rapport aux coordonnées $x'$ et $y'$, il est impossible que l'équation en $x'$ et $y'$ soit d'un degré supérieur à $m$. Elle ne sera pas non plus d'un degré moindre; car alors la transformation inverse élèverait le degré, ce qui est impossible. Ainsi, la nouvelle équation est du même degré que l'équation primitive.

Le degré d'une ligne indique en combien de points au plus la ligne peut être coupée par une droite. En effet, soit $m$ le degré d'une ligne, $f(x, y) = 0$ l'équation qui la représente lorsqu'on prend la droite pour axe des $x$; si dans cette équation on fait $y = 0$, l'équation en $x$ ainsi obtenue donnera les abscisses des points du lieu qui ont une ordonnée nulle, c'est-à-dire les points communs à ce lieu et à l'axe des $x$. Quand le premier membre de l'équation n'est pas identiquement nul, comme il est au plus du degré $m$, l'équation n'a pas plus de $m$ racines, et, par conséquent, la droite a au plus $m$ points communs avec la ligne. Si l'équation était vérifiée par plus

de $m$ valeurs de $x$, le premier membre serait identiquement nul, et, par conséquent, la droite entière ferait partie du lieu; dans ce cas, le polynôme $f(x, y)$ devenant identiquement nul, quand on y fait $y = 0$, contiendrait $y$ en facteur et l'équation $f(x, y) = 0$ se décomposerait en deux, l'une $y = 0$ du premier degré, l'autre du degré $m - 1$.

D'après cela, les lignes du premier degré, ne pouvant être coupées par une droite en plus d'un point, sont des lignes droites. Les lignes du second degré ne peuvent être coupées par une droite en plus de deux points; celles du troisième degré en plus de trois points. Le cercle, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont des courbes du second degré (nos 10, 13, 15, 18); ces courbes peuvent être coupées en deux points par des droites. La cissoïde et la strophoïde (nos 21 et 24) sont du troisième degré; ces courbes peuvent être coupées en trois points par des droites. Le limaçon de Pascal (no 27) est du quatrième degré, la rosace à quatre branches (no 30) du sixième degré.

Nous étudierons d'abord les lignes du premier degré, puis celles du second degré, et ensuite les lignes d'un degré quelconque.

Quand on dit qu'une équation algébrique et entière du degré $m$ représente une courbe du degré $m$, on suppose que le premier membre n'est pas décomposable en un produit de facteurs entiers; autrement l'équation représenterait deux ou un plus grand nombre de lignes d'ordres inférieurs. Ainsi, par exemple, une équation du second degré, dont le premier membre est le produit de deux facteurs entiers du premier degré, représente deux lignes du premier degré, c'est-à-dire deux droites. De même, une équation du troisième degré peut représenter trois droites, ou une ligne du second degré avec une ligne droite. C'est pourquoi certaines propriétés des lignes de l'ordre $m$ s'appliquent au système de $m$ droites, c'est-à-dire au polygone de $m$ côtés. Ainsi nous verrons que des propriétés des courbes du second degré s'appliquent au système de deux droites, parce que ce système peut être considéré comme un lieu du second degré.

# LIVRE II

## LIGNE DROITE ET CERCLE

---

## CHAPITRE PREMIER

### Ligne droite.

#### CONSTRUCTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ.

**59.** L'équation générale du premier degré entre les deux variables $x$ et $y$ est de la forme

(1) $$Ax + By + C = 0.$$

Nous avons déjà fait remarquer que la ligne représentée par cette équation, ne pouvant être coupée par une droite en plus d'un point, est nécessairement droite. Mais il est bon de démontrer directement que cette équation représente une ligne droite.

Il est impossible que les deux coefficients A et B des variables soient nuls à la fois; car alors il faudrait que l'on eût $C = 0$, et l'équation se réduirait à une identité. Mais il peut arriver que l'un des coefficients soit nul; si, par exemple, le coefficient A est nul, l'équation se réduit à la forme $By + C = 0$ ou $y = b$. Cette équation représente le lieu d'un point M dont l'ordonnée est constante et égale à $b$, quelle que soit l'abscisse; c'est une droite G'G parallèle à l'axe OX (fig. 41); on l'obtient en portant sur l'axe OY, à partir de l'origine, une longueur OB égale à la valeur absolue de $b$, dans un sens ou dans l'autre suivant le signe de $b$, et menant par le point B une parallèle G'G à l'axe OX. En particulier, l'équation $y = 0$ représente l'axe OX lui-même.

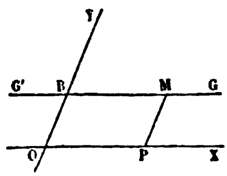


Fig. 41.

Lorsque le coefficient B est nul, l'équation se réduit à

$Ax + C = 0$, ou $x = a$. Cette équation représente le lieu du point M dont l'abscisse est constante et égale à $a$, quelle que soit l'ordonnée; c'est une droite H'H parallèle à l'axe OY (fig. 42); on l'obtient en portant sur l'axe OX, à partir de l'origine, une longueur OA égale à la valeur absolue de $a$, dans un sens ou dans l'autre suivant le signe de $a$, et menant par le point A une parallèle H'H à l'axe OY. En particulier, l'équation $x = 0$ représente l'axe OY.

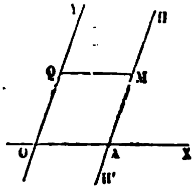


Fig. 42.

Lorsque le coefficient B n'est pas nul, on peut diviser tous les termes par B et mettre l'équation sous la forme

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

ou

$$(2) \qquad y = ax + b,$$

en posant, pour abréger, $a = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Considérons d'abord le cas particulier où $b = 0$, ce qui réduit l'équation à la forme

$$y = ax, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = a.$$

Si $a$ est un nombre positif, tous les points du lieu, ayant leurs coordonnées de même signe, se trouvent dans l'angle YOX, ou dans son opposé par le sommet Y'OX' (fig. 43). Prenons une abscisse quelconque OP, et par le point P menons une parallèle à l'axe des $y$; on pourra, sur cette parallèle, trouver un point M tel que l'on ait $\frac{MP}{OP} = a$, le point M sera un point du lieu.

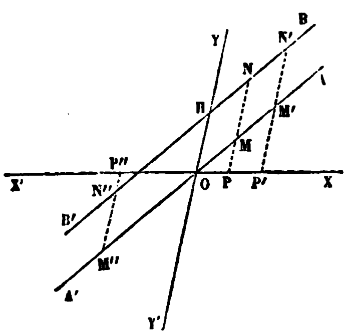


Fig. 43.

Soient M, M', M'',... divers points du lieu construits de cette façon; des rapports égaux

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-M''P''}{-OP''} = \cdots = a,$$

il résulte que les triangles OPM, OP'M', OP''M'',... sont semblables, et que, par suite, les angles MOP, M'OP', M''OP'',... sont égaux : donc les points M, M', M'',... sont tous placés sur une même droite A'A passant par l'origine. Si l'on fait varier $x$ d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, le point M se meut d'un mouvement continu et décrit la droite indéfinie A'A.

Lorsque $a$ est négatif, tous les points du lieu, ayant leurs coordonnées de signes contraires, sont situés dans les angles YOX' et Y'OX (fig. 44). Soient M, M', M'',... différents points du lieu; des relations

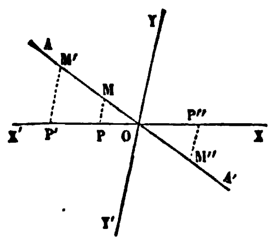


Fig. 44.

$$\frac{MP}{-OP}=\frac{M'P'}{-OP'}=\frac{-M''P''}{OP''}=\ldots=a,$$

on conclut, comme précédemment, que tous ces points sont sur une même droite A'A passant par l'origine. Ainsi, dans tous les cas, l'équation $y=ax$ représente une ligne droite A'A passant par l'origine.

Revenons maintenant à l'équation $y=ax+b$. Si l'on compare les deux équations $y=ax+b$, $y=ax$, on voit que les ordonnées correspondantes à une même abscisse diffèrent d'une quantité constante $b$; on augmentera donc ou l'on diminuera, suivant le signe de $b$, les ordonnées de tous les points de la droite A'A de longueurs MN, M'N', M''N'',... égales à la valeur absolue de $b$ (fig. 43); les points N, N', N'',... ainsi obtenus forment évidemment une droite B'B parallèle à A'A.

Il résulte de ce qui précède que *toute équation du premier degré entre les deux variables* x *et* y *représente une ligne droite.*

**60.** Nous ferons voir que, réciproquement, toute ligne droite est représentée par une équation du premier degré. Si la droite est parallèle à l'axe OX, comme tous ses points ont même ordonnée, son équation est de la forme $y=b$ (fig. 41). Si elle est parallèle à l'axe OY, tous ses points ayant même abscisse, son équation est de la forme $x=a$ (fig. 42). Si la droite passe par l'origine, elle occupe l'une des deux posi-

tions indiquées dans les figures 43 et 44, et les triangles semblables donnent

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{M'P'}}{\mathrm{OP'}}=\frac{-\mathrm{M''P''}}{-\mathrm{OP''}}=\ldots,$$

ou

$$\frac{\mathrm{MP}}{-\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{MP'}}{-\mathrm{OP'}}=\frac{-\mathrm{M''P''}}{\mathrm{OP''}}=\ldots.$$

Si l'on appelle $a$ ce rapport constant, l'équation de la droite est $\frac{y}{x}=a$ ou $y=ax$. Supposons enfin que la droite, sans être parallèle à l'un des axes, ne passe pas par l'origine (fig. 43); d'après ce qui précède, une parallèle à cette droite menée par l'origine aura pour équation $y=ax$; or l'excès de l'ordonnée de la droite proposée sur l'ordonnée correspondante de la parallèle est une quantité constante $b$; donc la droite proposée a pour équation $y=ax+b$.

### SIGNIFICATION DES COEFFICIENTS.

**61.** L'équation de toute droite non parallèle à l'axe des $y$ peut être mise sous la forme

$$y=ax+b.$$

La constante $b$ est l'ordonnée du point H (fig. 43) où la droite coupe l'axe des $y$; on l'appelle *ordonnée à l'origine*.

La constante $a$ ne dépend que de la direction de la droite; elle est la même pour toutes les droites parallèles; on l'appelle *coefficient angulaire* ou *de direction*. Menons par l'origine une demi-droite OA parallèle à la droite proposée et située par rapport à l'axe X'X du même côté que la demi-droite OY. Appelons $\theta$ l'angle des axes, $\alpha$ l'angle de OA avec OX, angle qui peut varier de o à $\pi$; on a, dans la disposition de la figure 43,

$$a=\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}=\frac{\sin \mathrm{MOP}}{\sin \mathrm{OMP}}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},$$

et, dans celle de la figure 44,

$$a=\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{MP}}{-\mathrm{OP}}=\frac{\sin \mathrm{MOP}}{-\sin \mathrm{OMP}}=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{-\sin(\alpha-\theta)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)};$$

on a donc, dans tous les cas,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}=a. \tag{3}$$

Quand les axes sont rectangulaires, cette relation se réduit à

$$\operatorname{tang}\alpha=a, \tag{4}$$

et détermine l'angle $\alpha$ que fait avec l'axe OX la direction OA.

Quand les axes sont obliques, de la relation (3) on déduit la formule

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta}. \tag{5}$$

Cette formule n'étant pas calculable par logarithmes, pour obtenir l'angle $\alpha$ au moyen des tables, on transforme l'équation (3) de la manière suivante. On a

$$\frac{a-1}{a+1}=\frac{\sin\alpha-\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha+\sin(\theta-\alpha)}=\frac{\operatorname{tang}\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}.$$

d'où

$$\operatorname{tang}\left(\alpha-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{a-1}{a+1}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}. \tag{6}$$

**82.** Lorsqu'on veut construire la droite représentée par une équation du premier degré, à coefficients numériques, on cherche ordinairement les points où elle coupe les axes, et on fait passer une droite par ces deux points.

Soit, par exemple, l'équation $2x-3y=5$ ; pour $y=0$, on a $x=\frac{5}{2}$; pour $x=0$, $y=-\frac{5}{3}$; on portera, à partir de l'origine, sur l'axe des $x$ la longueur $\frac{5}{2}$ dans la direction OX, sur l'axe des $y$ la longueur $\frac{5}{3}$ dans la direction OY'.

Quand l'équation ne renferme pas de terme constant, la droite passe par l'origine. On en détermine un second point, en donnant à $x$ une valeur particulière ; soit, par exemple, l'équation $2y+3x=0$; l'équation étant vérifiée pour $x=0$, $y=0$, la droite passe par l'origine; si l'on fait $x=2$, on a $y=-3$ ; on construira le point qui a pour coordonnées $x=2$, $y=-3$, et on le joindra à l'origine.

**63.** L'équation générale de la ligne droite

$$Ax + By + C = 0$$

renferme deux coefficients ou *paramètres* arbitraires ; car on peut diviser l'équation par l'un des coefficients, et il restera les rapports des deux autres coefficients à celui par lequel on a divisé. Quand on met l'équation sous la forme $y = ax + b$, ces deux paramètres sont $a$ et $b$. Pour fixer la position de la ligne droite dans le plan, il faudra donner les valeurs des deux paramètres, ou deux relations entre ces paramètres servant à déterminer leurs valeurs.

**64.** PROBLÈME I. *Trouver l'équation générale des droites qui passent par un point donné.*

Appelons $x'$ et $y'$ les coordonnées du point donné M. L'équation d'une droite quelconque est

$$y = ax + b.$$

Pour que cette droite passe par le point M, il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation de la droite ; si donc on remplace les coordonnées variables $x$ et $y$ par les coordonnées $x'$ et $y'$ du point M, on aura l'équation de condition

$$y' = ax' + b.$$

Cette relation entre les deux paramètres $a$ et $b$ détermine l'un d'eux en fonction de l'autre, par exemple le paramètre $b$ en fonction de $a$ ; en remplaçant $b$ dans l'équation de la droite par sa valeur $y' - ax'$ tirée de l'équation de condition, on obtient l'équation

$$(7) \qquad y - y' = a(x - x').$$

L'équation (7), dans laquelle le coefficient angulaire $a$ est arbitraire, représente toutes les droites qui passent par le point M. Quand on fait varier le paramètre $a$, la droite tourne autour du point M.

Nous avons supposé que toute droite est représentée par une équation de la forme $y = ax + b$, quelle que soit sa position dans le plan. Mais il y a une exception, c'est lorsque

la droite est parallèle à l'axe des $y$; car, dans ce cas, le coefficient angulaire $a$ est infini, ainsi que l'ordonnée à l'origine $b$. Cependant, si dans l'équation (7) on remplace $a$ par le rapport $\frac{m}{n}$, qu'on mette l'équation sous la forme

$$n(y-y')=m(x-x'),$$

et qu'on fasse ensuite $n=0$, on obtient l'équation $x=x'$, qui représente la parallèle à l'axe des $y$, menée par le point M.

**65.** Problème II. *Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Soit $y=ax+b$ l'équation de la droite donnée AB, $x'$ et $y'$ les coordonnées du point donné M (fig. 45). La droite demandée devant passer par le point donné, son équation, comme nous l'avons dit, sera de la forme

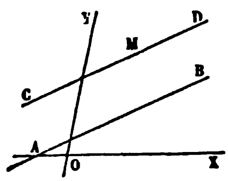


Fig. 45.

$$y-y'=a'(x-x').$$

Cette droite devant être parallèle à la droite AB, son coefficient angulaire $a'$ sera égal au coefficient angulaire $a$ de la droite AB; on aura donc $a'=a$, et la parallèle demandée CD sera représentée par l'équation

$$y-y'=a(x-x').$$

**66.** Problème III. *Mener une droite par deux points donnés.*

Soient M et M' (fig. 46) les deux points donnés, $x'$ et $y'$ les coordonnées du point M, $x''$ et $y''$ celles du point M'. La droite MM', passant par le point M, est représentée par une équation de la forme

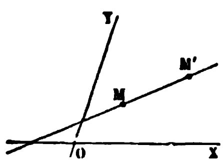


Fig. 46.

$$(7)\qquad y-y'=a(x-x');$$

il s'agit de déterminer le coefficient $a$, de manière que cette droite passe aussi par le point M'. Il faut pour cela que les coordonnées du point M' vérifient l'équation (7), ce qui donne la relation

$$y''-y'=a(x''-x'),$$

d'où l'on déduit

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}.$$

Ainsi, le coefficient angulaire de la droite MM' est égal au rapport de la différence des ordonnées à la différence des abscisses des deux points donnés. Si dans l'équation (7) on remplace $a$ par sa valeur, on obtient l'équation de la droite MM',

$$(8) \qquad y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'),$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}.$$

Lorsque le point M est à l'origine, on a $x' = 0$, $y' = 0$, et l'équation (8) se réduit à

$$y = \frac{y''}{x''}x.$$

**67.** Il arrive souvent que la droite est définie par les points A et B où elle coupe les axes (fig. 47); appelons $a$ l'abscisse du premier point, $b$ l'ordonnée du second, et soit

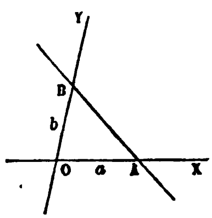


Fig. 47.

$$Ax + By + C = 0$$

l'équation de la droite cherchée. Si l'on y fait successivement $y = 0$ et $x = 0$, on obtient les points où la droite coupe les axes; on a ainsi $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$; d'où $A = -\frac{C}{a}$, $B = -\frac{C}{b}$. En remplaçant A et B par leurs valeurs, on met l'équation sous la forme simple

$$(9) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

**68.** Problème IV. *Trouver le point d'intersection de deux droites données.*

Soient

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

les équations de deux droites données AB et CD (fig. 48), M le point d'intersection de ces deux droites. Le point M appartenant à chacune des droites, ses coordonnées vérifient à la fois les deux équations; si donc on résout ces deux équations simultanées à deux inconnues $x$ et $y$, on obtiendra les coordonnées du point M,

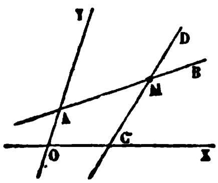


Fig. 48.

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

Quand le dénominateur $AB' - BA'$ est différent de zéro, les formules donnent pour $x$ et $y$ des valeurs finies et déterminées, et les deux droites se coupent effectivement en un point M. Mais quand le dénominateur $AB' - BA'$ est nul, sans que les numérateurs le soient, on obtient pour $x$ et $y$ des valeurs infinies; ceci indique que les deux droites proposées sont parallèles; et, en effet, dans ce cas, elles ont leurs coefficients angulaires égaux $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$. Si l'on a à la fois $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$, les deux numérateurs sont nuls en même temps que les dénominateurs, et les valeurs de $x$ et de $y$ se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; il y a indétermination, et, en effet, les deux droites proposées coïncident; car, si l'on pose $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = k$, d'où $A' = Ak$, $B' = Bk$, $C' = Ck$, que l'on remplace dans la seconde équation, et que l'on divise par $k$, cette équation devient identique à la première.

**69.** Problème V. *Trouver l'équation générale des droites qui passent par le point d'intersection de deux droites données.*

Soient

$$Ax + By + C = 0, \tag{10}$$
$$A'x + B'y + C' = 0, \tag{11}$$

les équations des deux droites données. On pourrait traiter la question en cherchant les coordonnées du point d'intersection des deux droites par la résolution des équations (10) et (11); on

ferait ensuite passer une droite quelconque par ce point (nº 64). Mais on arrive au même résultat par une marche plus rapide.

Si l'on ajoute membre à membre les deux équations (10) et (11), après avoir multiplié l'une d'elles par une quantité arbitraire $\lambda$, on obtient une équation du premier degré

$$(12) \qquad (Ax+By+C)+\lambda(A'x+B'y+C')=0,$$

qui représente une troisième droite passant par le point d'intersection des deux premières; et, en effet, les coordonnées de ce point, vérifiant à la fois les deux équations (10) et (11), annulent les deux quantités placées entre parenthèses, et, par conséquent, satisfont à l'équation (12). Cette équation (12), dans laquelle le coefficient $\lambda$ est arbitraire, représente toutes les droites qui passent par le point d'intersection des deux droites données; car on peut déterminer ce coefficient de manière que la droite passe par un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées $x'$ et $y'$; il suffit pour cela que l'équation de condition

$$(Ax'+By'+C)+\lambda(A'x'+B'y'+C')=0$$

soit vérifiée, ce qui donne

$$(13) \qquad \lambda=-\frac{Ax'+By'+C}{A'x'+B'y'+C'}.$$

Quand on fait $\lambda=0$, l'équation (12) devient $Ax+By+C=0$; c'est la première droite. Si l'on remplace $\lambda$ par $\frac{m}{n}$, et qu'après avoir multiplié par $n$, on fasse $n=0$, on a la seconde droite $A'x+B'y+C'=0$.

Si, dans l'équation (12), on remplace $\lambda$ par la valeur (13), on obtient l'équation

$$(14) \qquad \frac{Ax+By+C}{Ax'+By'+C}=\frac{A'x+B'y+C'}{A'x'+B'y'+C'},$$

qui représente la droite passant par le point M et le point d'intersection des deux droites données. Les numérateurs sont les premiers membres des équations des deux droites données, les dénominateurs les valeurs de ces polynômes, quand on y remplace $x$ et $y$ par les coordonnées du point donné. On reconnaît immédiatement, à l'inspection de cette équation, que la droite

qu'elle représente passe par le point donné et par le point d'intersection des deux droites données.

Lorsque les deux droites (10) et (11) sont parallèles, l'équation (12) représente toutes les droites parallèles à celles-là.

Une équation du premier degré en $x$ et $y$, qui contient un paramètre arbitraire $\lambda$, représente une infinité de droites; lorsque ce paramètre n'entre qu'au premier degré dans l'équation, on peut mettre l'équation sous la forme (12); on voit alors que toutes les droites passent par un même point, le point d'intersection des droites (10) et (11).

Remarque. Étant données quatre droites concourantes $d, d', d_1$ et $d_2$ on dit que les droites $d_1$ et $d_2$ sont *conjuguées harmoniques* par rapport aux droites $d$ et $d'$, lorsque les deux points où une sécante coupe les droites $d_1$ et $d_2$ sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points où elle coupe $d$ et $d'$ (n° 57). On voit alors facilement que les deux droites $d_1$ et $d_2$ ayant pour équations :

$$(d_1)\quad Ax+By+C+\lambda(A'x+B'y+C')=0$$

$$(d_2)\quad Ax+By+C-\lambda(A'x+B'y+C')=0$$

sont *conjuguées harmoniques* par rapport aux droites données (10) et (11). En effet, coupons les trois droites (10) (11) et (12) par une sécante ayant pour équation $y=mx+n$ et rencontrant ces droites en des points M, M' et $M_1$.

Les abscisses $x, x'$ et $x_1$ de ces trois points sont :

$$x=-\frac{Bn+C}{A+Bm},\quad x'=-\frac{B'n+C'}{A'+B'm},\quad x_1=-\frac{Bn+C+\lambda(B'n+C')}{A+Bm+\lambda(A'+B'm)},$$

et, d'après les formules du (n° 57), on a, en grandeur et en signe,

$$\frac{M_1M}{M_1M'}=\frac{x-x_1}{x'-x_1}=-\lambda\frac{A'+B'm}{A+Bm}.$$

On aura de même, en appelant $M_2$ le point où la même sécante coupe la droite $d_2$

$$\frac{M_2M}{M_2M'}=\lambda\frac{A'+B'm}{A+Bm},$$

comme on le voit immédiatement en changeant $\lambda$ en $-\lambda$. Donc enfin

$$\frac{M_1M}{M_1M'} = -\frac{M_2M}{M_2M'};$$

ce qui montre que les points $M_1M_2$ sont conjugués harmoniques par rapport aux points M,M′ (n° 57).

**70.** Problème VI. *Reconnaître si trois droites passent par un même point.*

Soient

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \\ A''x + B''y + C'' &= 0, \end{aligned}$$

les équations des trois droites données. On cherchera le point d'intersection des deux premières droites, et l'on substituera les coordonnées de ce point dans la troisième équation.

La condition qui exprime que les droites ont un point commun s'obtient en égalant à zéro le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix}$$

Si ce déterminant est nul, les trois droites sont concourantes ou parallèles; elles sont parallèles lorsque les trois mineurs,

$$AB' - BA', \quad A'B'' - B'A'', \quad A''B - B''A$$

sont *nuls tous trois*, concourantes dans le cas contraire.

Autrement : l'équation générale des droites qui passent par le point d'intersection des deux premières est

$$(A + \lambda A')x + (B + \lambda B')y + (C + \lambda C') = 0.$$

Si les droites ont un point commun, en attribuant au paramètre $\lambda$ une valeur convenable, cette équation représentera la troisième droite; on doit avoir les deux relations

$$\frac{A + \lambda A'}{A''} = \frac{B + \lambda B'}{B''} = \frac{C + \lambda C'}{C''}.$$

L'élimination de $\lambda$ donne la condition déjà obtenue.

71. **Exemple.** Considérons les trois médianes d'un triangle OAB (fig. 49); prenons le sommet O pour origine, les deux côtés OA et OB pour axes des coordonnées, et désignons par $a$ et $b$ les deux longueurs OA et OB. La médiane AE, coupant les axes à des distances $a$ et $\frac{b}{2}$ de l'origine, a pour équation

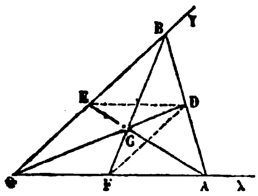


Fig. 49.

$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}=1;$$

de même, la médiane BF a pour équation

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Le point D, milieu de AB, a pour coordonnées $OF=\frac{a}{2}$, $OE=\frac{b}{2}$; la droite OD, qui va de l'origine à ce point, est représentée par l'équation

$$y=\frac{b}{a}x.$$

En résolvant les deux premières équations, on obtient les coordonnées $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$, du point d'intersection G des deux premières médianes AE et BF. Ces coordonnées vérifiant la troisième équation, on en conclut que la troisième médiane passe aussi par le point G.

En appliquant la second méthode, on reconnait immédiatement que les trois médianes passent par un même point; car, si l'on retranche les deux premières équations membre à membre, on obtient la troisième.

72. **Problème VII.** *Reconnaître si trois points sont en ligne droite.*

Soient $x'$ et $y'$, $x''$ et $y''$, $x'''$ et $y'''$ les coordonnées des trois points donnés M′, M″, M‴. Si les points sont en ligne droite, les couples précédents vérifient une équation de la forme $Ax+By+C=0$, et le déterminant

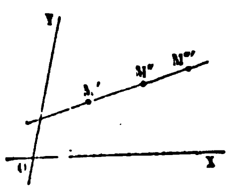


Fig. 50.

$$D=\begin{vmatrix} x', & y', & 1 \\ x'', & y'', & 1 \\ x''', & y''', & 1 \end{vmatrix}$$

est nul.

Autrement. Les droites M′M″, M′M‴ coïncident, leurs coefficients angulaires sont égaux,

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{y'''-y'}{x'''-x'}.$$

**73. Exemple.** Si l'on prolonge les quatre côtés d'un quadrilatère OACB (fig. 51), on forme ce qu'on appelle un quadrilatère complet; les côtés se coupent deux à deux en six points ou sommets; en joignant les sommets opposés, on obtient trois diagonales AB, A'B', OC; nous allons démontrer que les trois points D, E, F, qui divisent ces diagonales en deux parties égales, sont en lignes droites.

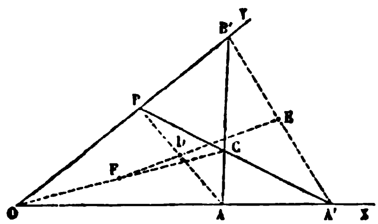


Fig. 51.

Prenons les côtés OA et OB pour axes des coordonnées ; désignons par $a$ et $a'$ les abscisses des points A et A', par $b$ et $b'$ les ordonnées des points B et B'. Le point D, milieu de AB, a pour coordonnées $x' = \frac{a}{2}$, $y' = \frac{b}{2}$. Le point E, milieu de A'B', a pour coordonnées $x'' = \frac{a'}{2}$, $y'' = \frac{b'}{2}$. Pour avoir les coordonnées du point F, milieu de OC, cherchons celles du point C, intersection des deux droites AB', A'B, qui ont pour équations

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1 \quad , \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

En résolvant ces deux équations simultanées, on obtient les coordonnées du point C,

$$x = \frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'} \quad , \quad y = \frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}.$$

Le point F étant le milieu de la droite OC, ses coordonnées $x'''$, $y'''$ sont les moitiés de celles du point C; on a donc

$$x''' = \frac{aa'(b-b')}{2(ab-a'b')} \quad , \quad y''' = \frac{bb'(a-a')}{2(ab-a'b')}.$$

Ayant les coordonnées des points D, E, F, on reconnaît aisément que les trois points sont en ligne droite. Les droites DE et DF ont pour coefficients angulaires

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{b'-b}{a'-a} \quad , \quad \frac{y'''-y'}{x'''-x'} = \frac{\dfrac{bb'(a-a')}{ab-a'b'} - b}{\dfrac{aa'(b-b')}{ab-a'b'} - a} = \frac{b'-b}{a'-a};$$

ces deux coefficients angulaires étant égaux entre eux, on en conclut que les trois points D, E, F sont en ligne droite.

**74.** PROBLÈME VIII. *Trouver l'angle de deux droites.*

Soient $y = ax + b$, $y = a'x + b'$, les équations des deux droites données. Par l'origine, et du côté de l'axe X'X où se trouve OY, menons des demi-droites OA et OA' parallèles aux droites données (fig. 52); appelons $\alpha$ et $\alpha'$ les angles que font ces directions avec OX, V l'angle qu'elles font entre elles, et, pour préciser, supposons $\alpha' > \alpha$. On a évidemment $V = \alpha' - \alpha$, d'où

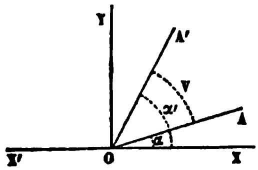


Fig. 52.

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'}.$$

Quand les axes sont rectangulaires, on sait que

$$\operatorname{tang}\alpha = a \;,\; \operatorname{tang}\alpha' = a';$$

si l'on substitue dans la formule précédente, il vient

$$(16) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Quand les axes sont obliques, on a (n° 61) :

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta} \;,\; \operatorname{tang}\alpha' = \frac{a' \sin\theta}{1 + a'\cos\theta},$$

et, par suite,

$$(17) \qquad \operatorname{tang} V = \frac{(a' - a)\sin\theta}{1 + aa' + (a + a')\cos\theta}.$$

De ces formules, on déduit la relation qui existe entre les coefficients angulaires de deux droites perpendiculaires entre elles. En effet, quand l'angle V est droit, sa tangente devenant infinie, on a, si les axes sont rectangulaires,

$$(18) \qquad 1 + aa' = 0,$$

et, si les axes sont obliques,

$$(19) \qquad 1 + aa' + (a + a')\cos\theta = 0.$$

**75.** PROBLÈME IX. *D'un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée, et trouver la longueur de cette perpendiculaire.*

Soient

$$(2) \qquad y = ax + b$$

l'équation de la droite donnée AB, $x'$ et $y'$ les coordonnées du point donné M (fig. 53). Supposons d'abord les axes rectangulaires. Une droite quelconque passant par le point M a une équation de la forme (n° 64)

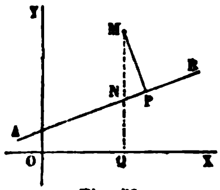


Fig. 53.

$$y-y'=a'(x-x').$$

Pour que cette droite soit perpendiculaire à la droite AB, il faut que la relation $1+aa'=0$ soit vérifiée (n° 74); d'où l'on déduit $a'=-\frac{1}{a}$. En remplaçant $a'$ par sa valeur, on obtient l'équation de la perpendiculaire MP

$$(20) \qquad y-y'=-\frac{1}{a}(x-x').$$

On trouvera les coordonnées $x$ et $y$ du pied P de la perpendiculaire, ou le point d'intersection des deux droites AB et MP, en résolvant les deux équations simultanées (2) et (20); mais il vaut mieux chercher les différences $x-x'$ et $y-y'$, parce que l'expression de la distance ne contient que ces différences (n° 55). L'équation (2) peut être mise sous la forme

$$y-y'=a(x-x')-(y'-ax'-b);$$

si, dans cette équation, on remplace $y-y'$ par sa valeur donnée par l'équation (20), on trouve

$$x-x'=\frac{a(y'-ax'-b)}{1+a^2},$$

et, par suite, en vertu de l'équation (20),

$$y-y'=-\frac{y'-ax'-b}{1+a^2}.$$

En appliquant la formule de la distance de deux points (n° 55), on obtiendra la longueur $l$ de la perpendiculaire MP,

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=\sqrt{\frac{(y'-ax'-b)^2(1+a^2)}{(1+a^2)^2}},$$

d'où $$(21) \qquad l=\pm\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

On choisira le signe de manière à avoir pour $l$ une valeur positive. Il est aisé de voir que le numérateur est positif ou négatif, suivant que le point M est placé, par rapport à la droite AB, du côté des $y$ positives ou du côté des $y$ négatives. En effet, soit N le point où la droite AB est rencontrée par la parallèle à l'axe des $y$ menée par le point M; le point N étant sur la droite AB, l'ordonnée $y_1$ de ce point est égale à $ax'+b$, de sorte que la formule (21) devient

$$l=\pm\frac{y'-y_1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

La différence $y'-y_1$ est positive dans le premier cas, négative dans le second cas.

On aurait pu obtenir immédiatement la longueur de la perpendiculaire sous cette dernière forme, en remarquant que le triangle rectangle MNP donne

$$\text{MP}=\text{MN}\sin\text{MNP}=\pm(y'-y_1)\cos\alpha=\pm\frac{y'-y_1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

**76.** Supposons maintenant les coordonnées obliques; les droites AB et MP seront perpendiculaires si leurs coefficients angulaires $a$ et $a'$ vérifient la relation $1+aa'+(a+a')\cos\theta=0$, d'où l'on déduit $a'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}$. L'équation de la perpendiculaire MP est donc

$$(22)\qquad y-y'=-\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta}(x-x').$$

En résolvant les deux équations simultanées (2) et (22), on obtiendra les coordonnées $x$ et $y$ du point P. Si, comme précédemment, on cherche les différences $x-x'$, $y-y'$, on trouve

$$x-x'=\frac{(y'-ax'-b)(a+\cos\theta)}{1+a^2+2a\cos\theta},$$

$$y-y'=-\frac{(y'-ax'-b)(1+a\cos\theta)}{1+a^2+2a\cos\theta};$$

substituant ces différences dans la formule de la distance de deux points (n° 56)

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+2(x-x')(y-y')\cos\theta},$$

on a

$$l=\frac{\pm(y'-ax'-b)\sqrt{(a+\cos\theta)^2+(1+a\cos\theta)^2-2(a+\cos\theta)(1+a\cos\theta)\cos\theta}}{1+2a\cos\theta+a^2}.$$

En développant les calculs, on remarque que la quantité placée sous le radical contient le facteur $1-\cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta$, et est égale à

$$(1+2a\cos\theta+a^2)\sin^2\theta;$$

il en résulte

$$(23)\qquad l=\pm\frac{(y'-ax'-b)\sin\theta}{\sqrt{1+2a\cos\theta+a^2}}.$$

Le numérateur est positif ou négatif, suivant que le point M est placé, par rapport à la droite AB, du côté des $y$ positives, ou du côté des $y$ négatives. On prendra le signe de manière à avoir pour $l$ une quantité positive.

**77.** Dans ce qui précède, nous avons supposé l'équation de la droite donnée mise sous la forme $y=ax+b$. Si cette équation avait la forme générale

$$(1)\qquad Ax+By+C=0,$$

le coefficient angulaire $a$ de la droite donnée étant égal à $-\frac{A}{B}$, on aurait, dans le cas des coordonnées rectangulaires, $a'=-\frac{1}{a}=\frac{B}{A}$, et la perpendiculaire abaissée du point M serait représentée par l'équation

$$y-y'=\frac{B}{A}(x-x'),$$

ou

$$(24)\qquad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}.$$

La formule (21), dans laquelle on remplace $a$ et $b$ par leurs valeurs $-\frac{A}{B}$, $-\frac{C}{B}$, devient

$$(25)\qquad l=\pm\frac{Ax'+By'+C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Cette formule exprime la distance d'un point à une droite en coordonnées rectangulaires : le numérateur est le premier membre de l'équation de la droite, dans lequel on remplace $x$

et $y$ par les coordonnées du point; le dénominateur est la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de $x$ et de $y$.

Quand les axes sont obliques, on a

$$a' = \frac{B - A\cos\theta}{A - B\cos\theta};$$

l'équation de la perpendiculaire est

$$\frac{x - x'}{A - B\cos\theta} = \frac{y - y'}{B - A\cos\theta}, \tag{26}$$

et la formule (23) devient

$$l = \pm \frac{(Ax' + By' + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}. \tag{27}$$

Il est aisé de reconnaître le signe du numérateur, suivant la position du point M par rapport à la droite AB. Soit N (fig. 53) le point où la parallèle MQ à l'axe des $y$ rencontre la droite AB; imaginons qu'un point mobile, ayant pour coordonnées $x$ et $y$, parcoure cette parallèle, et considérons les valeurs du polynôme $Ax + By + C$ pour les diverses positions du point mobile; quand le point mobile est en N, la valeur du polynôme est nulle. Si le coefficient B est positif, quand on marche dans le sens des $y$ positives, le terme $By$ augmente, et la fonction prend des valeurs positives de plus en plus grandes; quand on marche dans le sens opposé, elle prend des valeurs négatives. C'est le contraire qui a lieu, lorsque B est négatif.

**78.** Problème X. ***Par le point d'intersection de deux droites données, mener une droite perpendiculaire à une droite donnée.***

Soient

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$
$$A''x + B''y + C'' = 0,$$

les équations des trois droites en coordonnées rectangulaires; toute droite passant par le point d'intersection des deux premières est représentée par une équation de la forme

$$(Ax + By + C) + \lambda(A'x + B'y + C') = 0;$$

pour qu'elle soit perpendiculaire à la troisième droite, on doit avoir

$$1+\frac{A''(A+\lambda A')}{B''(B+\lambda B')}=0,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda=-\frac{AA''+BB''}{A'A''+B'B''};$$

en remplaçant $\lambda$ par sa valeur, on obtient l'équation de la droite cherchée

$$(28)\quad (A'A''+B'B'')\,(Ax+By+C)=(A''A+B''B)\,(A'x+B'y+C').$$

**79.** Les trois droites données forment un triangle dont les sommets sont les points d'intersection de ces droites deux à deux; l'équation (28) représente la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets sur le côté opposé. En permutant les accents, on aura les équations des perpendiculaires abaissées de chacun des deux autres sommets sur le côté opposé, savoir :

$$(A''A+B''B)\,(A'x+B'y+C')=(AA'+BB')\,(A''x+B''y+C''),$$
$$(AA'+BB')\,(A''x+B''y+C'')=(A'A''+B'B'')\,(Ax+By+C).$$

En ajoutant les deux premières équations membre à membre, on obtient la troisième. On en conclut (n° 70) que les trois hauteurs d'un triangle passent par un même point.

**80.** PROBLÈME XI. *Trouver le lieu des points également distants de deux points donnés.*

Supposons les axes rectangulaires et soient $x'$ et $y'$, $x''$ et $y''$ les coordonnées des deux points donnés. Si l'on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque du lieu, l'équation du lieu sera

$$(x-x')^2+(y-y')^2=(x-x'')^2+(y-y'')^2,$$

ou plus simplement

$$(29)\quad (x''-x')\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)+(y''-y')\left(y-\frac{y'+y''}{2}\right)=0.$$

Ce lieu est une droite perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les deux points donnés.

**81.** PROBLÈME XII. *Trouver le lieu des points également distants de deux droites données.*

Nous supposons encore les axes rectangulaires; soient

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$

les équations de deux droites données. Si l'on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque du lieu, l'équation du lieu sera

$$(30)\qquad \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

A cause du double signe, cette équation représente deux droites, qui sont les bissectrices des angles formés par les deux droites données.

### ÉQUATION DE LA LIGNE DROITE EN COORDONNÉES POLAIRES.

**82.** Soit O le pôle et OX l'axe polaire. On peut déterminer la position d'une droite AB par la longueur $a$ de la perpendiculaire OD abaissée de l'origine sur cette droite (fig. 54), et par l'angle $\alpha$ que fait cette perpendiculaire avec l'axe polaire, cet angle étant compris entre 0 et $2\pi$. Appelons $\rho$ et $\omega$ les coordonnées d'un point quelconque M de la droite; en projetant le rayon vecteur OM sur la perpendiculaire OD, on a

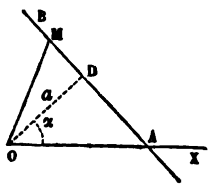


Fig. 54.

$$(31)\qquad \rho\cos(\omega - \alpha) = a; \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{a}{\cos(\omega - \alpha)}.$$

Puisque $a$ et $\alpha$ sont des constantes, cette équation est de la forme

$$(32)\qquad \rho = \frac{C}{A\cos\omega + B\sin\omega}.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une droite; car si l'on revient aux coordonnées rectilignes, en prenant l'axe polaire pour axe des $x$, et une perpendiculaire menée par le pôle pour axe des $y$, à l'aide des formules de transformation $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$, l'équation nouvelle est $Ax + By = C$.

REMARQUE. Si la droite passe par le pôle, son équation est de la forme

$$\omega = C^{te};$$

c'est là un cas limite qu'on peut déduire de l'équation (31) en supposant $a$ nul.

AUTRE FORME DE L'ÉQUATION D'UNE DROITE.

**83.** L'équation (31) développée devient :

$$\rho \cos \omega \cos \alpha + \rho \sin \omega \sin \alpha = a,$$

ou, en coordonnées rectilignes rectangulaires,

$$(33) \qquad x \cos \alpha + y \sin \alpha - a = 0.$$

L'équation de la droite étant mise sous cette forme, le premier membre a une signification géométrique très-simple. Considérons un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées polaires $\rho$ et $\omega$, et pour coordonnées rectilignes $x$ et $y$; de ce point abaissons une perpendiculaire MP sur la droite AB (fig. 55). La projection du rayon vecteur OM sur la droite OD est $\rho \cos(\omega - \alpha)$; mais cette projection est égale à OD, augmentée ou diminuée de la perpendiculaire PM, suivant que le point M et l'origine O sont situés de part et d'autre de la droite ou du même côté; si donc on désigne par $p$ cette perpendiculaire, affectée du signe + dans le premier cas, du signe — dans le second cas, on aura, d'une manière générale,

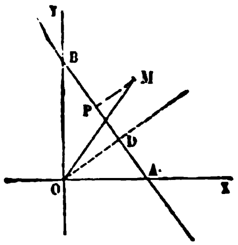


Fig. 55.

$$a + p = \rho \cos(\omega - \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

d'où

$$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha - a.$$

Ainsi, le premier membre de l'équation (33) représente la distance d'un point quelconque du plan, ayant pour coordonnées $x$ et $y$, à la droite définie par cette équation, distance affectée d'un signe convenable.

Il est facile d'en déduire les coordonnées $x_1$ et $y_1$ du pied P de la perpendiculaire; les différences $x - x_1$, $y - y_1$ étant les projections de la droite PM sur les deux axes, on a

$$x - x_1 = p \cos \alpha = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) \cos \alpha,$$
$$y - y_1 = p \sin \alpha = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) \sin \alpha.$$

La forme (33), sous laquelle on peut toujours mettre l'équa-

tion de la droite, est utile dans un grand nombre de questions.

**83.** *bis*. ***Équation d'une droite passant par deux points.***

Soient

$$(\rho_1\ ,\ \omega_1)\quad ,\quad (\rho_2\ ,\ \omega_2)$$

les coordonnées des deux points; l'équation de la droite joignant ces deux points, est

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \frac{1}{\rho_2} & \cos\omega_2 & \sin\omega_2 \end{vmatrix} = 0;$$

en effet, cette équation représente une droite et est évidemment vérifiée par $\rho = \rho_1$ . $\omega = \omega_1$ et $\rho = \rho_2$ , $\omega = \omega_2$.

# CHAPITRE II

## Du Cercle.

84. Cherchons d'abord l'équation de la circonférence en coordonnées rectangulaires. Désignons par $a$ et $b$ les coordonnées du centre C (fig. 56) et par $r$ le rayon; la circonférence, étant le lieu des points dont la distance au centre est égale au rayon, a pour équation

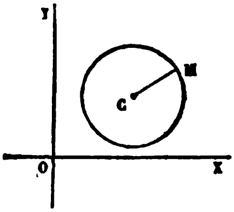


Fig. 56.

$$(1)\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2;$$

cette équation développée se met sous la forme

$$(2)\qquad A(x^2+y^2)+2Dx+2Ey+F=0.$$

Ainsi, *l'équation du cercle, en coordonnées rectangulaires, est une équation du second degré, qui ne renferme pas le rectangle* xy *des variables, et dans laquelle les termes en* $x^2$ *et en* $y^2$ *ont même coefficient.*

85. Réciproquement, toute équation de cette forme, en coordonnées rectangulaires, représente une circonférence de cercle, quand elle représente un lieu. En effet, on peut écrire l'équation (2) de la manière suivante, après avoir divisé par A

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=\frac{D^2+E^2}{A^2}-\frac{F}{A}.$$

Marquons le point C, qui a pour coordonnées $-\frac{D}{A}$ et $-\frac{E}{A}$; le premier membre représente le carré de la distance d'un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées $x$ et $y$, au point C; si le second membre est positif, l'équation sera vérifiée par les coordonnées de tous les points du plan dont la distance au point C est égale à $\sqrt{\frac{D^2+E^2}{A^2}-\frac{F}{A}}$; elle représente donc une

circonférence de cercle. Lorsque le second membre est nul, la distance MC devant être nulle, le point M coïncidera avec le point C, et l'équation ne sera vérifiée que par les coordonnées de ce point; le lieu se réduit donc à un point unique. Enfin, lorsque le second membre est négatif, l'équation ne peut être vérifiée par les coordonnées d'aucun point du plan; car le carré de la distance du point M au point C est une quantité positive; l'équation ne représente donc, dans ce cas, aucun lieu géométrique.

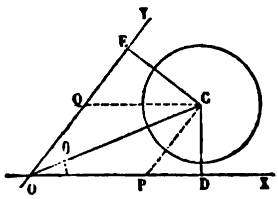


Fig. 57.

**86.** Supposons maintenant les axes des coordonnées obliques, et faisant entre eux l'angle $\theta$ (fig. 57); en exprimant que la distance d'un point quelconque du lieu au centre est égale au rayon, on aura l'équation de la circonférence

$$(3) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta = r^2.$$

Cette équation est de la forme

$$(4) \qquad A(x^2+y^2+2xy\cos\theta)+2Dx+2Ey+F=0.$$

Ainsi, *l'équation du cercle, en coordonnées obliques, est une équation du second degré, dans laquelle les termes en* x², *en* y² *et en* 2xy *cos θ ont les mêmes coefficients.*

En divisant par A, on ramène, comme dans (3), les coefficients de $x^2$, $y^2$, $2xy\cos\theta$ à être égaux à l'unité.

**87.** Réciproquement, toute équation de cette forme représente une circonférence de cercle, quand elle représente un lieu. En effet, on peut déterminer les trois constantes $a$, $b$, $r^2$, de manière à identifier les équations (3) et (4). L'équation (3), développée, devient

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta-2(a+b\cos\theta)x-2(b+a\cos\theta)y \\ +a^2+b^2+2ab\cos\theta-r^2=0.$$

On identifiera cette équation à l'équation (4) en posant

$$a+b\cos\theta=-\frac{D}{A}, \quad b+a\cos\theta=-\frac{E}{A},$$

$$a^2+b^2+2ab\cos\theta-r^2=\frac{F}{A}.$$

Les deux premières relations donnent pour $a$ et $b$ des valeurs finies, puisque le déterminant $1 - \cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta$ est différent de zéro. La troisième donne

$$r^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - \frac{F}{A}\cdot$$

Marquons le point C, qui a pour coordonnées $a$ et $b$. Le premier membre de l'équation (3) représente le carré de la distance d'un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées $x$ et $y$, au point C. Si l'on trouve pour $r^2$ une quantité positive, l'équation sera vérifiée par les coordonnées de tous les points du plan distants du point C de la longueur $r$; elle représente donc une circonférence de cercle. Si l'on trouve pour $r^2$ une quantité nulle, la distance MC devant être nulle, l'équation ne sera vérifiée que par les coordonnées du point C; elle représente un seul point. Enfin, si l'on trouve pour $r^2$ une quantité négative, l'équation n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point du plan.

Au lieu de déterminer le centre C du cercle par ses coordonnées $a$ et $b$, il est plus commode de le déterminer par les projections orthogonales de la droite OC sur les deux axes. Appelons $a'$ et $b'$ ces deux projections OD et OE (fig. 57), affectées de signes convenables, et exprimons que la projection de la droite OC sur l'un ou l'autre axe est égale à celle de la ligne brisée OPC ou OQC; nous aurons

$$a' = a + b\cos\theta \quad , \quad b' = b + a\cos\theta;$$

il en résulte $a' = -\frac{D}{A}$, $b' = -\frac{E}{A}\cdot$ Après avoir porté sur les axes à partir de l'origine les longueurs $a'$ et $b'$, on mènera par les points D et E des perpendiculaires aux axes; l'intersection des deux perpendiculaires déterminera le centre C.

**88.** L'équation d'une circonférence de cercle, comme nous l'avons dit, est

$$(5) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\theta - r^2 = 0.$$

Le premier membre a une signification géométrique qu'il

est bon de remarquer. Considérons un point M du plan ayant pour coordonnées $x$ et $y$; l'expression

$$(x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta$$

représente le carré de la droite MC qui joint le point M au centre (fig. 58); le premier membre de l'équation

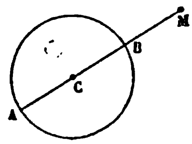


Fig. 58.

est donc égal à $\overline{MC}^2-r^2$, c'est-à-dire au produit des deux facteurs $MC+r$ et $MC-r$, qui sont les deux segments MA et MB du diamètre mené par le point M, segments affectés du même signe ou de signes contraires, suivant qu'ils sont portés dans le même sens, ou dans des sens opposés. Ainsi, le premier membre de l'équation (5) représente le produit des deux segments d'une sécante quelconque menée par le point M, c'est-à-dire la puissance de ce point par rapport au cercle. Quand le point M est extérieur au cercle, ce produit est égal au carré de la tangente.

**89.** PROBLÈME I. *Trouver l'équation de la tangente à une courbe quelconque.*

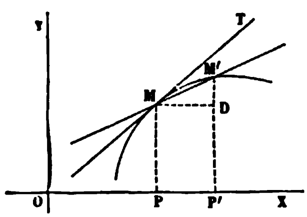


Fig. 59.

Nous avons déjà donné la définition de la tangente en un point M d'une courbe (n° 19). Par le point M et un point voisin M' pris sur la courbe, menons une sécante MM', puis supposons que le point M' se rapproche indéfiniment du point M; la sécante MM' tournera autour du point M et si elle tend vers une direction limite MT, cette droite MT est dite *tangente* à la courbe au point M (fig. 59).

Soient $x$ et $y$ les coordonnées du point de contact M, $x+h$ et $y+k$ celles du point voisin M'; le coefficient angulaire de la sécante MM' est le rapport $\frac{k}{h}$ de la différence des ordonnées des deux points M et M' à la différence de leurs abscisses. Quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, les deux accroissements $h$ et $k$ tendent simultanément vers zéro; nous

n'étudierons que les courbes définies par des équations telles que le rapport $\frac{k}{h}$ tende vers une limite, qui est la dérivée de l'ordonnée considérée comme fonction de l'abscisse.

Si l'équation de la courbe est résolue par rapport à $y$ et mise sous la forme $y = f(x)$, la tangente aura pour coefficient angulaire $y' = f'(x)$. Lorsque l'équation de la courbe $f(x, y) = 0$ n'est pas résolue, on obtient la dérivée $y'$ de la fonction implicite $y$ à l'aide de l'équation $f'_x + y'f'_y = 0$, dans laquelle $f'_x$ et $f'_y$ désignent les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ par rapport à $x$ et par rapport à $y$. On en déduit

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}. \tag{6}$$

Ainsi, si l'on désigne par X et Y les coordonnées d'un point quelconque de la tangente, l'équation de cette droite est

$$Y - y = -\frac{f'_x}{f'_y}(X - x), \quad \text{ou} \quad (X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0. \tag{7}$$

**90.** Problème II. *Trouver l'équation de la tangente au cercle.*

Appliquons la formule précédente au cercle, en supposant les axes rectangulaires et l'origine placée au centre du cercle. Le cercle a pour équation

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{8}$$

Résolue par rapport à $y$, l'équation devient $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; en prenant la dérivée de cette fonction, on a

$$y' = \frac{-x}{\pm\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

En conservant l'équation non résolue et appliquant la formule (6), on obtient la même valeur $y' = -\frac{x}{y}$. Ainsi l'équation de la tangente est

$$Y - y = -\frac{x}{y}(X - x), \quad \text{ou} \quad xX + yY = x^2 + y^2.$$

Puisque le point M est sur le cercle, ses coordonnées vérifient

l'équation du cercle, et l'on a $x^2+y^2=r^2$. L'équation de la tangente se simplifie et devient

(9) $$xX+yY=r^2.$$

Le coefficient angulaire du rayon qui va du centre au point de contact étant $\frac{y}{x}$, on voit que la tangente est perpendiculaire à ce rayon.

**91.** PROBLÈME III. *Mener une tangente au cercle par un point extérieur* P.

Supposons toujours le cercle rapporté à des axes rectangulaires menés par le centre, et représenté par l'équation

(8) $$x^2+y^2=r^2;$$

désignons par $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point donné P (fig. 60).

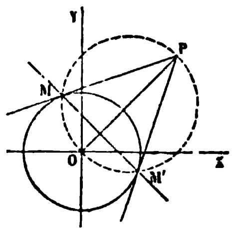


Fig. 60.

Soit MP une tangente menée par ce point; la question revient à déterminer le point de contact M, dont nous appellerons $x$ et $y$ les coordonnées inconnues. Le point M étant sur le cercle, ses coordonnées vérifient l'équation (8). La tangente au point M a pour équation $xX+yY=r^2$. Cette tangente passant par le point P, son équation doit être vérifiée par les coordonnées de ce point, ce qui donne la relation

(10) $$xx_1+yy_1=r^2.$$

En résolvant les deux équations simultanées (8) et (10), on obtiendra les valeurs des inconnues $x$ et $y$.

La résolution des deux équations (8) et (10) revient à la recherche des points d'intersection de deux lignes. La première équation représente le cercle proposé; la seconde une ligne droite. Chercher les valeurs de $x$ et de $y$ qui vérifient à la fois ces deux équations, c'est chercher les points d'intersection de la droite et du cercle. Cette droite coupe le cercle en deux points M et M'; c'est la droite des contacts. On remarque que l'équation (10) de la droite des contacts a même forme que l'équation (9) de la tangente; seulement, les coordonnées

du point de contact sont remplacées par celles du point P.

**92.** On sait que, lorsqu'on a deux équations simultanées

$$A=0,\quad B=0,$$

à deux inconnues $x$ et $y$, si l'on remplace l'une d'elles par l'équation $mA+nB=0$, que l'on obtient en ajoutant membre à membre les deux équations proposées, après les avoir multipliées par des nombres arbitraires $m$ et $n$, on forme un nouveau système d'équations

$$A=0,\quad mA+nB=0,$$

équivalent au système proposé. Cela signifie géométriquement que les points d'intersection des deux lignes représentées par les deux équations proposées sont les mêmes que les points d'intersection de l'une d'elles par la troisième ligne.

Nous avons dit que les points de contact M et M' sont donnés par l'intersection du cercle proposé et de la droite des contacts. En retranchant les deux équations (8) et (10) membre à membre, on obtient la nouvelle équation

$$x^2+y^2-x_1x-y_1y=0,$$

ou

$$\left(x-\frac{x_1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{x_1^2+y_1^2}{4},$$

qui peut remplacer l'équation (10); cette nouvelle équation représente un cercle; le centre, dont les coordonnées sont $\frac{x_1}{2}$ et $\frac{y_1}{2}$, est le milieu de la droite OP; l'équation ne contenant pas de terme constant, le cercle passe par l'origine; on a ainsi le cercle décrit sur la droite OP comme diamètre; les points où ce cercle coupe le cercle proposé sont les points de contact. On retrouve de cette manière la construction de la géométrie élémentaire.

**93.** Problème IV. *Mener une tangente parallèle à une droite donnée.*

Au cercle

$$(8)\qquad x^2+y^2=r^2$$

on veut mener une tangente parallèle à une droite OA, que l'on peut supposer passer par l'origine et représentée par l'équation $y = mx$ (fig. 64). Si l'on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées du point de contact M, on sait que le coefficient angulaire de la tangente est égal à $-\frac{x}{y}$; pour que la tangente MT soit parallèle à la droite donnée, il faut que son coefficient angulaire soit égal à $m$; on aura donc la relation $-\frac{x}{y} = m$, ou

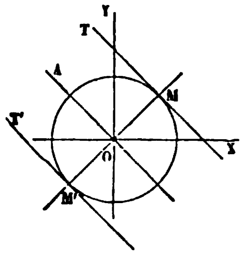


Fig. 64.

$$y = -\frac{1}{m}x. \tag{11}$$

D'ailleurs les coordonnées du point M vérifient l'équation du cercle. Ces coordonnées seront donc déterminées par les deux équations simultanées (9) et (11), et, par conséquent, les points de contact M et M' seront donnés par l'intersection du cercle et de la droite que représente l'équation (11); cette droite MM' est un diamètre perpendiculaire à la droite donnée OA.

**94.** On peut traiter la question d'une autre manière, et ceci nous fournira l'occasion de présenter l'équation de la tangente au cercle sous une forme nouvelle. Proposons-nous d'abord de chercher les points d'intersection d'un cercle $x^2 + y^2 = r^2$ et d'une droite quelconque $y = mx + k$. En éliminant $y$, on obtient l'équation du second degré $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$, ou

$$(m^2 + 1)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0.$$

Quand cette équation a ses racines réelles, la droite coupe le cercle en deux points, dont les abscisses sont les racines de l'équation. Si les racines deviennent égales entre elles, les deux points d'intersection se confondent, et la droite devient tangente au cercle. Enfin, quand les racines sont imaginaires, la droite ne rencontre pas le cercle.

Ainsi, la condition pour que la droite soit tangente au cercle est

$$m^2k^2 - (m^2 + 1)(k^2 - r^2) = 0, \quad \text{ou} \quad k^2 = r^2(m^2 + 1).$$

L'équation de la droite, dans laquelle on remplace $k$ par sa valeur, devient

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}. \tag{12}$$

Cette équation, qui renferme un paramètre arbitraire $m$, représente toutes les tangentes au cercle.

Si l'on donne la direction de la tangente, le coefficient angulaire $m$ étant connu, on a immédiatemont les équations des deux tangentes parallèles à la direction donnée.

**95.** Problème V. *Trouver le lieu des points dont les distances à deux points fixes soient entre elles dans un rapport donné.*

Soient A et B les deux points donnés (fig. 62); prenons pour axe des $x$ la droite AB et pour axe des $y$ la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. Si l'on appelle $2a$ la distance AB, $\frac{m}{n}$ le rapport donné, et si l'on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque du lieu, l'équation de ce lieu sera

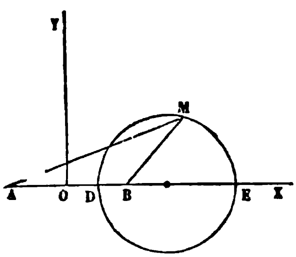


Fig. 62.

$$\frac{y^2+(x+a)^2}{y^2+(x-a)^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

ou

$$x^2+y^2-2ax\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}+a^2=0. \tag{13}$$

C'est un cercle dont le centre est situé sur l'axe des $x$; les deux extrémités du diamètre DE sont les points qui divisent la droite AB dans le rapport de $m$ à $n$.

**96.** Problème VI. *Trouver les points d'intersection de deux cercles.*

Soient

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{14}$$

$$x^2+y^2+2D'x+2E'y+F'=0, \tag{15}$$

les équations des deux cercles, en coordonnées rectangulaires, les coefficients de $x^2+y^2$ étant égaux à l'unité. Les points d'intersection seront donnés par ces deux équations simultanées. On peut remplacer le second cercle par la droite

$$2(D-D')x+2(E-E')y+(F-F')=0 \tag{16}$$

que l'on obtient en retranchant ces équations membre à

membre, et la question est ramenée à la recherche des points d'intersection du premier cercle par cette droite. Si la droite coupe le cercle, les deux cercles ont deux points d'intersection, et l'équation (16) représente la sécante commune. Si la droite devient tangente au cercle, les deux points d'intersection se confondent, et les deux cercles sont tangents; l'équation (16) représente dans ce cas la tangente commune. Enfin, lorsque la droite ne rencontre pas le cercle, les deux cercles n'ont pas de point commun.

Cependant l'équation (16) a, dans tous les cas, une signification géométrique remarquable. Les premiers membres des équations (14) et (15) représentent (n° 88) les puissances d'un point quelconque M du plan, ayant pour coordonnées $x$ et $y$, par rapport à l'un et l'autre cercle; or, on obtient l'équation (16) en égalant ces deux expressions, ce qui fait disparaître les termes du second degré; l'équation (16) représente donc le lieu des points d'égale puissance par rapport à chacun des cercles; ce lieu est une droite que l'on appelle *axe radical* des deux cercles. La partie de cette droite extérieure aux cercles est le lieu des points d'où les tangentes menées aux deux cercles sont égales entre elles. Il est clair que les axes radicaux de trois cercles combinés deux à deux passent par un même point; on appelle ce point *centre radical* des trois cercles. Quand il est extérieur aux trois cercles, les tangentes issues de ce point ont mêmes longueurs. Le cercle décrit du centre radical comme centre avec un rayon égal à la longueur commune des tangentes est orthogonal aux trois cercles considérés.

REMARQUE. Si les coefficients de $x^2+y^2$ n'étaient pas égaux à l'unité et si les équations des deux cercles étaient de la forme

$$(17) \qquad \begin{aligned} f(x,y) &\equiv A(x^2+y^2)+2Dx+2Ey+F=0 \\ \varphi(x,y) &\equiv A'(x^2+y^2)+2D'x+2E'y+F'=0, \end{aligned}$$

on obtiendrait l'équation de l'axe radical en éliminant entre ces deux équations les termes du second degré, c'est-à-dire

en multipliant la première par $-A'$, la seconde par A et ajoutant ; on a ainsi l'équation

(18) $A\varphi - A'f \equiv 2(AD'-DA')x + 2(AE'-EA')y + AF'-FA' = 0.$

Cette équation représente bien l'axe radical, car la puissance du point $(x,y)$, par rapport au premier cercle, est $\frac{f(x,y)}{A}$, par rapport au deuxième $\frac{\varphi(x,y)}{A'}$; en égalant ces deux puissances et chassant les dénominateurs, on obtient l'équation (18).

**97.** Problème VII. *Trouver l'équation générale des cercles passant par les points d'intersection de deux cercles donnés.*

L'ensemble de ces cercles se nomme un *faisceau de cercles*. Pour trouver leur équation, on peut suivre une méthode identique à celle qui a été employée pour le problème analogue relatif aux lignes droites (nº 69). Soient deux cercles représentés par les équations (17), l'équation

(19) $$f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 0$$

c'est-à-dire

$$(A+\lambda A')(x^2+y^2) + 2(D+\lambda D')x + 2(E+\lambda E')y + F + \lambda F' = 0$$

où $\lambda$ désigne une constante quelconque, représente un cercle passant par les points d'intersection des deux cercles donnés, car les coordonnées de chacun des points d'intersection, annulant $f$ et $\varphi$, annulent évidemment $f+\lambda\varphi$. L'équation (19) est de plus l'équation la plus générale des cercles demandés, c'est-à-dire que, pour une détermination convenable de $\lambda$, elle représente un cercle quelconque S passant par les points communs aux proposés. En effet, sur le cercle S choisissons un point $(x_1, y_1)$, et déterminons $\lambda$ par l'équation du premier degré

$$f(x_1,y_1) + \lambda\varphi(x_1,y_1) = 0$$

qui exprime que le cercle (19) passe par le point $(x_1,y_1)$. Le coefficient $\lambda$ étant ainsi déterminé, le cercle (19) et le cercle considéré S coïncident, car ils ont trois points communs à

distance finie, à savoir les deux points d'intersection des cercles donnés et le point $(x_1, y_1)$.

Tous les cercles du faisceau (19) associés deux à deux ont le même axe radical qui n'est autre que l'axe radical des cercles donnés (18). Cet axe radical se trouve d'ailleurs lui-même parmi les cercles du faisceau, comme on le voit en donnant à $\lambda$ la valeur particulière $-\frac{A}{A'}$ qui fait disparaître les termes du second degré.

Points limites. Prenons, pour simplifier, la ligne des centres des deux cercles donnés (17) pour axe des $x$ et leur axe radical pour axe des $y$; les équations des deux cercles seront de la forme

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} x^2+y^2-2ax+c&=0\\ x^2+y^2-2a'x+c&=0 \end{aligned}$$

$a$ et $a'$ désignant les abscisses des centres des deux cercles et $c$ la puissance de l'origine par rapport à chacun des deux cercles, puissance qui est la même pour les deux cercles, car l'origine appartient par hypothèse à l'axe radical. L'équation générale des cercles passant par les points communs aux deux proposés est

$$(1+\lambda)(x^2+y^2)-2(a+\lambda a')x+(1+\lambda)c=0$$

ou plus simplement en divisant par $1+\lambda$ et appelant $\mu$ le rapport $\frac{a+\lambda a'}{1+\lambda}$

$$\text{(21)} \qquad x^2+y^2-2\mu x+c=0$$

$\mu$ désignant un coefficient arbitraire. Cette dernière équation aurait pu être écrite *a priori*, car c'est l'équation générale des cercles qui, associés avec l'un des cercles donnés, ont pour axe radical $Oy$. Parmi ces cercles (21), il s'en trouve *deux* qui sont réduits chacun à un point réel ou imaginaire, c'est-à-dire qui ont un *rayon nul :* ces deux cercles sont les *points limites*. On peut en effet écrire l'équation (21)

$$(x-\mu)^2+y^2=\mu^2-c.$$

Donc pour $\mu = \pm\sqrt{c}$, ce cercle se réduit au point $x = \mu$, $y = 0$. Si $c$ est positif, c'est-à-dire si l'origine est *extérieure* aux deux cercles, ou, ce qui revient au même, si les deux cercles se coupent en des points imaginaires, les valeurs de $\mu$ *sont réelles* et les deux points limites sont réels. Dans ce cas, $\sqrt{c}$ désigne la longueur commune des tangentes menées du point O aux cercles donnés; les points limites sont donc à l'intersection de la ligne des centres, $Ox$, et du cercle décrit du pied O de l'axe radical comme centre avec un rayon égal à la longueur de la tangente menée de O à l'un quelconque des cercles donnés. Si, au contraire, les deux cercles donnés (20) se coupent en des points réels, O est à l'intérieur des deux cercles, $c$ est négatif, les points limites sont imaginaires. Si les deux cercles proposés sont *tangents*, O est leur point de contact, $c = 0$, $\mu = 0$, et les deux points limites coïncident avec O.

**97 *bis*.** Problème VIII. *Exprimer que deux cercles se coupent orthogonalement.*

Lorsque deux cercles se coupent à angle droit, les rayons aboutissant à l'un des points d'intersection M sont rectangulaires, car ils sont perpendiculaires aux tangentes qui sont rectangulaires par hypothèse. Le triangle ayant pour sommets le point M et les deux centres est donc rectangle en M, et le carré de la distance des centres est égal à la somme des carrés des rayons. Soient alors les deux cercles représentés par les équations (17), d'après les expressions données dans le n° 85 pour les coordonnées du centre d'un cercle et le carré de son rayon, on aura pour la condition d'orthogonalité des deux cercles en coordonnées rectangulaires

$$\left(\frac{D'}{A'} - \frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E'}{A'} - \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2}{A^2} - \frac{F}{A} + \frac{D'^2 + E'^2}{A'^2} - \frac{F'}{A'}$$

ou en réduisant et chassant les dénominateurs

$$AF' + FA' - 2(DD' + EE') = 0. \tag{22}$$

Nous arriverons au même résultat sans le secours de la

géométrie. Soit $(x, y)$ un point commun aux deux cercles (18): les coefficients angulaires des tangentes aux deux cercles en ce point étant respectivement (n° 89) $-\frac{f'_x}{f'_y}$ et $-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles soient orthogonaux au point $(x, y)$ est

$$f'_x\varphi'_x + f'_y\varphi'_y = 0,$$

c'est-à-dire développant les calculs

$$(23)\quad AA'(x^2+y^2)+(AD'+DA')x+(AE'+EA')y+DD'+EE'=0.$$

Si l'on regarde $x$ et $y$ comme des coordonnées courantes, cette dernière équation représente un cercle, et, comme elle doit être vérifiée par les coordonnées des points d'intersection des deux cercles donnés (17), elle doit représenter un cercle passant par les points d'intersection de ces deux cercles. On peut encore dire que les trois cercles (17) et (23) associés deux à deux doivent avoir même axe radical. L'axe radical du cercle (23) associé au premier cercle (17), $f = 0$, a pour équation

$$(AD'-DA')x+(AE'-EA')y+DD'+EE'-FA'=0;$$

de même l'axe radical du cercle (23) associé au deuxième cercle (17), $\varphi = 0$, est

$$(AD'-DA')x+(AE'-EA')y-DD'-EE'+AF'=0.$$

Écrivant que ces droites coïncident, on retrouve la condition (22).

Comme vérification de cette condition (22), supposons $A' = 0$; le second cercle se réduit alors à une droite, et la condition d'orthogonalité doit exprimer que cette droite passe par le centre du premier cercle. C'est bien ce qu'on vérifie.

Remarque. La condition d'orthogonalité (22) est linéaire et homogène par rapport aux coefficients de chacun des cercles. Réciproquement, si entre les coefficients A, D, E, F de l'équation d'un cercle

$$A(x^2+y^2)+2Dx+2Ey+F=0$$

on établit une relation linéaire et homogène quelconque

$$LA + MD + NE + PF = 0,$$

cette relation comparée à la condition (22) exprime que le cercle considéré est orthogonal au cercle fixe

$$P(x^2 + y^2) - Mx - Ny + L = 0.$$

Applications. Trouver l'équation du cercle coupant orthogonalement trois cercles donnés

$$f(x,y) \equiv A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0$$
$$\varphi(x,y) \equiv A'(x^2 + y^2) + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$
$$\psi(x,y) \equiv A''(x^2 + y^2) + 2D''x + 2E''y + F'' = 0.$$

Soit

(24) $$a(x^2 + y^2) + 2dx + 2ey + f = 0$$

le cercle cherché; on doit avoir d'après la condition (22) appliquée au cercle (24) associé à chacun des trois autres et ordonnée par rapport à $a$, $d$, $e$, $f$

(25) $$aF - 2dD - 2eE + fA = 0$$
$$aF' - 2dD' - 2eE' + fA' = 0$$
$$aF'' - 2dD'' - 2eE'' + fA'' = 0$$

Si les trois cercles proposés pris deux à deux n'ont pas le même axe radical, ces équations donnent pour les rapports des coefficients $a$, $d$, $e$, $f$ à l'un d'entre eux, un seul système de valeurs; il y a donc alors un seul cercle coupant les proposés à angle droit: on l'appelle le cercle *orthotomique*. On obtient son équation en éliminant $a$, $2d$, $2e$, $f$ entre les équations (24) et (25), ce qui donne sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & -x & -y & 1 \\ F & D & E & A \\ F' & D' & E' & A' \\ F'' & D'' & E'' & A'' \end{vmatrix} = 0$$

Rien n'empêche de supposer que l'un ou l'autre des coefficients A, A', A'' soit nul; le cercle correspondant est alors remplacé par une droite.

Réseau de cercles. Soient $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, les premiers membres des équations des trois cercles précédents qui, associés deux à deux, n'ont pas le même axe radical; l'équation

26) $$\lambda f(x,y) + \mu\varphi(x,y) + \nu\psi(x,y) = 0$$

où $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sont des coefficients arbitraires, représente une infinité de cercles formant ce que l'on appelle un *réseau*. Tous les cercles du

réseau sont orthogonaux à un même cercle fixe, à savoir au cercle *orthotomique* que nous venons de déterminer. En effet, en ajoutant membre à membre, les équations (25), après avoir multiplié la première par $\lambda$, la deuxième par $\mu$, la troisième par $\nu$, on obtient une relation qui exprime précisément que le cercle (26) est orthogonal au cercle orthotomique (24).

Réciproquement l'ensemble des cercles orthogonaux à un cercle fixe forme un *réseau*. En effet, la condition pour qu'un cercle S soit orthogonal à un cercle fixe se traduit par une relation linéaire et homogène par rapport aux quatre coefficients de l'équation du cercle S. L'un de ces coefficients est donc une fonction linéaire et homogène des trois autres qui restent arbitraires et qu'on peut appeler $\lambda$, $\mu$, $\nu$; l'équation du cercle S ordonnée par rapport à $\lambda$, $\mu$, $\nu$, prend alors la forme (26) et les cercles S forment un réseau.

## ÉQUATION DU CERCLE EN COORDONNÉES POLAIRES.

**97 *ter*.** Soient O le pôle et OX l'axe polaire (fig. 63); appelons $a$ et $\alpha$ les coordonnées du centre C, $r$ le rayon, $\rho$ et $\omega$ les coordonnées d'un point quelconque M de la circonférence. Dans le triangle OCM, on a

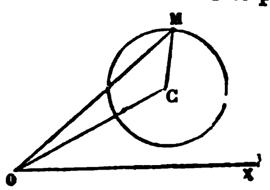



Fig. 63.

$$(27)\quad \rho^2 - 2a\rho\cos(\omega-\alpha) + a^2 - r^2 = 0.$$

Lorsque le pôle O est situé sur la circonférence, on a $a = r$, et l'équation se réduit à

$$(28)\quad \rho = 2r\cos(\omega-\alpha).$$

Pour montrer une application de cette équation, considérons deux cercles qui se coupent; par l'un des points d'intersection O, menons une sécante quelconque; cette sécante rencontre les cercles en deux autres points M et M'; cherchons le lieu du point milieu de la droite MM'. Si l'on prend le point O pour pôle, les deux cercles sont représentés par les équations

$$\rho = 2r\cos(\omega-\alpha)\quad,\quad \rho = 2r'\cos(\omega-\alpha'),$$

et l'on obtient immédiatement l'équation du lieu

$$\rho = r \cos(\omega - \alpha) + r' \cos(\omega - \alpha');$$

cette équation pouvant être mise sous la forme

$$\rho = 2 r_1 \cos(\omega - \alpha_1),$$

le lieu est un cercle passant par le point d'intersection O des deux cercles donnés.

# CHAPITRE III

## Lieux géométriques.

**98.** On définit les lieux géométriques de plusieurs manières. Tantôt on donne une propriété commune à chacun des points du lieu, et c'est en traduisant cette propriété, à l'aide des signes algébriques, que l'on obtient l'équation du lieu. C'est ainsi que nous avons défini la circonférence du cercle, le lieu des points distants d'un point donné d'une quantité donnée; en exprimant cette propriété commune à tous les points du lieu, nous avons obtenu l'équation de la circonférence (n° 84). Nous avons trouvé de la même manière le lieu des points dont les distances à deux points donnés sont entre elles dans un rapport donné (n° 95); l'expression de cette propriété donne l'équation du lieu. Nous avons aussi obtenu par le même procédé l'équation de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint deux points donnés (n° 80), et celles des bissectrices des angles formés par deux droites données (n° 81).

Mais on définit ordinairement une ligne PQ (fig. 64) par le mouvement d'un point dans le plan. Chacune des positions du point mobile M est donnée par la construction d'une figure dont les diverses parties ne dépendent que d'un paramètre arbitraire $a$. D'après cela, les deux coordonnées $x$ et $y$ du point M sont des fonctions de ce paramètre variable $a$ : soient

$$x=f(a) \quad , \quad y=f_1(a),$$

ces deux fonctions; nous verrons que l'on obtient l'équation du lieu décrit par le point M, en éliminant le paramètre $a$ entre ces deux équations.

Plus généralement, la construction géométrique détermine chacun des points du lieu par la rencontre de deux lignes mobiles qui dépendent du paramètre $a$; soient

$$(1) \qquad F(x,y,a)=0,$$

$$(2) \qquad F_1(x,y,a)=0,$$

les équations de ces deux lignes. Si l'on attribue à ce paramètre une valeur particulière, on obtient deux lignes A et B qui se coupent en un point M, dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient les deux équations simultanées (1) et (2). Si l'on attribue au paramètre une autre valeur $a'$, les deux lignes occuperont les positions A′ et B′ et le point d'intersection viendra en M′; une troisième valeur $a''$ attribuée au paramètre donnera les deux lignes A″ et B″ et le point d'intersection M″, et ainsi de suite. Concevons que l'on fasse varier le paramètre $a$ d'une manière continue, les deux lignes A et B se déplaceront dans le plan d'une manière continue, et le point d'intersection M décrira la ligne PQ.

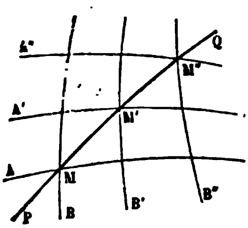


Fig. 64.

On obtiendra l'équation de la ligne PQ, lieu du point M, en éliminant le paramètre $a$ entre les deux équations (1) et (2). En effet, éliminer $a$ entre les deux équations (1) et (2), c'est trouver un système de deux équations

$$F_2(x, y, a) = 0, \tag{3}$$

$$f(x, y) = 0, \tag{4}$$

équivalent au système des deux équations (1) et (2), et tel que l'une d'elles ne renferme plus la lettre $a$. On dit que deux systèmes d'équations sont équivalents, lorsqu'ils sont vérifiés par les mêmes valeurs attribuées aux variables. Quand on donne à $a$ une valeur particulière, les coordonnées $x$ et $y$ du point M, jointes à cette valeur de $a$, forment un système de valeurs des trois quantités $x$, $y$, $a$ vérifiant à la fois les deux équations (1) et (2); puisque le système des équations (3) et (4) est équivalent au précédent, ces valeurs vérifient aussi les équations (3) et (4); l'équation (4), ne renfermant pas $a$, est donc vérifiée par les coordonnées de l'un quelconque des points du lieu.

Réciproquement, tout point M, dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient l'équation (4), appartient au lieu. Car, si l'on détermine une valeur de $a$ qui vérifie l'équation (3), dans laquelle on attribue à $x$ et $y$ les valeurs précédentes, on obtient un

système de valeurs des trois quantités $x$, $y$, $a$ vérifiant le système des équations (3) et (4). Les équations (1) et (2), formant un système équivalent à celui-là, seront vérifiées par les mêmes valeurs; on obtiendra ainsi deux lignes A et B passant par le point M.

Il peut arriver, cependant, qu'à un système de valeurs réelles de $x$ et de $y$ vérifiant l'équation (4) corresponde une valeur de $a$, pour laquelle les équations (1) et (2) ne représentent pas de lignes réelles; c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si la valeur de $a$ était imaginaire. Mais, dans tous les cas, les valeurs de $x$, $y$, $a$ satisferont aux deux équations (1) et (2).

**99.** Quoique la construction de chacune des positions de la figure, qui donne les divers points du lieu, ne dépende que de la valeur attribuée à un paramètre arbitraire, il est souvent plus commode d'introduire dans le calcul plusieurs paramètres variables $a$, $b$, $c$,...; mais alors ces paramètres sont liés entre eux de telle sorte que la valeur d'un seul soit arbitraire, et que la variation de ce paramètre détermine, par conséquent, celle de tous les autres. Si ces paramètres sont au nombre de $n$, ils seront liés par $n-1$ équations de condition.

Supposons d'abord que l'on emploie seulement deux paramètres variables $a$ et $b$ liés par l'équation de condition

$$\varphi(a,b)=0, \tag{5}$$

et soient

$$F(x,y,a,b)=0, \tag{6}$$

$$F_1(x,y,a,b)=0, \tag{7}$$

les équations des deux lignes mobiles A et B, dont l'intersection donne chaque point du lieu. Si l'on fait varier le paramètre $a$ d'une manière continue, le paramètre $b$, qui dépend de $a$ d'après la relation (5), variera aussi d'une manière continue; les deux lignes A et B, dont les équations contiennent ces deux paramètres, varieront aussi d'une manière continue, et leur point d'intersection M décrira la ligne PQ.

On obtiendra l'équation de cette ligne en éliminant les deux paramètres $a$ et $b$ entre les trois équations (5), (6), (7). En effet, éliminer $a$ et $b$ entre ces trois équations, c'est trouver un

système de trois équations

(8) $$F_2(x,y,a,b)=0,$$

(9) $$F_3(x,y,a,b)=0,$$

(10) $$f(x,y)=0,$$

équivalent au système proposé et tel que l'une d'elles ne contienne plus $a$ et $b$. Quand on attribue à $a$ et $b$ des valeurs vérifiant l'équation (5), les coordonnées $x$ et $y$ du point M, jointes à ces valeurs de $a$ et de $b$, forment un système de valeurs des quatre quantités $x$, $y$, $a$, $b$, vérifiant à la fois les trois équations (5), (6), (7). Les trois équations (8), (9), (10), formant un système équivalent au système précédent, seront aussi vérifiées par les mêmes valeurs; l'équation (10), étant indépendante de $a$ et de $b$, sera donc vérifiée par les coordonnées $x$ et $y$ de chacun des points du lieu.

Réciproquement, tout point M dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient l'équation (10), appartient au lieu ; car, si l'on détermine des valeurs de $a$ et de $b$ qui vérifient les deux équations (8) et (9), dans lesquelles on attribue à $x$ et à $y$ les valeurs précédentes, on obtient un système de valeurs des quatre quantités $x$, $y$, $a$, $b$ vérifiant le système des trois équations (8), (9), (10). Les trois équations (5), (6), (7), formant un système équivalent à celui-là, seront aussi vérifiées, et l'on aura deux lignes A et B passant par le point M.

**100.** Supposons, en général, que l'on emploie $n$ paramètres variables $a, b, c, \ldots, h$, liés entre eux par $n-1$ équations de condition,

(11) $$\begin{cases} \varphi_1(a,b,c,\ldots,h)=0, \\ \varphi_2(a,b,c,\ldots,h)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(a,b,c,\ldots,h)=0, \end{cases}$$

et soient

(12) $$F(x,y,a,b,c,\ldots,h)=0,$$

(13) $$F_1(x,y,a,b,c,\ldots,h)=0,$$

les équations des deux lignes mobiles A et B, dont l'intersection donne chaque point du lieu. Quand on fait varier le para-

mètre $a$, les autres paramètres varient simultanément, et le point M décrit le lieu. On obtient l'équation de ce lieu en éliminant les $n$ paramètres entre les $n+1$ équations (11), (12), (13).

**101.** Nous avons dit que la construction de la figure ne dépend que d'un seul paramètre arbitraire $a$. Si la figure dépendait de deux paramètres arbitraires $a$ et $b$, les deux coordonnées $x$ et $y$ du point M seraient des fonctions de ces deux paramètres

$$x = f(a, b) \quad , \quad y = f_1(a, b).$$

On pourrait attribuer à ces paramètres des valeurs telles, que le point M coïncidât avec un point quelconque du plan, ayant pour coordonnées $x_1$ et $y_1$; il suffirait, pour cela, de déterminer $a$ et $b$ à l'aide des deux équations

$$x_1 = f(a, b) \quad , \quad y_1 = f_1(a, b).$$

Le point M décrirait ainsi tout le plan et non une ligne déterminée dans le plan.

On comprend bien, par là, comment il est nécessaire, lorsqu'on emploie $n$ paramètres variables, que ces $n$ paramètres soient liés par $n-1$ équations de condition distinctes; car, si on pouvait réduire ces équations de condition à un nombre moindre, deux paramètres au moins seraient arbitraires.

Il peut arriver que les deux lignes variables A et B se coupent en plusieurs points; le calcul précédent donne le lieu décrit par l'ensemble de ces points.

**102.** Remarque. Il arrive quelquefois que l'une des deux courbes mobiles A et B, dont l'intersection donne un point M du lieu, passe par un point fixe P. Dans ce cas, les coordonnées de ce point P vérifient l'équation résultant de l'élimination. En effet, supposons que les équations des deux lignes contiennent $n$ paramètres variables liés entre eux par $n-1$ relations (n° 100); si les coordonnées $x_1$ et $y_1$ d'un point fixe P satisfont à l'équation de la ligne A, quelles que soient les valeurs des paramètres, en remplaçant $x$ et $y$ par $x_1$ et $y_1$ dans l'équation de la ligne B, on aura une équation qui, jointe aux $n-1$ équations

de condition entre les paramètres, formera un système de $n$ équations pour déterminer les valeurs de ces paramètres. Ce point P sera étranger au lieu géométrique proprement dit, si aux valeurs trouvées ne correspondent pas de lignes réelles.

Dans ce cas, il arrive quelquefois que le point P entre dans l'équation par un facteur particulier que l'on peut supprimer; après la suppression de ce facteur, l'équation représente le lieu géométrique lui-même. Mais souvent il est impossible de décomposer en deux facteurs le premier membre de l'équation, et le point P doit être considéré comme un point isolé lié à la courbe.

**103.** Problème I. *Étant donnés un angle* XOY *et un point fixe* P *dans le plan* (fig. 65), *par le point* P *on mène une sécante fixe* PBA *et une sécante mobile* PDC, *on mène les droites* AD, BC; *trouver le lieu de leur point de rencontre* M.

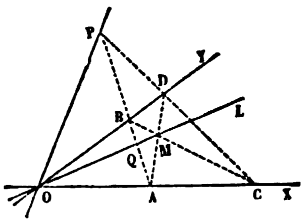


Fig. 65.

Prenons les droites OX et OY pour axes des coordonnées, et désignons par $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point P. La sécante fixe PBA aura une équation de la forme

$$y-y_1=a(x-x_1),$$

dans laquelle le paramètre $a$ a une valeur constante. De même la sécante mobile PDC sera représentée par l'équation

$$y-y_1=m(x-x_1),$$

dans laquelle $m$ désigne un paramètre variable. Si, dans chacune de ces équations, on fait successivement $y=0$, $x=0$, on obtient les coordonnées des points où ces droites rencontrent les axes des coordonnées.

$$\text{A},\quad y=0,\quad x=x_1-\frac{y_1}{a},$$

$$\text{B},\quad x=0,\quad y=y_1-ax_1,$$

$$\text{C},\quad y=0,\quad x=x_1-\frac{y_1}{m},$$

$$\text{D},\quad x=0,\quad y=y_1-mx_1.$$

En appliquant la formule du n° 67, on a les équations des droites AD, CB,

$$(1)\qquad \frac{x}{x_1-\frac{y_1}{a}}+\frac{y}{y_1-mx_1}=1,$$

$$(2) \qquad \frac{x}{x_1 - \frac{y_1}{m}} + \frac{y}{y_1 - ax_1} = 1.$$

Les valeurs de $x$ et $y$, qui vérifient les deux équations simultanées (1) et (2), sont les coordonnées du point d'intersection M des deux droites AD et BC; ces coordonnées varient avec le paramètre arbitraire $m$. Si l'on retranche les deux équations membre à membre, on obtient l'équation

$$x\left(\frac{m}{y_1 - mx_1} - \frac{a}{y_1 - ax_1}\right) + y\left(\frac{1}{y_1 - mx_1} - \frac{1}{y_1 - ax_1}\right) = 0,$$

ou plus simplement

$$(3) \qquad \frac{m-a}{(y_1 - mx_1)(y_1 - ax_1)}(y_1 x + x_1 y) = 0,$$

qui, jointe à l'équation (1), forme un système équivalent au système des deux équations (1) et (2). Tant que le paramètre $m$ a une valeur différente de $a$, le premier facteur étant différent de zéro, les coordonnées $x$ et $y$ du point M doivent annuler le second facteur. Ainsi, les coordonnées de chacun des points du lieu vérifient l'équation

$$y_1 x + x_1 y = 0,$$

ou

$$(4) \qquad \frac{y}{x} = -\frac{y_1}{x_1}.$$

Ce lieu est une droite OL passant par l'origine.

Quand $m = a$, le système des deux équations (1) et (2) se réduit à l'équation (1); les deux droites AD et BC coïncident, et leur point d'intersection est un point quelconque de la sécante fixe PA.

Si l'on avait fait l'élimination d'une autre manière, si l'on avait, par exemple, tiré la valeur de $m$ de l'équation (1) pour la porter dans l'équation (2), on aurait obtenu une équation du second degré, dont le premier membre serait décomposable en deux facteurs du premier degré, et qui, par conséquent, représenterait deux droites, le lieu OL et la droite PA. Cette équation serait

$$(y_1 x + x_1 y)[y - y_1 - a(x - x_1)] = 0.$$

Remarquons que l'équation (4) ne contient pas le paramètre constant $a$; il en résulte que le lieu est indépendant de la position particulière attribuée à la sécante fixe PA. On en conclut le théorème suivant : *Étant donnés un angle XOY et un point fixe P dans son plan, si par le point P on mène deux sécantes quelconques PA, PC, le point de rencontre M des deux droites AD et BC est toujours situé sur une même droite OL.*

Nous remarquerons encore que l'équation (4) ne dépend que du rapport $\frac{y_1}{x_1}$, c'est-à-dire du coefficient angulaire de la droite OP. Ainsi le

lieu OL restera le même, si l'on déplace le point P sur la droite OP passant à l'origine.

**104.** On peut traiter cette question d'une manière plus rapide. Supposons que l'on ait tracé dans le plan deux axes quelconques. Représentons, pour abréger, par $\alpha=0$, $\beta=0$ les équations des droites données OA et OB, et par $\gamma=0$ celle de la sécante fixe PA. On déterminera le point donné P, non plus par ses coordonnées, mais par l'intersection des deux droites données PA et OP; cette dernière, passant par le point d'intersection O des droites OA et OB, a une équation de la forme $\beta+a\alpha=0$. La sécante mobile PC, menée par le point d'intersection P des deux droites $\beta+a\alpha=0$, $\gamma=0$, est représentée par une équation de la forme

$$\beta+a\alpha+m\gamma=0, \tag{1}$$

dans laquelle $m$ désigne un paramètre arbitraire. Le point C, où cette sécante coupe la droite OA, est donné par les deux équations simultanées $\alpha=0$, $\beta+a\alpha+m\gamma=0$, ou plus simplement $\alpha=0$, $\beta+m\gamma=0$; cette dernière équation représente une droite passant par le point C, et aussi par le point d'intersection B des droites $\beta=0$, $\gamma=0$; c'est donc l'équation de la droite BC. De même, le point D, où la sécante mobile coupe la droite OB, est donné par les deux équations simultanées $\beta=0$, $\beta+a\alpha+m\gamma=0$, ou plus simplement $\beta=0$, $a\alpha+m\gamma=0$; la droite représentée par cette dernière équation, passant aussi par le point d'intersection A des droites $\alpha=0$, $\gamma=0$, n'est autre chose que la droite AD. Les deux droites mobiles BC et AD, dont l'intersection détermine un point M du lieu, ont donc pour équations

$$\beta+m\gamma=0, \tag{2}$$
$$a\alpha+m\gamma=0. \tag{3}$$

On obtiendra l'équation du lieu en éliminant le paramètre $m$ entre ces deux équations; si on les retranche membre à membre, on obtient l'équation

$$\beta-a\alpha=0. \tag{4}$$

On en conclut que le lieu est une droite passant par le point O. Cette droite est indépendante de $\gamma$, c'est-à-dire de la sécante fixe PA, et elle est la même quelle que soit la position du point P sur la droite OP.

Nous avons supposé que le paramètre $m$ a une valeur finie; si l'on remplace $m$ par $\frac{p}{q}$, et qu'après avoir multiplié par $q$, on fasse $q=0$, les équations (1), (2), (3) se réduisent à $\gamma=0$; la sécante mobile coïncide avec la sécante fixe PA, ainsi que les deux droites BC et AD.

**105.** Problème II. *Les côtés d'un triangle variable* ABC *tournent autour de trois points fixes* P, P′, P″, *situés en ligne droite, tandis que deux*

*des sommets* A *et* B *glissent sur deux droites fixes* ID *et* IE ; *trouver le lieu décrit par le troisième sommet* C (fig. 66).

Traçons dans le plan deux axes quelconques, et, pour abréger, représentons, comme précédemment, par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, les équations des droites données ID, IE, et par $\gamma = 0$ celle de la droite PP′P″ ; chacun des points fixes P, P′, P″ peut être défini par l'intersection de cette droite et d'une droite passant par le point I ; le point I étant le point d'intersection des droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, les droites IP, IP′, IP″ ont des équations de la forme

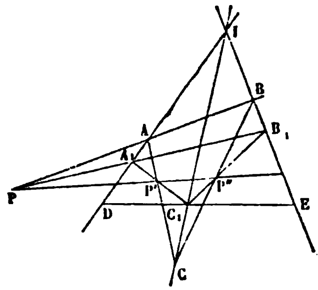


Fig. 66.

$$\beta + a\alpha = 0,\quad \beta + a'\alpha = 0,\quad \beta + a''\alpha = 0,$$

dans lesquelles $a$, $a'$, $a''$ désignent des coefficients constants. Pour construire une position particulière de la figure variable, on mènera par le point P une droite arbitraire PA, puis on tracera les droites AP′ et BP″, dont l'intersection donnera un point C du lieu. Le point P étant l'intersection des deux droites $\gamma = 0$, $\beta + a\alpha = 0$, la droite PA, menée par ce point, aura une équation de la forme

$$(1)\qquad \beta + a\alpha + m\gamma = 0,$$

dans laquelle $m$ désigne un paramètre arbitraire. Le point A, où la droite PA coupe la droite ID, est donné par les deux équations simultanées $\alpha = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, ou plus simplement $\alpha = 0$, $\beta + m\gamma = 0$. La droite AP′, passant par ce point, a une équation de la forme $\beta + m\gamma + m'\alpha = 0$ ; il faut déterminer le coefficient $m'$ de manière que la droite passe aussi par le point P′, défini par les deux équations $\gamma = 0$, $\beta + a'\alpha = 0$ ; si dans l'équation de cette droite on fait $\gamma = 0$ et $\beta = -a'\alpha$, on a $(m' - a')\alpha = 0$ ; comme $\alpha$ n'est pas nulle, puisque le point P′ n'est pas sur la droite $\alpha = 0$, on a $m' - a' = 0$ ; on prendra donc $m' = a'$. Ainsi, la droite AP′ est représentée par l'équation

$$(2)\qquad \beta + a'\alpha + m\gamma = 0.$$

De même, le point B, où la droite PB coupe la droite IE, est donné par les deux équations $\beta = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, ou plus simplement $\beta = 0$, $a\alpha + m\gamma = 0$ ; la droite BP″, passant par ce point, a une équation de la forme $a\alpha + m\gamma + m''\beta = 0$ ; on déterminera le coefficient $m''$ de manière que cette droite passe par le point P″, intersection des droites $\gamma = 0$, $\beta + a''a = 0$ ; si dans cette équation on fait $\gamma = 0$ et $\beta = -a''\alpha$, on a $(a - m''a'')\alpha = 0$ ; on prendra donc $m'' = \frac{a}{a''}$ ; ainsi la droite BP″ est représentée par l'équation

$$(3)\qquad \frac{a}{a''}(\beta + a''\alpha) + m\gamma = 0.$$

Les équations (2) et (3) sont les équations des deux droites mobiles AP′ et BP″, dont l'intersection donne un point quelconque C du lieu; on obtiendra l'équation du lieu en éliminant le paramètre $m$ entre ces deux équations; si on les retranche membre à membre, on a l'équation

$$(4) \qquad (a'-a)\, a''\alpha + (a''-a)\,\beta = 0.$$

On en conclut que le lieu cherché est une droite passant par le point I.

**106.** Corollaire I. On déduit de ce qui précède la solution de ce problème : *Inscrire dans un triangle* IDE *un second triangle, dont les côtés passent respectivement par trois points donnés* P, P′, P″, *en ligne droite.* Si l'on conçoit un triangle variable dont les côtés soient assujettis à passer par les points P, P′, P″, tandis que deux des sommets A et B glissent sur les droites ID, IE, le lieu du troisième sommet C est une droite IC. Le point de rencontre $C_1$ des droites IC et DE est donc l'un des sommets $C_1$ du triangle cherché; les droites $C_1P'$, $C_1P''$ donnent les deux autres sommets $A_1$ et $B_1$. Il est à remarquer que cette solution n'exige aucun autre instrument que la règle.

Corollaire II. On peut aisément généraliser le problème précédent. Considérons un quadrilatère dont les quatre côtés pivotent autour de quatre points fixes P, P′, P″, P‴, situés en ligne droite, tandis que trois sommets A, B, C glissent sur trois droites fixes R, S, T; et proposons-nous de chercher le lieu décrit par le quatrième sommet D (fig. 67).

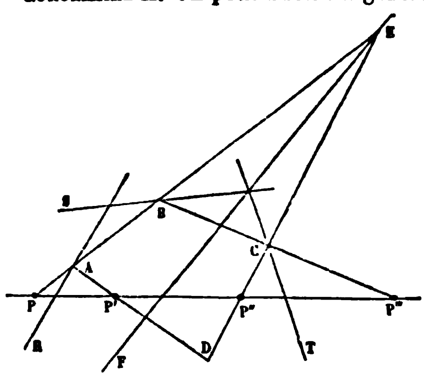


Fig. 67.

Les trois côtés du triangle BCE pivotent autour des trois points fixes P, P″, P‴, tandis que deux sommets B et C glissent sur les droites fixes S et T; le sommet E décrit donc une droite EF. D'après cela, les trois côtés du triangle AED pivotent autour des trois points fixes P, P′, P″, tandis que deux sommets A et E glissent sur les deux droites R et EF; le sommet D décrit donc une ligne droite.

Du quadrilatère on passera de la même manière au pentagone. Ainsi, quand les $n$ côtés d'un polygone pivotent autour de $n$ points fixes situés en ligne droite, tandis que $n-1$ sommets glissent sur $n-1$ droites fixes, le $n^{me}$ sommet décrit une ligne droite.

**107.** PROBLÈME III. *Étant donné un triangle* ABA′, *par un point fixe* O *pris sur un côté* AA′, *on mène une sécante mobile* OCC′, *on fait passer un premier cercle par les trois points* O, A, C, *un second cercle par les trois points* O, A′, C′; *trouver le lieu du point d'intersection* M *de ces deux cercles* (fig. 68).

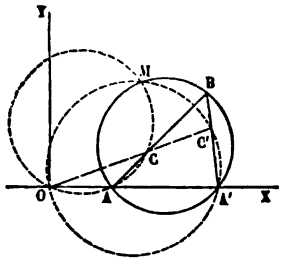


Fig. 68.

Prenons la droite OA′ pour axe des $x$ et une perpendiculaire OY, menée par le point O, pour axe des $y$. Si l'on appelle $a$ et $a'$ les abscisses des points A et A′, les deux droites fixes AB, A′B seront représentées par les équations

$$(1) \qquad y = c\,(x - a),$$

$$(2) \qquad y = c'\,(x - a'),$$

et la sécante mobile par l'équation

$$(3) \qquad y = mx,$$

dans laquelle $m$ désigne un paramètre variable. On obtient les coordonnées du point C en résolvant les deux équations simultanées (1) et (3), ce qui donne

$$x = \frac{ca}{c - m}, \quad y = \frac{mca}{c - m}.$$

Tout cercle passant par les points O et A a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0,$$

dans laquelle le paramètre $b$ est arbitraire. On détermine ce paramètre en exprimant que le cercle passe par le point C, ce qui donne

$$b = \frac{a(cm + 1)}{c - m};$$

le cercle qui passe par les trois points O, A, C a donc pour équation

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - ax - \frac{a(cm + 1)}{c - m}\,y = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace $a$ et $c$ par $a'$ et $c'$, on obtiendra évidemment l'équation du cercle qui passe par les trois points O, A′, C′,

$$(5) \qquad x^2 + y^2 - a'x - \frac{a'(c'm + 1)}{c' - m}\,y = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu du point d'intersection M des deux cercles, il faut éliminer le paramètre variable $m$ entre les deux équations (4) et (5). En égalant les valeurs de $m$ tirées des équations (4) et (5),

on obtient l'équation

$$\frac{c(x^2+y^2-ax)-ay}{(x^2+y^2-ax)+cay}=\frac{c'(x^2+y^2-a'x)-a'y}{(x^2+y^2-a'x)+c'a'y},$$

qui, mise sous forme entière, s'écrit

$$\begin{gathered}(c-c')[(x^2+y^2-ax)(x^2+y^2-a'x)+aa'y^2]\\ +(1+cc')y[a'(x^2+y^2-ax)-a(x^2+y^2-a'x)]=0,\end{gathered}$$

ou

$$\begin{gathered}(c-c')[(x^2+y^2)^2-(a+a')x(x^2+y^2)+aa'(x^2+y^2)]\\ +(1+cc')(a'-a)y(x^2+y^2)=0;\end{gathered}$$

en mettant $x^2+y^2$ en facteur commun, et divisant par $c-c'$, on a l'équation

$$(6)\qquad (x^2+y^2)\left[x^2+y^2-(a+a')x-\frac{(1+cc')(a-a')}{c-c'}y+aa'\right]=0.$$

Cette équation se décompose en deux : l'une,

$$x^2+y^2=0,$$

donne le point O où se coupent toujours les deux cercles mobiles; l'autre,

$$(7)\qquad x^2+y^2-(a+a')x-\frac{(1+cc')(a-a')}{c-c'}y+aa'=0,$$

est l'équation du lieu du point M. Ce lieu est un cercle.

On reconnaît *à priori* que les trois points B, A, A′ appartiennent au lieu. Car, si la sécante mobile passe par le point B, les deux cercles se coupent en B; ce point fait partie du lieu. Supposons maintenant que la sécante devienne parallèle à la droite A′B; le point C′ s'éloignant à l'infini, le second cercle coïncide avec la droite OA′, qui coupe en A le premier cercle. On obtient de même le point A′, quand la sécante devient parallèle à AB. Il est d'ailleurs facile de vérifier sur l'équation (7) que le lieu passe par trois points B, A, A′. Ainsi le lieu demandé est le cercle circonscrit au triangle ABA′.

**108.** Problème IV. *Étant donnés un cercle et un point fixe* P, *autour du point* P *on fait tourner un angle droit* APB; *on joint par une droite les deux points* A *et* B, *où les côtés de l'angle droit rencontrent le cercle, et on abaisse du point* P *une perpendiculaire* PM *sur la droite* AB; *trouver le lieu du pied* M *de la perpendiculaire* (fig. 69).

Prenons pour axe des $x$ le diamètre OP, pour axe des $y$ le diamètre perpendiculaire; le cercle donné est représenté par l'équation

$$(1)\qquad x^2+y^2=r^2.$$

Soit

$$(2)\qquad y=ax+b$$

l'équation de la sécante AB. Si l'on élimine $y$ entre les deux équations (1) et (2), on obtient une équation du second degré

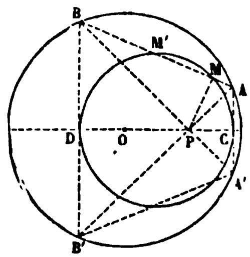


Fig. 69.

$$(3) \qquad (1+a^2)x^2 + 2abx + b^2 - r^2 = 0,$$

dont les racines sont les abscisses $x'$ et $x''$ des points A et B; les ordonnées $y'$ et $y''$ auront pour valeurs $ax'+b$, $ax''+b$. Si l'on appelle $c$ la longueur constante OP, les deux droites PA, PB ont pour coefficients angulaires

$$\frac{y'}{x'-c}, \quad \frac{y''}{x''-c}, \quad \text{ou} \quad \frac{ax'+b}{x'-c}, \quad \frac{ax''+b}{x''-c};$$

l'angle APB étant droit, on a la condition

$$\frac{(ax'+b)(ax''+b)}{(x'-c)(x''-c)} = -1,$$

qui s'écrit

$$(1+a^2)x'x'' + (ab-c)(x'+x'') + b^2 + c^2 = 0;$$

si l'on remplace $x'+x''$ et $x'x''$ par leurs valeurs tirées de l'équation (3), on obtient la relation

$$(4) \qquad (1+a^2)(c^2-r^2) + 2b(ac+b) = 0,$$

qui lie les deux paramètres variables $a$ et $b$.

La perpendiculaire PM, abaissée du point P sur la droite AB, a pour équation

$$(5) \qquad y = -\frac{1}{a}(x-c).$$

Le point M est défini par les équations (2) et (5), dans lesquelles les paramètres variables $a$ et $b$ satisfont à l'équation (4); on obtient l'équation du lieu du point M en éliminant ces deux paramètres entre les trois équations (2), (4), (5). De l'équation (5) on tire $a = -\frac{x-c}{y}$; de l'équation (2) on déduit ensuite $b = \frac{y^2+(x-c)x}{y}$. En portant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient l'équation

$$(6) \qquad [y^2+(x-c)^2]\left(x^2+y^2-cx+\frac{c^2-r^2}{2}\right) = 0,$$

qui se décompose en deux; l'une, $y^2+(x-c)^2=0$, donne le point P; l'autre

$$(7) \qquad x^2+y^2-cx+\frac{c^2-r^2}{2} = 0,$$

représente le lieu cherché.

Il est évident que le point P n'appartient pas au lieu géométrique tel qu'on l'a défini; mais il est facile de comprendre comment l'analyse l'introduit dans le résultat. Les coordonnées $x=c$, $y=0$ du point P vérifient l'équation (5), quels que soient les paramètres; on pourra donc déduire des deux équations (2) et (4) des valeurs correspondantes des deux paramètres $a$ et $b$; on trouve ainsi $a=\pm i$, $b=-ac$. C'est une application de la remarque faite au n° 102.

L'équation (7) montre que le lieu est un cercle ayant son centre sur la droite OP. Pour le construire, il suffit de déterminer les deux extrémités du diamètre CD; si l'on mène des droites AB', BA' faisant des angles de 45° avec le diamètre OP, les cordes AA', BB', étant perpendiculaires sur ce diamètre, donneront les deux points C et D.

**109.** On obtient le même cercle en cherchant le lieu du milieu M' de la corde AB. En effet, ce point milieu est déterminé par l'intersection de la corde AB et de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette corde. Ces deux droites ayant pour équations

$$y=ax+b \quad , \quad y=-\frac{1}{a}x,$$

on obtiendra l'équation du lieu en éliminant les deux paramètres variables $a$ et $b$ entre ces deux équations et l'équation (4), ce qui conduit à l'équation

$$(x^2+y^2)\left(x^2+y^2-cx+\frac{c^2-r^2}{2}\right)=0,$$

qui se décompose en deux, donnant l'une le point O étranger au lieu géométrique, l'autre le cercle.

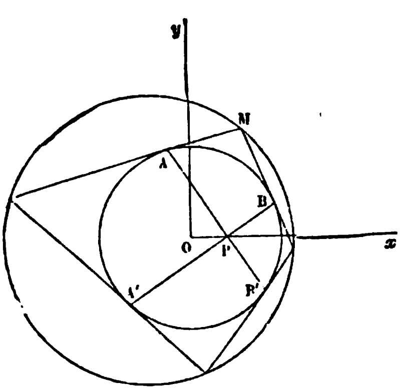


Fig. 70.

**110.** Problème V. *Étant donnés une circonférence et un point fixe* P, *un angle droit tourne autour de son sommet placé en* P; *trouver le lieu du point de concours* M *des tangentes menées à la circonférence, aux points de rencontre* A *et* B *avec les côtés de l'angle droit* (fig. 70).

Prenons pour axe des $x$ le diamètre OP et pour axe des $y$ le diamètre perpendiculaire; soit $r$ le rayon de la circonférence et $c$ la distance OP; l'équation de la circonférence donnée est

$$(1) \qquad x^2+y^2=r^2.$$

Représentons par $x_1$ et $y_1$ les coordonnées d'un point quelconque

M du plan, la corde des contacts des tangentes issues de ce point sera représentée par l'équation (nº 91)

$$(2) \qquad x_1 x + y_1 y = r^2.$$

On obtient les coordonnées des points de contact en résolvant les équations simultanées (1) et (2). Si l'on considère une solution $x, y$ de ce système, la valeur $m$ du coefficient angulaire de la droite qui joint le point correspondant au point P a pour expression

$$(3) \qquad m = \frac{y}{x - c}.$$

L'élimination de $x$ et $y$ entre les équations (1), (2), (3), donne l'équation qui détermine les coefficients angulaires des deux droites menées du point P aux points de rencontre de la droite (2) avec la circonférence. Pour faire cette élimination, on résout les équations (2) et (3) par rapport à $x$ et $y$, et l'on substitue dans (1); on obtient ainsi l'équation du second degré

$$(4) \quad [(r^2 - cx_1)^2 + (c^2 - r^2)y_1^2]m^2 + 2r^2 y_1(c - x_1)m + r^2(r^2 - x_1^2) = 0.$$

Pour que le point M, pris d'abord arbitrairement dans le plan, soit au point du lieu, il faut et il suffit que les directions, qui correspondent aux deux racines de l'équation (4), soient rectangulaires. En exprimant que le produit des racines est égal à $-1$, on obtient l'équation du lieu

$$(x_1^2 + y_1^2)(r^2 - c^2) + 2r^2 c x_1 - 2r^4 = 0,$$

que l'on peut écrire ainsi, en supprimant les indices,

$$(5) \qquad \left(x + \frac{r^2 c}{r^2 - c^2}\right)^2 + y^2 = \frac{r^4(2r^2 - c^2)}{(r^2 - c^2)^2}.$$

Le lieu est une circonférence que l'on construira par la méthode indiquée dans le problème précédent.

Les rayons R et $r$ des deux circonférences, et la distance D de leurs centres satisfont à la relation

$$(6) \qquad (R^2 - D^2)^2 = 2r^2(R^2 + D^2).$$

Si l'on prolonge les côtés de l'angle droit APB, et que l'on mène les tangentes en A′ et B′, les points de rencontre des tangentes consécutives sont les sommets d'un quadrilatère variable, qui est en même temps circonscrit au cercle donné et inscrit dans le cercle (5). Ainsi, *lorsque les rayons* R *et* r *de deux cercles* $O_1$ *et* O *et la distance* D *de leurs centres satisfont à la relation* (6), *on peut construire un quadrilatère inscrit dans* $O_1$ *et circonscrit à* O, *en prenant pour l'un des côtés du quadrilatère une tangente quelconque au cercle* O.

**111.** Problème VI. *Trouver le lieu des points, tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de chacun d'eux sur les trois côtés d'un*

*triangle* ABC, *soient en ligne droite.*

Soient (1) $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0, \\ x\cos\beta + y\sin\beta - p_2 = 0, \\ x\cos\gamma + y\sin\gamma - p_3 = 0, \end{cases}$

les équations des trois côtés du triangle, rapportées à deux axes rectangulaires quelconques, et, pour abréger, désignons par $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ les premiers membres de ces équations. Appelons $x$ et $y$ les coordonnées d'un point M du lieu, $x_1$ et $y_1$, $x_2$ et $y_2$, $x_3$ et $y_3$ celles des pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du triangle, on a (n° 83)

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \alpha_1\cos\alpha, & x - x_2 &= \beta_1\cos\beta, & x - x_3 &= \gamma_1\cos\gamma, \\ y - y_1 &= \alpha_1\sin\alpha, & y - y_2 &= \beta_1\sin\beta, & y - y_3 &= \gamma_1\sin\gamma, \end{aligned}$$

Nous obtiendrons l'équation du lieu en exprimant que ces trois points sont en ligne droite. Il faut pour cela égaler les deux rapports $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{(y_2 - y) - (y_1 - y)}{(x_2 - x) - (x_1 - x)} = \frac{(y_3 - y) - (y_1 - y)}{(x_3 - x) - (x_1 - x)}.$$

On a ainsi l'équation

$$\frac{\beta_1\sin\beta - \alpha_1\sin\alpha}{\beta_1\cos\beta - \alpha_1\cos\alpha} = \frac{\gamma_1\sin\gamma - \alpha_1\sin\alpha}{\gamma_1\cos\gamma - \alpha_1\cos\alpha},$$

ou (2) $\alpha_1\beta_1\sin(\beta - \alpha) + \beta_1\gamma_1\sin(\gamma - \beta) + \gamma_1\alpha_1\sin(\alpha - \gamma) = 0.$

Les lettres $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ désignant des polynômes du premier degré en $x$ et $y$, on voit que l'équation (2) est du second degré. Le coefficient du terme en $xy$ est

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha) + \sin(\beta + \gamma)\sin(\gamma - \beta) + \sin(\gamma + \alpha)\sin(\alpha - \gamma);$$

si l'on transforme les produits de sinus en différences de cosinus, ce coefficient devient

$$\frac{(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) + (\cos 2\beta - \cos 2\gamma) + (\cos 2\gamma - \cos 2\alpha)}{2};$$

il est égal à zéro. Les coefficients des termes en $x^2$ et en $y^2$ sont

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \cos\alpha\cos\beta\sin(\beta - \alpha) + \cos\beta\cos\gamma\sin(\gamma - \beta) + \cos\gamma\cos\alpha\sin(\alpha - \gamma), \\ \mathrm{N} &= \sin\alpha\sin\beta\sin(\beta - \alpha) + \sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma - \beta) + \sin\gamma\sin\alpha\sin(\alpha - \gamma). \end{aligned}$$

Si on calcule leur somme et leur différence, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{M} - \mathrm{N} &= \cos(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \gamma)\sin(\gamma - \beta) \\ &\quad + \cos(\gamma + \alpha)\sin(\alpha - \gamma) \\ &= \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha + \sin 2\gamma - \sin 2\beta + \sin 2\alpha - \sin 2\gamma}{2} = 0, \end{aligned}$$

$$M + N = \cos(\alpha-\beta)\sin(\beta-\alpha) + \cos(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\beta) + \cos(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\gamma)$$

$$= \frac{\sin 2(\beta-\alpha) + \sin 2(\gamma-\beta) + \sin 2(\alpha-\gamma)}{2}$$

$$= -2\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\gamma);$$

on en déduit

$$M = N = -\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\gamma).$$

Ainsi, le lieu est une circonférence du cercle. L'équation (2) étant vérifiée quand on y fait $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, le point A appartient au lieu; il en est de même des points B et C; le lieu est donc le cercle circonscrit au triangle ABC.

**112.** De l'équation (2) qui représente le cercle circonscrit à un triangle dont les côtés sont définis par les équations (1) on déduit aisément une propriété importante d'un système particulier de deux cercles. Supposons que les droites (1) soient tangentes à un cercle de rayon $r$ ayant son centre à l'origine O des coordonnées; il faudra dans les équations (1) faire $p_1 = p_2 = p_3 = r$. Si l'on développe l'équation du cercle (2), elle se met sous la forme

$$(3) \qquad M(x^2+y^2) - Px - Qy + F = 0.$$

Représentons par R le rayon de ce cercle et par D la distance de son centre $O_1$ au centre O du premier; on aura

$$R^2 = \frac{P^2+Q^2}{4M^2} - \frac{F}{M}, \quad D^2 = \frac{P^2+Q^2}{4M^2}, \quad \text{d'où} \quad D^2 - R^2 = \frac{F}{M}.$$

Les rayons du cercle O, déterminés par les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, font deux à deux des angles supplémentaires des angles A, B, C du triangle formé par les trois tangentes. On a donc

$$M = -\sin A \sin B \sin C = -\frac{S}{2R^2},$$

$$F = r^2(\sin A + \sin B + \sin C) = 4r^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{r}{R}S,$$

S désignant la surface du triangle ABC. De ces relations on déduit $\frac{F}{M} = -2Rr$, et par suite

$$(4) \qquad D^2 = R^2 - 2Rr.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer tous les triangles qui sont en même temps inscrits dans un cercle $O_1$ et circonscrits à un cercle O, dont les rayons et la distance des centres vérifient la relation (4). Comme on peut supposer le point $O_1$ placé sur l'axe des $x$, les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ devront vérifier les conditions

$$Q = 0, \quad R^2 = \frac{P^2}{4M^2} - \frac{F}{M}, \quad D^2 = \frac{P^2}{4M^2}.$$

Mais, à cause de la relation (4), à laquelle satisfont les données R, $r$

et D, on peut remplacer ces trois relations par les deux suivantes :

$$(5)\qquad Q = 0\ ,\quad \frac{F}{M} = -2Rr.$$

Soient, en effet, R′ le rayon d'un cercle circonscrit à un triangle A′B′C′, déterminé par des angles $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ qui vérifient les conditions (5), D′ la distance de son centre O′ au point O; on aura, d'après ce qui précède,

$$-\frac{F}{M} = 2R'r\quad,\quad D'^2 = R'^2 - 2R'r.$$

Mais on a aussi, par hypothèse,

$$-\frac{F}{M} = 2Rr\quad,\quad D^2 = R^2 - 2Rr;$$

on en conclut que R′ est égal à R et D′ à D. L'un des trois angles $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, assujettis à vérifier seulement les deux conditions (5), peut donc être pris arbitrairement. Ainsi, *lorsque les rayons* R *et* r *de deux cercles* $O_1$ *et* O *et la distance* D *de leurs centres satisfont à la relation* (4), *on peut construire un triangle inscrit dans* $O_1$ *et circonscrit à* O, *en prenant pour l'un des côtés du triangle une tangente quelconque au cercle* O.

Il existe des théorèmes analogues au précédent et à celui du n° 110 pour des polygones d'un nombre quelconque de côtés.

**113.** Il faut remarquer la forme (2) de l'équation du cercle circonscrit à un triangle. Le premier membre a une signification géométrique très-simple. Pour préciser, supposons que l'origine des coordonnées soit placée à l'intérieur du triangle ABC (fig. 71) et que les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, compris entre 0 et $2\pi$, soient rangés par ordre de grandeur croissante. Considérons un point M ayant pour coordonnées $x$ et $y$ et situé aussi à l'intérieur du triangle; de ce point abaissons des perpendiculaires sur les côtés et joignons les pieds de ces perpendiculaires pour former le triangle DEF.

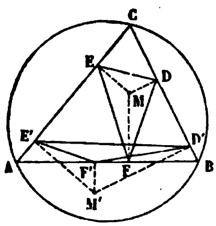


Fig. 71.

Les lettres $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ désignent les longueurs de ces perpendiculaires affectées ici du signe —; ces perpendiculaires sont d'ailleurs dirigées dans le même sens que celles qui ont été menées de l'origine et qui ont servi à déterminer les angles $\alpha, \beta, \gamma$. Le terme $\alpha_1\ \beta_1 \sin(\beta-\alpha)$ étant égal à $MD \times ME \times \sin DME$ représente le double de l'aire du triangle DME; les deux autres termes représentent de même les doubles des triangles EMF, FMD; ainsi le premier membre de l'équation (2) représente le double de l'aire du triangle DEF.

Considérons maintenant un point M′ situé à l'extérieur du triangle ABC. On a, dans le cas de la figure, $\alpha_1 = -M'D'$, $\beta_1 = -M'E'$, $\gamma_1 = +M'F'$; le premier membre de l'équation représente le double de la différence qui existe entre le triangle D′M′E′ et la somme des deux triangles E′M′F′,

F'M'D'; c'est encore le double de l'aire du triangle D'E'F'. Quelle que soit la position du point M dans le plan, le premier membre de l'équation représente le double de l'aire du triangle DEF, affectée du signe + ou du signe —. L'équation (2) exprime donc que l'aire du triangle DEF est nulle, c'est-à-dire que les trois points D, E, F sont en ligne droite.

Si l'on appelle $r$ le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et $d$ la distance d'un point ayant pour coordonnées $x$ et $y$ au centre de ce cercle, le premier membre de l'équation (2), pouvant être mis sous la forme

$$A(x^2 + y^2 + \ldots\ldots),$$

est égal à $A(d^2 - r^2)$. Cette expression conserve le même signe, tant que la distance $d$ est moindre que $r$, c'est-à-dire tant que le point M reste à l'intérieur du cercle, et elle prend un signe contraire quand le point M passe à l'extérieur.

Il résulte de ce qui précède que le lieu des points tels que l'aire du triangle ayant pour sommets les pieds des trois perpendiculaires soit égale à une quantité donnée $k^2$, se compose de deux cercles représentés par les équations

$$\alpha_1\beta_1 \sin(\beta - \alpha) + \beta_1\gamma_1 \sin(\gamma - \beta) + \gamma_1\alpha_1 \sin(\alpha - \gamma) = \pm 2k^2.$$

Ces deux cercles sont concentriques au cercle circonscrit au triangle ABC : l'un est extérieur et toujours réel, quelle que soit l'aire donnée; l'autre est intérieur et n'est réel, que si l'aire donnée est moindre que la valeur absolue de $\frac{Ar^2}{2}$.

## EXERCICES.

1° Exprimer l'aire d'un triangle et d'un polygone quelconque en fonction des coordonnées des sommets.

2° Trouver l'aire d'un triangle formé par trois droites dont on donne les équations.

3° Étant donnés dans un plan $n$ points A, B, C,... et $n$ quantités $m'$, $m''$, $m'''$,... qui correspondent à ces $n$ points; sur la droite AB on prend un point $N_1$, tel que les distances de ce point aux deux premiers points soient dans le rapport de $m''$ à $m'$; puis sur la droite $N_1C$ qui joint $N_1$ au troisième plan on prend un point $N_2$ tel que ses distances aux points $N_1$ et C soient dans le rapport de $m'''$ à $m' + m''$; puis sur la droite $N_2D$ qui joint le point $N_2$ au quatrième point D un point $N_3$, tel que ses distances aux points $N_2$ et D soient dans le rapport de $m''''$ à $m' + m'' + m'''$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au dernier point donné : trouver les coordonnées du dernier point de division que l'on appelle *centre des distances proportionnelles*.

Lorsque les multiplicateurs $m', m'', m''',...$ sont égaux entre eux, le dernier point de division s'appelle *centre des moyennes distances*.

Comme application, trouver les quantités $m'$, $m''$, $m'''$ qui donnent, dans le cas d'un triangle, soit le centre de gravité, soit le centre du cercle inscrit, soit le point de rencontre des trois hauteurs, soit le centre du cercle circonscrit.

4° Trouver le lieu des points tels que la somme des produits des carrés des distances de chacun d'eux à $n$ points donnés par des quantités constantes $m', m'', m''',...$ soit égale à une quantité donnée.

5° Lieu des centres des cercles qui sont vus de deux points donnés sous des angles donnés.

6° Lieu des centres des cercles qui rencontrent, en des points diamétralement opposés, deux cercles donnés.

7° Lieu des points tels que la somme des distances de chacun d'eux à deux droites et en général à plusieurs droites données soit constante.

8° Sur deux droites rectangulaires OX, OY on construit un rectangle variable OABC ayant un périmètre donné $2a$ : la perpendiculaire menée du sommet C sur la diagonale AB passe par un point fixe.

9° Ayant fait la figure qui sert à démontrer le théorème du carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, démontrer que les deux droites qui joignent les extrémités de l'hypoténuse aux sommets des carrés construits sur les côtés opposés se coupent sur la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse.

10° D'un point fixe P on mène des tangentes aux cercles qui passent par deux points donnés ; trouver le lieu du point où la corde des contacts rencontre le diamètre qui passe au point P.

11° Étant donné un hexagone régulier ABCDEF, on joint AC et AE : par le centre on mène une sécante quelconque qui coupe les deux droites AC et AE aux points G et H ; on joint BG et FH ; trouver le lieu du point de rencontre de ces deux droites.

12° Les circonférences décrites sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet, comme diamètres, ont deux à deux même axe radical.

13° Étant données cinq droites, on en prend quatre qui forment un quadrilatère complet, dans lequel les milieux des trois diagonales sont en ligne droite ; les cinq droites ainsi obtenues se coupent au même point.

14° Étant donnés trois points A, B, C, et deux droites X, Y : sur AB comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à X et Y ; on opère de même avec B, C et C, A ; les secondes diagonales des trois parallélogrammes passent au même point.

15° Étant données quatre droites A, B, C, D, on en prend trois pour former un triangle, dont on détermine le point de concours des hauteurs ; les quatre points ainsi obtenus sont en ligne droite.

16° Étant donnés deux cercles fixes, deux cercles variables sont tan-

gents entre eux et aux précédents; trouver le lieu du point de contact des cercles variables.

17° On prend quatre points arbitrairement sur une circonférence : les bissectrices des trois couples de droites qui passent par ces quatre points sont parallèles deux à deux.

18° Lieu du point tel que les cordes de contact des tangentes menées de ce point à trois cercles donnés se coupent en un même point.

19° On donne un angle AOA′ et un point C sur la bissectrice. Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé en C, on joint les points de rencontre B et B′ des côtés de l'angle mobile avec les côtés de l'angle fixe, du point C on abaisse une perpendiculaire sur BB′; trouver le lieu du pied de la perpendiculaire.

20° On donne quatre droites A, B, C, D, qui, prises trois à trois, forment quatre triangles. La droite A appartient à trois de ces triangles, on joint le centre du cercle circonscrit à chacun d'eux au sommet non situé sur A; les trois droites ainsi obtenues se coupent en un même point I; les quatre points analogues à I et les centres des quatre cercles sont sur une même circonférence.

21° Étant donnés divers cercles qui, pris deux à deux, admettent le même axe radical; si un cercle variable coupe deux de ces cercles sous des angles constants, il coupera également chacun des autres cercles sous un angle constant.

22° Le lieu des centres des cercles orthogonaux à deux cercles fixes est l'axe radical.

23° Montrer que le cercle, coupant orthogonalement trois cercles donnés

$$f = 0, \varphi = 0, \psi = 0$$

qui, pris deux à deux, n'ont pas le même axe radical, est le lieu des points dont les polaires, par rapport à ces trois cercles, sont concourantes.

24° Démontrer que les points limites d'un faisceau de cercles et le point à l'infini sur l'axe radical ont chacun même polaire par rapport à tous les cercles du faisceau.

# LIVRE III

## COURBES DU SECOND DEGRÉ

## CHAPITRE PREMIER

### Construction des lignes du second degré.

**114.** L'équation générale du second degré entre les deux variables $x$ et $y$ est de la forme

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,;$$

elle renferme cinq paramètres arbitraires, les rapports de cinq coefficients au sixième.

Pour nous rendre compte des différentes formes de courbes qui peuvent être représentées par cette équation, résolvons-la par rapport à $y$.

Deux cas sont à distinguer, suivant que l'équation contient $y$ au second ou seulement au premier degré, c'est-à-dire suivant que C est différent de zéro ou égal à zéro.

Supposons que le coefficient C ne soit pas nul, et résolvons l'équation par rapport à $y$; on a

$$(2) \qquad y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P},$$

en posant $M = B^2 - AC$, $N = BE - CD$, $P = E^2 - CF$.

Construisons la droite DD′ représentée par l'équation

$$y = -\frac{Bx+E}{C}.$$

Pour chaque valeur de $x$, il faut, à partir de la droite DD′,

porter de part et d'autre sur l'ordonnée une longueur égale à

$$Y = \frac{1}{C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$$

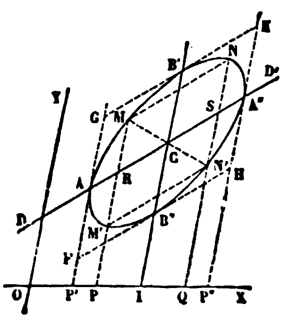


Fig. 72.

La droite DD' (fig. 72), qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe OY, est un *diamètre* de la courbe; la quantité Y est la valeur de l'ordonnée comptée à partir du diamètre. La construction du lieu est ainsi ramenée à l'étude du trinôme

$$Mx^2 + 2Nx + P$$

et, comme la forme du lieu dépend principalement du signe du coefficient M, on distingue trois cas principaux.

### GENRE ELLIPSE

**115.** Considérons d'abord le cas où le coefficient M, c'est-à-dire $B^2 - AC$ a une valeur négative. L'ordonnée Y n'est reélle que si le trinôme a une valeur positive. Le cas que nous examinons se subdivise à son tour en trois autres, suivant la nature des racines de ce trinôme.

1° $N^2 - MP > 0$. Les deux racines du trinôme sont réelles et inégales. Désignons par $x'$ la plus petite et par $x''$ la plus grande; le trinôme peut s'écrire

$$M(x - x')(x - x''), \quad \text{ou} \quad -M(x - x')(x'' - x);$$

le trinôme est positif, et, par conséquent, l'ordonnée Y est réelle, pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $x'$ et $x''$; le trinôme est au contraire négatif, et l'ordonnée imaginaire pour toute valeur de $x$ plus petite que $x'$ ou plus grande que $x''$.

Prenons sur l'axe des $x$ deux points P' et P'' ayant pour abscisses $x'$ et $x''$, et par les points P' et P'' menons des paral-

lèles P'A', P''A'' à l'axe des $y$; la courbe sera toute entière comprise entre ces deux parallèles. L'abscisse $x$ variant de $x'$ à $x''$, l'ordonnée Y conserve une valeur finie, et part de la valeur zéro pour revenir à zéro; on a ainsi une courbe fermée, qui passe par les points A' et A'', et à laquelle on a donné le nom d'*ellipse*.

Une valeur de $x$ comprise entre $x'$ et $x''$ sera l'abscisse d'un point P compris entre P' et P'', et la valeur correspondante de Y sera égale à

$$\frac{1}{C}\sqrt{(-M)\,PP'.\,PP''}.$$

Le produit variable $PP' \times PP''$ des deux segments de la droite P'P'' est égal au carré de l'ordonnée du cercle décrit sur P'P'' comme diamètre; quand le point P va de P' au point I, milieu de P'P'', l'ordonnée du cercle, et par suite la quantité Y qui lui est proportionnelle, va en augmentant; elle diminue au contraire, quand le point P va de I en P''. La quantité Y acquiert donc sa valeur maximum, quand le point P est en I, c'est-à-dire quand $x = \frac{x'+x''}{2} = -\frac{N}{M}$; cette valeur maximum est égale à $\frac{(x''-x')\sqrt{-M}}{2C}$. A partir du point C, milieu du diamètre A'A'', portons sur l'ordonnée, et, de part et d'autre, une longueur égale à cette valeur maximum, nous aurons deux points B' et B'' de la courbe, et, en menant par ces points des parallèles au diamètre, nous formerons un parallélogramme FGKH, dans lequel sera comprise l'ellipse.

Il est clair qu'à deux points P et Q également distants du milieu I correspondent des valeurs égales de Y; ces valeurs, portées de part et d'autre du diamètre DD', donnent les quatre points M, M', N, N'. Les deux triangles CRM, CSN' étant égaux, les trois points M, C, N' sont en ligne droite et le point C est le milieu de MN'; ainsi tous les points de la courbe sont deux à deux symétriques par rapport au point C, milieu du diamètre A'A''; ce point C est donc le *centre* de l'ellipse. On voit également que les droites MN, M'N' sont parallèles au diamètre A'A'' et partagées chacune en deux parties égales

par la droite B′B″; cette droite est un second diamètre. Les deux diamètres A′A″, B′B″, qui partagent chacun en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre, sont dits *diamètres conjugués* de l'ellipse.

2° $N^2 - MP = 0$. Les deux racines $x'$ et $x''$ sont égales, et l'on a

$$x' = x'' = -\frac{N}{M}, \qquad Y = \frac{x - x'}{C}\sqrt{M};$$

le coefficient M étant négatif, la quantité Y est imaginaire pour toutes les valeurs de $x$, excepté pour $x = x'$, et alors $Y = 0$; l'équation n'admettant qu'une solution réelle, le lieu est un point unique C placé sur la droite DD′.

3° $N^2 - MP < 0$, Le trinôme.

$$Mx^2 + 2Nx + P = M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP - N^2}{M},$$

est négatif, et par conséquent Y imaginaire, pour toutes les valeurs de $x$; l'équation, n'ayant pas de solution réelle, ne représente aucun lieu géométrique.

### GENRE HYPERBOLE

**116.** Considérons maintenant le cas où le coefficient M a une valeur positive; ce cas se subdivise aussi en trois.

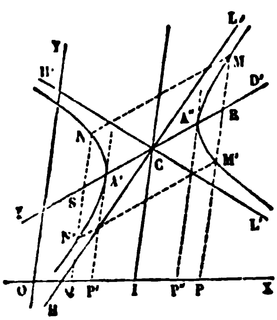


Fig. 72.

1° $N^2 - MP > 0$. Le trinôme

$$Mx^2 + 2Nx + P$$

que l'on met sous la forme

$$M(x - x')(x - x''),$$

est positif, et, par suite, Y est réelle, quand $x$ varie de $x''$ à $+\infty$ et de $x'$ à $-\infty$; d'ailleurs Y varie en même temps de 0 à $\infty$. Prenons, comme précédemment, sur l'axe des $x$ deux points P′ et P″ ayant pour abscisses $x'$ et $x''$ et menons par ces points deux parallèles P′A′, P″A′ à l'axe des $y$; la courbe sera située en

dehors de ces parallèles; elle se compose de deux parties séparées l'une de l'autre et s'étendant à l'infini (fig. 73), on a donné à cette courbe le nom d'*hyperbole*. Si à partir du point I, milieu de P'P'', on prend deux longueurs égales IP et IQ de part et d'autre sur l'axe des $x$, les valeurs corespondantes de Y sont égales; le point C, milieu de A'A'', est le centre de la courbe, et les deux droites DD' et IC sont deux diamètres conjugués.

**117.** Considérons la valeur de $y$,

$$y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}.$$

Lorsque $x$ a une valeur numérique très grande, le premier terme de la quantité placée sous le signe radical est très grand par rapport à la valeur absolue du second; si l'on réduit cette quantité à son premier terme, on a une valeur approchée de $y$,

$$(3) \qquad y_1 = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}.$$

L'équation précédente définit deux droites distinctes, qui se coupent en un point du diamètre DD' dont l'abscisse est égale à $-\frac{N}{M}$, c'est-à-dire à la demi-somme des abscisses des points P' et P''; ce point est donc le centre C de la courbe. Considérons la branche de courbe A''M; si C est positif, cette branche est représentée par l'équation

$$y = -\frac{Bx+E}{C} + \frac{1}{C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}.$$

dans laquelle on fait varier $x$ de $x''$ à $+\infty$; prenons en même temps la droite CL qui a pour équation

$$y_1 = -\frac{Bx+E}{C} + \frac{1}{C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}.$$

Pour une valeur quelconque de $x$ supérieure à $x''$, l'ordonnée de la courbe est inférieure à celle de la droite; ainsi la branche A''M est comprise dans l'angle LCD'. La différence $y_1 - y$ des ordonnées qui correspondent à une même abscisse a pour valeur

$$y_1 - y = \frac{1}{C}\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M} - \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}\right]$$
$$= \frac{N^2 - MP}{CM} \frac{1}{\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M} + \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}}.$$

Quand $x$ augmente indéfiniment, le dénominateur augmente indéfiniment, et, par conséquent, la différence $y_1 - y$ tend vers zéro. La droite CL, dont s'approche indéfiniment la branche de courbe A″M, est dite *asymptote* de cette branche de courbe qui est comprise dans l'angle LCD′. On verrait de même que les branches A″M′, A′N, A′N′ sont comprises dans les angles L′CD′, H′CD, HCD, et ont pour asymptotes les droites CL′, CH′, CH. Ainsi la courbe est comprise dans les deux angles opposés par le sommet LCL′, HCH′, et chacune des droites indéfinies HL, H′L′ est asymptote à deux branches de courbe.

Il est bon de remarquer que les coefficients angulaires des asymptotes sont donnés par l'équation

(4) $$m = \frac{-B \pm \sqrt{M}}{C},$$

ou (5) $$Cm^2 + 2Bm + A = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant dans les termes du second degré de l'équation (1) $x$ par 1 et $y$ par $m$.

**118.** 2° $N^2 - MP < 0$. Le trinôme.

$$Mx^2 + 2Nx + P = M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}$$

étant la somme de deux quantités positives, la valeur de Y est réelle pour toutes les valeurs de $x$ et ne s'annule jamais; Y acquiert sa valeur minimum $\frac{1}{C}\sqrt{\frac{MP-N^2}{M}}$ pour $x = -\frac{N}{M}$. Soit I (fig. 74) le point de l'axe des $x$ dont l'abscisse est $-\frac{N}{M}$; menons IC parallèle à l'axe OY et prenons les longueurs CB′ et CB″ égales à la valeur minimum de Y; les deux points B′ et

B″ appartiennent au lieu. Quand $x$ varie de $-\frac{N}{M}$ à $+\infty$, ou de $-\frac{N}{M}$ à $-\infty$, la valeur de Y croît indéfiniment; si donc, par les points B′ et B″, on mène des parallèles au diamètre DD′, la courbe se compose de deux parties distinctes situées en dehors des parallèles et s'étendant à l'infini dans les deux sens. On donne encore à cette courbe le nom d'*hyperbole*.

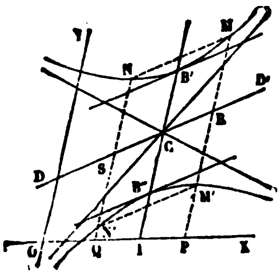


Fig. 74.

Si l'on attribue à $x$ les deux valeurs $x=-\frac{N}{M}\pm\alpha$, ce qui revient à porter à partir du point I les deux distances $IP=IQ=\alpha$, les valeurs correspondantes de Y sont égales; il en résulte que le point C est centre de la courbe, et que les deux droites DD′, IC sont deux diamètres conjugués.

On reconnaît également que les deux droites

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{1}{C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}$$

qui se coupent au centre, sont asymptotes des branches infinies.

**119.** 3° $N^2-MP=0$. On a alors

$$Y=\frac{1}{C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2}=\sqrt{M}\left(x+\frac{N}{M}\right),$$

et

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{\sqrt{M}}{C}\left(x+\frac{N}{M}\right).$$

Le lieu se compose de deux droites qui se coupent sur le diamètre DD′.

GENRE PARABOLE

**120.** Supposons enfin que le coefficient M ou $B^2$-AC soit nul. La valeur de Y se réduit à

$$Y = \frac{1}{C}\sqrt{2Nx+P}.$$

Nous subdivisons ce cas en plusieurs autres.

1° $N > 0$. Si l'on pose $-\frac{P}{2N} = x'$, on a

$$Y = \frac{1}{C}\sqrt{2N(x-x')}.$$

Quand $x$ varie de $x'$ à $+\infty$, la quantité Y est réelle et varie de 0 à $+\infty$; mais elle est imaginaire pour les valeurs de $x$ inférieures à $x'$. Si donc par le point P', dont l'abscisse est $x'$, on mène P'A' parallèle à l'axe des $y$, la courbe est tout entière située à droite de cette parallèle; elle passe par le point A' et s'étend à l'infini de part et d'autre du diamètre DD' (fig. 75); on a donné à cette courbe le nom de *parabole*.

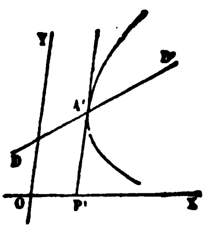


Fig. 75.

2° $N < 0$. La quantité Y est réelle quand $x$ varie de $x'$ à $-\infty$; la courbe passe par le point A' et s'étend à l'infini du côté des $x$ négatives; on l'appelle aussi parabole.

3° $N = 0$. La valeur de $y$ se réduit à

$$y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{P}$$

Si P est positif, cette équation représente deux droites, parallèles au diamètre DD', et situées à égale distance de ce diamètre. Si $P = 0$, ces deux parallèles se confondent avec le diamètre; enfin, si P est négatif, l'équation n'a pas de solution réelle.

**121.** Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le coefficient C est différent de zéro. Lorsque le coefficient C est nul, et le coefficient A différent de zéro, on pourrait résoudre l'équation par rapport à $x$ et construire le lieu comme précédemment; le premier terme du trinôme placé sous le

radical ayant pour coefficient $M = B^2$, quantité positive ou nulle, le lieu sera du genre hyperbole ou du genre parabole. Mais il est préférable de résoudre l'équation par rapport à la variable qui n'y entre qu'au premier degré; d'ailleurs, cette méthode est seule applicable quand les deux coefficients A et C sont nuls à la fois.

En ordonnant l'équation (1) par rapport à $y$, on a

$$2(Bx + E)\,y + Ax^2 + 2Dx + F = 0,$$

d'où

$$y = -\frac{Ax^2 + 2Dx + F}{2(Bx + E)}.$$

Supposons d'abord que B soit différent de zéro et effectuons la division, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de $x$, jusqu'à ce que l'on arrive à un reste indépendant de $x$. Nous distinguerons deux cas, suivant que le reste est différent de zéro ou égal à zéro. Dans le premier cas on obtiendra un résultat de la forme

$$y = ax + b + \frac{r}{2(Bx + E)} = ax + b + \frac{c}{x - d}.$$

Pour fixer les idées, supposons $c > 0$. Construisons le lieu auxiliaire défini par l'équation $y = ax + b$, et posons $Y = \frac{c}{x - d}$. L'équation $y = ax + b$ représente une droite HL (fig. 76); pour chaque valeur de $x$, il faut augmenter l'ordonnée de cette droite d'une quantité QM égale à la valeur de Y. Cette quantité devient infinie pour $x = d$; prenons donc un point I ayant pour abscisse $d$ et menons H'L' parallèle à OY. Si l'on donne à $x$ une valeur $d + x'$, $x'$ étant positive, Y a une valeur positive, et quand $x'$ tend vers zéro, Y augmente indéfiniment;

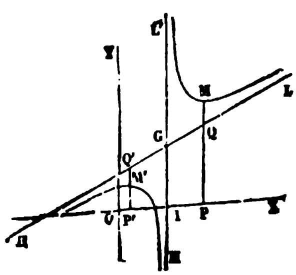


Fig. 76.

si, au contraire, $x'$ augmente indéfiniment, Y tend vers zéro; on obtient ainsi une première courbe comprise dans l'angle

L′CL et formée de deux branches infinies, asymptotes respectivement aux deux droites CL et CL′. Aux valeurs de $x$ inférieures à $d$ correspondent des valeurs négatives de Y. et l'on obtient une seconde courbe comprise dans l'angle HCH′, et formée de deux branches infinies asymptotes aux droites CH, CH′. A deux valeurs de $x'$ égales et de signes contraires, correspondent des valeurs de Y qui sont aussi égales et de signes contraires, et par suite, deux points M et M′ symétriques par rapport au point C qui est centre de la courbe. Si la constante $c$ était négative, on obtiendrait encore une courbe formée de deux parties distinctes, situées dans les angles HCL′, H′CL. Dans les deux cas, la courbe est une hyperbole.

Si le reste de la division est nul, on a

$$Ax^2 + 2Dx + F = -2(Bx + E)(ax + b),$$

et l'équation prend la forme $(y - ax - b)(Bx + E) = 0$; elle se décompose en deux autres, $y - ax - b = 0$, $Bx + E = 0$; qui représentent deux droites, dont l'une est parallèle à l'axe des $y$.

Lorsque A est nul en même temps que C, il suffit de faire dans la discussion précédente $a = 0$; la droite DD′ devient parallèle à l'axe des $x$; on obtient ainsi, soit une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles aux axes des coordonnées, soit deux droites respectivement parallèles aux axes.

Lorsque les deux coefficients B et C, sont nuls, la valeur de $y$ est de la forme $y = ax^2 + bx + c$; elle est réelle quelle que soit la valeur de $x$; en faisant varier $x$ de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient une courbe s'étendant à l'infini dans les deux sens; c'est une parabole.

**122.** Résumé. Dans la discussion de l'équation du second degré, nous avons trouvé trois espèces de courbes : des courbes fermées, des courbes formées de deux parties distinctes s'étendant à l'infini dans les deux sens, des courbes formées d'une seule partie s'étendant à l'infini dans les deux sens. On a donné à ces trois espèces de courbes les noms d'ellipse, d'hyperbole et de parabole.

Nous avons vu au commencement de cet ouvrage (liv. I, chap. II) que les courbes désignées par les mêmes noms en Géométrie élémentaire sont représentées par des équations du second degré. Nous verrons plus tard que, réciproquement, toutes les courbes représentées par l'équation du second degré jouissent des propriétés qui servent de définitions en Géométrie élémentaire, de telle sorte que les deux modes de définitions sont équivalents.

En résumant la discussion, on voit que c'est le signe de la quantité $M = B^2 - AC$ qui indique l'espèce de la courbe représentée par l'équation du second degré; la courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la quantité M est négative, positive ou nulle.

Toutefois il importe de se rappeler que l'équation ne représente pas toujours une courbe, ni même un lieu; lorsque la quantité M est négative, l'équation représente une ellipse ou un point, ou n'admet pas de solution réelle; lorsque cette quantité est positive, l'équation représente une hyperbole, ou deux droites qui se coupent; enfin quand $M = 0$, l'équation représente, soit une parabole, soit deux droites parallèles, ou une seule droite, ou elle n'admet pas de solution réelle.

### FORMES DIVERSES DU POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ A DEUX VARIABLES

**123.** La discussion précédente conduit à mettre le premier membre de l'équation de la courbe sous diverses formes qu'il est important de signaler. Nous distinguerons encore deux cas principaux, suivant que C est différent de zéro ou égal à zéro.

1° $C \lesseqgtr 0$. En résolvant l'équation par rapport à $y$, comme nous l'avons fait, isolant le radical $\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}$ et élevant au carré, on arrive à mettre l'équation sous la forme

$$(6) \qquad (Cy + Bx + E)^2 - (Mx^2 + 2Nx + P) = 0$$

En supposant M différent de zéro (genre ellipse ou hyperbole) et décomposant le trinôme $Mx^2 + 2Nx + P$ en carrés, on a la forme

$$(7) \qquad (Cy + Bx + E)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{N^2 - MP}{M} = 0$$

En supposant $M = 0$ (genre parabole), on déduit de (6) la forme

$$(8) \qquad (Cy + Bx + E)^2 - (2Nx + P) = 0$$

Ainsi, lorsque $M \lesseqgtr 0$, le premier membre de l'équation, est décomposé en trois carrés (7) dont le dernier est une constante, ces carrés étant affectés de signes + ou —, le premier carré est affecté du signe +, le deuxième est multiplié par $-M$ qui peut être positif ou négatif, le troisième peut être positif ou négatif. Les différentes combinaisons de signes correspondent aux cas que nous avons rencontrés dans la discussion générale précédente. Nous les résumerons dans le tableau qui suit, où nous désignerons le carré positif $(Cy + Bx + E)$ par $\alpha^2$, le carré $-M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2$ par $+\beta^2$ ou $-\beta^2$, suivant que le coefficient $-M$ est positif ou négatif, enfin la constante $\frac{N^2 - MP}{M}$ par $+k^2$ ou $-k^2$, suivant qu'elle est positive ou négative.

Lorsque $M = 0$, l'équation prend la forme (8) d'un carré $\alpha^2$ suivi d'une fonction linéaire $(2Nx + P)$ que nous désignerons par $\gamma$ quand N est différent de zéro; quand M est nul, cette fonction linéaire se réduit à une constante P, que nous désignerons par $+k^2$ ou $-k^2$, suivant qu'elle est positive ou négative.

Nous aurons ainsi le tableau ci-dessous, dans lequel il faut pour le moment ne pas tenir compte des indications inscrites dans la troisième colonne qui se rapporte au cas $C = 0$ examiné plus loin.

| GENRE | $C \gtrless 0$ | $C = 0$ | COURBE | FORME DE L'ÉQUATION |
|---|---|---|---|---|
| $M < 0$ Ellipse. | $N^2 - MP > 0$<br>$N^2 - MP < 0$<br>$N^2 - MP = 0$ | Si $C = 0$ la courbe n'est jamais une ellipse. | Ellipse réelle.<br>Ellipse imaginaire<br>Point. | $\alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 0$<br>$\alpha^2 + \beta^2 + k^2 = 0$<br>$\alpha^2 + \beta^2 = 0$ |
| $M > 0$, Hyperbole. | $N^2 - MP \gtrless 0$<br>$N^2 - MP = 0$ | $c \gtrless 0$<br>$c = 0$ | Hyperbole.<br>Deux droites qui se coupent. | $\alpha^2 - \beta^2 \pm k^2 = 0$<br>$\alpha^2 - \beta^2 = 0$ |
| $M = 0$ Parabole. | $N \gtrless 0$<br>$N = 0, P > 0$<br>$N = 0, P < 0$<br>$N = 0, P = 0$ | $B = 0, E \gtrless 0$<br>$B = 0$, $E = 0$ $\begin{cases} D^2 - AF > 0 \\ D^2 - AF < 0 \\ D^2 - AF = 0 \end{cases}$ | Parabole.<br>Droites parallèles réelles.<br>Id. imaginaire.<br>Droites confondues. | $\alpha^2 - \gamma = 0$<br>$\alpha^2 - k^2 = 0$<br>$\alpha^2 + k^2 = 0$<br>$\alpha^2 = 0$ |

La constante $c$ qui figure dans la troisième colonne a pour valeur $\frac{1}{2B^2}(-AE^2 - FB^2 + 2BDE)$.

Ce tableau rend manifeste ce fait que si $M < 0$, avec $N^2 - MP < 0$ l'équation ne représente aucun lieu, car son premier membre est alors une somme de trois carrés $\alpha^2 + \beta^2 + k^2$ qui ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle des coordonnées : on convient de dire que l'équation représente une ellipse imaginaire. De même on voit immédiatement que si $M < 0$ avec $N^2 - MP = 0$ l'équation représente un point, car son premier membre $\alpha^2 + \beta^2$ étant une somme de deux carrés ne peut s'annuler qu'au point dont les coordonnées annulent à la fois ces deux carrés, c'est-à-dire $Cy + Bx + E$ et $x + \frac{N}{M}$. Dans le cas du genre hyperbole, l'équation représente toujours un lieu : si $N^2 - MP = 0$, elle représente, comme nous avons vu, deux lignes droites qui se coupent ; cela est évident d'après le tableau précédent, car l'équation, étant alors de la forme $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, se décompose en un produit de deux facteurs réels du premier degré

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=0$; elle est donc équivalente au système de deux équations

$$\alpha+\beta=0, \quad \alpha-\beta=0$$

qui représentent deux droites passant par le point d'intersection de $\alpha=0$ et $\beta=0$. Par analogie avec ce cas, on dit quelquefois qu'une ellipse point est un ensemble de droites *imaginaires* qui se coupent, car l'équation est alors de la forme $\alpha^2+\beta^2=0$ et est algébriquement équivalente à l'ensemble des deux équations linéaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=0 \quad \alpha-\beta\sqrt{-1}=0$$

qui ne représentent rien, mais qu'on convient d'appeler équations de deux droites imaginaires conjuguées : ces deux équations sont satisfaites par les coordonnées du point qui annulent à la fois $\alpha$ et $\beta$, c'est-à-dire du point auquel est réduite l'ellipse. On convient de dire que les deux droites imaginaires se coupent en ce point.

2° $C=0$. La courbe n'est alors jamais du genre ellipse.

Si B est différent de zéro, on peut, comme on l'a vu dans le n° 121, mettre l'équation sous la forme

$$y=ax+b+\frac{c}{x-d}$$

où la constante $c$ qui est le reste de la division de

$$-(Ax^2+2Dx+F)$$

pa $2B\left(x+\frac{E}{B}\right)$ a pour valeur

$$c=\frac{1}{2B^2}(-AE^2-FB^2+2BDE);$$

l'équation s'écrit donc en chassant le dénominateur

$$(y-ax-b)(x-d)-c=0.$$

Le premier terme est un produit de facteurs linéaires en $x$ et $y$ : on peut aussi le mettre sous la forme d'une différence de carrés $\alpha^2-\beta^2$ en écrivant

$$\frac{(y-ax-b+x-d)^2}{2}-\frac{(y-ax-b-x+d)^2}{2}-c=0$$

équation de la forme $\alpha^2-\beta^2-c=0$, $c$ désignant une constante positive négative ou nulle.

Si $c$ est différent de zéro, on a une véritable hyperbole; si $c=0$, le premier membre de l'équation se décompose en un produit de deux facteurs linéaires et la courbe se compose de deux droites qui se coupent.

Si B est nul en même temps que C, E étant différent de o, l'équation est

$$Ax^2+2Dx+2Ey+F=0;$$

elle représente une parabole et peut s'écrire sous la forme $\alpha^2-\gamma=0$, $\alpha$ et $\gamma$ désignant deux fonctions linéaires dont la première se réduit à $x$. Si en outre E est nul, l'équation est un trinôme en $x$ égal à zéro : on peut l'écrire :

$$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2-\frac{D^2-AF}{A^2}=0;$$

elle représente deux droites parallèles réelles, imaginaires ou confondues, suivant que $D^2-AF$ est positif, négatif ou nul. Le terme $x+\frac{D}{A}$ est une fonction linéaire $\alpha$, la constante $\frac{D^2-AF}{A^2}$ est de la forme $\pm k^2$; l'équation est donc alors de la forme $\alpha^2\pm k^2=0$.

Ces résultats sont résumés dans le tableau de la page 129; les différentes hypothèses correspondant au cas $C=0$ sont résumées dans la troisième colonne.

Remarque. Si l'on forme la quantité $N^2-MP$, en remplaçant M, N, P par leurs valeurs en fonction des coefficients A, B, C, D, E, F, on trouve

(9) $N^2-MP=-C(ACF-AE^2-CD^2-FB^2+2BDE).$

La quantité, entre parenthèses, qui joue un rôle important dans la théorie, se nomme le *discriminant* de la courbe : on la désigne par $\Delta$ :

$$\Delta = ACF - AE^2 - CD^2 - FB^2 + 2BDE.$$

Il résulte de la discussion que nous avons faite et qui est résumée dans le tableau précédent que *la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe soit un système de deux droites réelles, imaginaires ou confondues est*

$$\Delta = 0.$$

En effet, si C et M ne sont nuls ni l'un ni l'autre, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation représente deux droites est $N^2 - MP = 0$, c'est-à-dire d'après (9) $\Delta = 0$; si C est différent de zéro et M nul, cette condition est $N = 0$ c'est-à-dire encore $\Delta = 0$.

Si $C = 0$, et B différent de zéro, la condition est $c = 0$, c'est-à-dire d'après la valeur de $c$, $\Delta = 0$.

Si C et B sont nuls, cette condition est $E = 0$, c'est-à-dire encore $\Delta = 0$.

**124.** Cherchons directement la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation générale du second degré représente deux droites réelles ou imaginaires, c'est-à-dire pour que son premier membre puisse se décomposer en un produit de facteurs linéaires en $x$ et $y$ :

$$(10)\quad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F \equiv (lx+my+p)(l'x+m'y+p').$$

Remplaçons dans cette identité $x$ et $y$ par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, puis chassons le dénominateur $z^2$, nous aurons une nouvelle identité de la forme

$$(11)\quad f(x,y,z) = QR$$

où $f(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$

$$Q = lx + my + pz\ ,\quad R = l'x + m'y + p'z.$$

Inversement, si l'identité (11) a lieu, on remonte à l'identité (10) en faisant $z = 1$. Prenons les dérivées partielles successives des deux membres de l'identité (11) par rapport à $x, y, z$, nous aurons

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
f'_x &= 2(Ax + By + Dz) = lR + l'Q \\
f'_y &= 2(Bx + Cy + Ez) = mR + m'Q \\
f'_z &= 2(Dx + Ey + Fz) = pR + p'Q.
\end{aligned}
$$

Il existe évidemment au moins un système de valeurs de $x, y, z$ , $x = a$ , $y = b$ , $z = c$ qui annulent à la fois les fonctions linéaires P et Q , $a$ , $b$ , $c$ n'étant pas nuls tous trois. D'après les identités (12), les mêmes valeurs $a$, $b$, $c$ annulent simultanément $f'_x$ , $f'_y$ , $f'_z$. Ainsi, lorsque la conique est décomposée en deux droites, les trois équations

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
Ax + By + Dz &= 0 \\
Bx + Cy + Ez &= 0 \\
Dx + Ey + Fz &= 0
\end{aligned}
$$

linéaires et homogènes en $x, y, z$ admettent au moins une solution $x = a$ , $y = b$ , $z = c$ dans laquelle les trois inconnues ne sont pas nulles à la fois. Donc le déterminant des coefficients

$$
\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}
$$

est nul. Ce déterminant n'est autre chose que le discriminant écrit plus haut (Remarque) sous forme développée.

La condition $\Delta = 0$ est donc nécessaire. Elle est suffisante. En effet, supposons-la remplie : il existe alors un système de valeurs $a$, $b$, $c$, de $x$, $y$, $z$, non nulles toutes trois, vérifiant les équations (13), c'est-à-dire annulant $f'_x$ , $f'_y$ , $f'_z$. Soit par exemple $c$ différent de zéro : faisant le changement de variables,

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
x &= az' + x' \\
y &= bz' + y' \\
z &= cz',
\end{aligned}
$$

la fonction $f(x, y, z)$ deviendra

$$f(az'+x', bz'+y', cz'),$$

c'est-à-dire en développant et se rappelant que la fonction est homogène et du second degré en $x$, $y$, $z$ et que par suite ses dérivées sont homogènes et du premier degré,

$$f(x, y, z) = z'^2 f(a, b, c) + x'z'f'_a + y'z'f'_b + Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2.$$

Les dérivées $f'_a$ et $f'$ sont nulles : $f(a, b, c)$ est nul aussi en vertu de l'identité facile à vérifier (théorème des fonctions homogènes).

$$2f(a, b, c) = af'_a + bf'_b + cf'_c.$$

La fonction $f(x,y,z)$ est donc identique à l'expression $Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2$ qui se décompose évidemment en un produit de deux facteurs linéaires $(\lambda x' + \mu y')(\lambda' x' + \mu' y')$ et l'on a identiquement

$$f(x, y, z) = (\lambda x' + \mu y')(\lambda' x' + \mu' y').$$

Revenant aux variables $x$, $y$, $z$ à l'aide des équations (14) qui donnent

$$z' = \frac{z}{c} \quad , \quad x' = x - \frac{a}{c}z \quad , \quad y' = y - \frac{b}{c}z,$$

on a pour $f$ une expression de la forme

$$f(x, y, z) = (lx + my + pz)(l'x + m'y + p'z).$$

Remarque. Nous désignerons par $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ les mineurs du discriminant $\Delta$ relatifs aux éléments A, B, C, D, E, F; ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= CF - E^2 \quad , \quad \mathbf{b} = DE - BF \ , \ \mathbf{c} = AF - D^2 \\ \mathbf{d} &= BE - CD \quad , \quad \mathbf{e} = BD - AE \ , \ \mathbf{f} = AC - B^2. \end{aligned}$$

Le genre de la conique dépend du signe de $\mathbf{f}$ : quand $\mathbf{f}$ est nul, la courbe est du genre parabole.

D'après ces notations, on a en développant le déterminant $\Delta$ par rapport aux éléments d'une ligne

$$\Delta = A\mathbf{a} + B\mathbf{b} + D\mathbf{d} = B\mathbf{b} + C\mathbf{c} + E\mathbf{e} = D\mathbf{d} + E\mathbf{e} + F\mathbf{f}.$$

**124 *bis*.** Pour terminer, cherchons les conditions néces-

saires et suffisantes pour que la conique soit formée de deux droites confondues. Le premier membre de l'équation est alors le carré parfait d'une fonction linéaire des coordonnées et l'on a l'identité

$$(15) \qquad f(x, y, z) = (lx + my + pz)^2.$$

En prenant les dérivées partielles des deux membres de cette identité, on voit immédiatement que les trois équations linéaires (13) se réduisent à une seule

$$(16) \qquad lx + my + pz = 0.$$

Elles ont donc leurs coefficients proportionnels, ce qui revient à dire que tous les mineurs de $\Delta$ sont nuls.

$$(17) \quad \mathbf{a} = 0, \ \mathbf{b} = 0, \ \mathbf{c} = 0, \ \mathbf{d} = 0, \ \mathbf{e} = 0, \ \mathbf{f} = 0.$$

Par exemple, les conditions

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$$

donnent en chassant les dénominations $\mathbf{f} = 0$, $\mathbf{d} = 0$; etc...

On peut aussi vérifier directement ces conditions, car l'identité (15) donne

$$A = l^2, \ C = m^2, \ F = p^2$$
$$B = lm, \ D = lp, \ E = mp.$$

Formant les mineurs **a**, **b**, **c**,... on trouve qu'ils sont tous nuls.

Ces conditions (17) sont d'ailleurs suffisantes pour que le premier membre de l'équation soit un carré parfait. En effet, si elles sont remplies, les trois coefficients A, C, F ne peuvent être nuls tous trois, car les conditions (17) exigeraient que B, D, E fussent nuls aussi et tous les coefficients seraient nuls. Supposons alors A différent de zéro, on aura

$$Af(x, y, z) = A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2 + 2ADxz + 2AEyz + AFz^2.$$

Or, d'après les conditions (17) supposées remplies, on a

$$AC = B^2 \ , \ AE = BD \ , \ AF = D^2$$

et la relation ci-dessus donne

$$Af(x, y, z) = (Ax + By + Dz)^2.$$

Nous reviendrons sur ce sujet avec plus de détails à la fin du livre III.

### TANGENTE AUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

**125.** Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe ; si l'on appelle $x$ et $y$ les coordonnées du point de contact M, X et Y les coordonnées variable d'un point quelconque de la tangente, nous avons vu (n° 89) que la tangente est représentée par l'équation

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0,$$

ou

$$Xf'_x + Yf'_y - (xf'_x + yf'_y) = 0.$$

Lorsque la courbe est du second degré, on a

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F;$$
$$f'_x = 2(Ax + By + D) \quad , \quad f'_y = 2(Bx + Cy + E),$$
$$xf'_x + yf'_y = 2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey).$$

Le point de contact M étant situé sur la courbe, ses coordonnées $x$ et $y$ vérifient l'équation

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,;$$

on en déduit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = -(2Dx + 2Ey + F),$$

et, par suite,

$$xf'_x + yf'_y = -2(Dx + Ey + F).$$

L'équation de la tangente, au point dont les coordonnées sont $x$ et $y$, devient ainsi

$$(2)\quad (Ax+By+D)X+(Bx+Cy+E)Y+(Dx+Ey+F)=0.$$

On remarque que les coordonnées $x$ et $y$ du point de contact n'y entrent qu'au premier degré. Comme cette équation peut être mise sous la forme

$$(3)\quad (AX+BY+D)x+(BX+CY+E)y+(DX+EY+F)=0,$$

on remarque aussi qu'elle ne change pas, quand on permute X et $x$, Y et $y$.

Proposons-nous maintenant de mener des tangentes à la courbe par un point donné P, non situé sur la courbe, et ayant pour coordonnées $x_1$ et $y_1$. Prenons pour inconnues les coordonnées $x$ et $y$ de l'un des points de contact M; ces coordonnées doivent vérifier l'équation (1); la tangente au point M est représentée par l'équation (2); cette tangente devant passer par le point P, les coordonnées de ce point vérifieront l'équation (2) ou l'équation (3), et l'on aura

$$(4)\quad (Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+Cy_1+E)y+Dx_1+Ey_1+F=0.$$

Les coordonnées $x$ et $y$ sont donc déterminées par les deux équations simultanées (1) et (4). L'une étant du second degré, l'autre du premier degré, le système de ces deux équations admet deux solutions, et l'on peut mener par un point donné P deux tangentes à une courbe du second degré. La résolution de ces deux équations revient à chercher les points d'intersection des lignes définies par chacune d'elles; la première est la courbe proposée, la seconde une droite passant par les deux points de contact. On peut remarquer que l'équation (4) de la corde des contacts a la même forme que l'équation (2) de la tangente; il suffit de remplacer dans celle-ci les coordonnées du point de contact par celles du point P.

**126.** Cherchons la condition pour qu'une droite $y=mx+k$ soit tangente à une courbe du second degré. Si dans l'équation (1) on remplace $y$ par $mx+k$, on obtient une équation

du second degré en $x$, donnant les abscisses des points d'intersection de la droite et de la courbe; la droite devient tangente, quand les deux racines sont égales; on obtient ainsi l'équation de condition

$$\mathbf{a}m^2 - 2\mathbf{b}m + \mathbf{c} + 2\mathbf{d}mk - 2\mathbf{e}k + \mathbf{f}k^2 = 0.$$

Si l'on prend l'équation de la droite sous la forme

$$ux + vy + 1 = 0,$$

la condition devient

$$\mathbf{a}u^2 + 2\mathbf{b}uv + \mathbf{c}v^2 + 2\mathbf{d}u + 2\mathbf{e}v + \mathbf{f} = 0. \tag{5}$$

On rendra le calcul plus symétrique de la façon suivante. Considérons la droite

$$uX + vY + 1 = 0$$

et supposons qu'elle soit tangente à la courbe au point de coordonnées $x$ et $y$. Alors l'équation de la droite devra être identique à celle de la tangente en ce point et l'on devra avoir, en désignant par $\lambda$ un coefficient de proportionalité :

$$\begin{aligned} u &= \lambda(Ax + By + D) \\ v &= \lambda(Bx + Cy + E) \\ 1 &= \lambda(Dx + Ey + F). \end{aligned} \tag{6}$$

En multipliant la première de ces équations par $x$, la deuxième par $y$ et les ajoutant à la troisième on a :

$$ux + vy + 1 = \lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F);$$

comme le point $x,y$ est sur la courbe, le second membre est nul et l'on a :

$$ux + vy + 1 = 0$$

ou $$\lambda(ux + vy + 1) = 0.$$

Cette équation jointe aux équations (6) donne un système de quatre équations du premier degré en $\lambda x$, $\lambda y$ et $\lambda$. L'élimination de ces trois quantités fournit la condition cherchée sous forme d'un déterminant :

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & 1 \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dont le développement conduit à l'équation (5).

# CHAPITRE II.

## Centre, diamètres et axes des courbes du second degré.

### CENTRE.

**127.** Nous avons appelé centre d'une courbe un point fixe C, par rapport auquel tous les points de la courbe sont symétriques deux à deux. En discutant l'équation générale du second degré, nous avons reconnu que l'ellipse et l'hyperbole ont un centre. Nous nous proposons maintenant de rechercher directement le centre d'une courbe du second degré, sans résoudre l'équation. La méthode que nous suivrons repose sur ce théorème : quand l'origine des coordonnées est centre d'une ligne du second degré, l'équation de la ligne ne contient pas de termes du premier degré.

Soit, en effet,

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

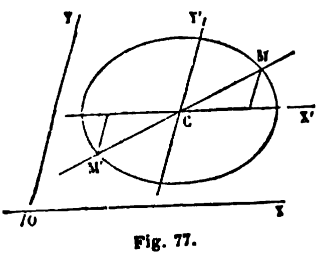


Fig. 77.

l'équation d'une ligne du second degré ayant l'origine pour centre (fig. 77); l'équation d'une droite MM' menée par l'origine est de forme $y = mx$. L'élimination de $x$ entre cette équation et celle de la courbe donne l'équation

$$(2) \qquad (A + 2Bm + Cm^2)x^2 + 2(D + Em)x + F = 0,$$

qui détermine les abscisses des deux points de rencontre. L'origine étant le milieu de la droite MM', l'équation précédente doit avoir ses deux racines égales et de signes contraires, ce qui exige que le coefficient de la première puissance de $x$ soit égal à zéro; on a ainsi $D + Em = 0$, et, comme cette con-

dition doit être vérifiée pour une infinité de valeurs de $m$, on doit avoir séparément $D=0$, $E=0$. Réciproquement, lorsque ces conditions sont remplies, l'équation (2) a ses deux racines égales et de signes contraires, quelle que soit la valeur de $m$, et, par suite, l'origine est centre de la courbe.

**128.** Pour reconnaître si un lieu du second degré a un centre, on transportera les axes parallèlement à eux-mêmes en un point arbitraire, dont nous désignerons les coordonnées par $a$ et $b$, puis on examinera si l'on peut déterminer ces quantités de manière que la nouvelle équation ne renferme pas de termes du premier degré.

Les formules pour déplacer les axes parallèlement à eux-mêmes sont $x=a+x'$, $y=b+y'$. En substituant dans l'équation (1), on obtient l'équation nouvelle

$$(3)\quad \begin{aligned} &Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2(Aa+Bb+D)x'+2(Ba+Cb+E)y' \\ &\quad +Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F=0, \end{aligned}$$

dont il importe de remarquer la composition. Désignons, pour abréger, par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (1) qui est une fonction entière du second degré en $x$ et $y$; dans l'équation (3), les termes du second degré sont les mêmes que dans l'équation (1); les termes du premier degré ont pour coefficients les dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ prises par rapport aux variables $x$ et $y$, et dans lesquelles on a remplacé ces variables par $a$ et $b$; enfin le terme constant est la valeur que prend le polynôme $f(x, y)$ pour $x=a$, $y=b$. L'équation (2) peut donc s'écrire ainsi :

$$(4)\quad Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+f'_a(a, b)x'+f'_b(a, b)y'+f(a, b)=0.$$

En égalant à zéro les coefficients de $x'$ et de $y'$, on obtient les deux équations du premier degré

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} Aa+Bb+D=0. \\ Ba+Cb+E=0. \end{aligned} \right.$$

On voit par là *que l'on détermine le centre d'une courbe du second degré en résolvant les deux équations que l'on obtient en éga-*

*lant à zéro les dérivées partielles du premier membre de l'équation proposée, prises par rapport à* x *et à* y.

**129.** Si l'on considère $a$ et $b$ comme des coordonnées variables, chacune des équations (3) définit une droite, et il y a lieu de distinguer plusieurs cas, suivant que le dénominateur commun des valeurs des inconnues, ou le déterminant $AC - B^2$ que nous avons représenté par $-$ M ou $\mathbf{f}$, est différent de zéro, ou égal à zéro.

2° Lorsque le déterminant $\mathbf{f}$ est différent de zéro, les deux équations sont vérifiées par un système de valeurs de $a$ et de $b$ et par un seul; les deux droites se coupent; la ligne admet un centre et un centre unique, dont les coordonnées sont, d'après les notations du n° 124

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{f}}, \\ b &= \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{f}}. \end{aligned} \right.$$

2° Lorsque le déterminant $\mathbf{f}$ est égal à zéro (genre parabole), les droites sont parallèles ou se confondent; dans le premier cas, le lieu n'a pas de centre; dans le second cas, il admet comme centre chacun des points de la droite définie par l'une des équations (5). Il est facile de voir que, dans ce dernier cas, le lieu, s'il existe, se compose nécessairement de deux droites parallèles. Soit, en effet, CC′ la droite lieu des centres (fig. 78), et M un point appartenant au lieu; joignons le point M aux divers points de la droite CC′, et prolongeons chacune de ces droites d'une longueur égale à elle-même, les points N, N′, N″..., ainsi obtenus, appartiendront encore au lieu; or, tous ces points sont situés sur une parallèle à CC′. En opérant de même avec le point N, on aurait une seconde parallèle MM′. D'ailleurs, l'équation (1) ne peut pas représenter d'autres points que ceux de ces droites; autrement une droite rencontrerait le lieu en plus de deux

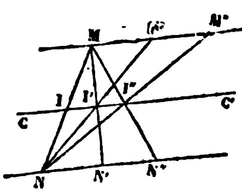


Fig. 78.

points. Si le point M était situé sur la droite CC′, les deux parallèles se confondraient avec le lieu des centres.

**130.** Lorsque la courbe admet un centre, si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation se simplifie et devient

$$(7)\qquad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + H = 0,$$

puisque les termes du premier degré disparaissent. Le terme constant H de la nouvelle équation a pour valeur

$$H = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F,$$

$a$ et $b$ désignant les coordonnées du centre. Mais les quantités $a$ et $b$ satisfont aux équations (5); si l'on multiplie les deux membres de chacune d'elles respectivement par $a$ et $b$ et que l'on ajoute, il vient

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + Da + Eb = 0,$$

d'où

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 = -(Da + Eb),$$

et, par suite,

$$H = Da + Eb + F,$$

et en remplaçant $a$ et $b$ par leurs valeurs (6)

$$(8)\qquad H = \frac{\Delta}{f}.$$

Lorsque le discriminant $\Delta$ est nul, l'équation se réduit à

$$(9)\qquad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = 0,$$

d'où

$$(10)\qquad y' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C} x'.$$

Si la quantité $B^2 - AC$ est négative, l'équation n'admet qu'une solution réelle $x' = 0, y' = 0$. Si elle est positive, l'équation représente deux droites passant par l'origine. Dans ce cas, l'équation (7), dans laquelle on attribue à la constante H une valeur quelconque, définit une hyperbole; nous avons vu (n° 117) que les asymptotes d'une hyperbole passent par son centre, et que leurs coefficients angulaires sont donnés par la formule

$$m = \frac{\pm - B\ \sqrt{B^2 - AC}}{C};$$

ces asymptotes ne sont autre chose que les droites représentées par l'équation (10) ou par l'équation (9). Ainsi, quand une équation du second degré représente une hyperbole rapportée à son centre, on obtient l'équation des asymptotes en supprimant le terme constant dans l'équation proposée.

On conclut de là que, si l'équation générale du second degré

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

représente une hyperbole, l'équation

$$(11) \qquad f(x,y) - \frac{\Delta}{\mathfrak{f}} = 0$$

représente l'ensemble des deux asymptotes. En effet si l'on porte l'origine au centre de la courbe, $f(x, y)$ devient

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + \frac{\Delta}{\mathfrak{f}};$$

donc l'équation (11) devient

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = 0,$$

ce qui est l'équation des asymptotes.

### DIAMÈTRES.

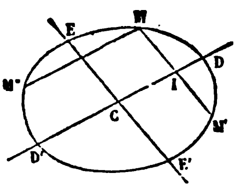



Fig. 79.

**131.** Si l'on coupe une courbe du second degré par une série de droites parallèles, le lieu des points milieux I des cordes MM', terminées aux deux points de rencontre, est un *diamètre* de la courbe. Soit $m$ le coefficient angulaire des cordes, et

$$(1) \quad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la courbe. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en un point arbitraire I du plan, ayant pour coordonnées $a$ et $b$, l'équation de la courbe devient (n° 128)

$$(4) \; Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + f'_a(a, b)\, x' + f'_b(a,b)\, y' + f(a,b) = 0.$$

Menons actuellement par ce point I une parallèle MM' à la

direction donnée, l'équation de cette parallèle est $y' = mx'$. L'élimination de $y'$ entre cette équation et celle de la courbe conduit à l'équation du second degré

$$(11) \quad [A+2Bm+Cm^2]x'^2+[f'_a(a,b)+f'_b(a,b)m]x'+f(a,b)=0,$$

qui donne les abscisses des points de rencontre. Lorsque la valeur attribuée à $m$ n'annule pas le trinôme $A + 2Bm + Cm^2$, coefficient de $x^2$, chacune des sécantes rencontre la courbe en deux points; si l'on suppose que l'origine I soit placée au milieu de la corde MM' (fig. 79), l'équation (11) ayant ses racines égales et de signes contraires, on aura la relation

$$(12) \qquad f'_a(a,b) + mf'_b(a,b) = 0;$$

cette équation, devant être satisfaite par les coordonnées du point milieu de l'une quelconque des cordes considérées, est l'équation du lieu. Si l'on y remplace $a$ et $b$ par $x$ et $y$, elle devient

$$(13) \qquad f'_x(x,y) + mf'_y(x,y) = 0,$$

ou

$$(14) \qquad (Ax + By + D) + m(Bx + Cy + E) = 0.$$

Cette équation étant du premier degré, on en conclut que le diamètre qui correspond à une série quelconque de cordes parallèles est une droite DD'. Appelons $m'$ le coefficient angulaire du diamètre; nous aurons la relation

$$(15) \qquad m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm},$$

ou

$$(16) \qquad Cmm' + B(m + m') + A = 0.$$

**132.** Remarque I. — Les valeurs de $x$ et $y$ qui satisfont aux équations simultanées

$$Ax + By + D = 0, \qquad Bx + Cy + E = 0,$$

vérifient l'équation (14), quelle que soit la valeur de $m$; donc, si le lieu a un centre unique, tous les diamètres passent par le centre, et, s'il en a une infinité, tous les diamètres se confondent avec le lieu des centres.

Les deux équations, qui déterminent le centre, représentent deux diamètres ; le premier correspond aux cordes parallèles à l'axe des $x$, le second aux cordes parallèles à l'axe des $y$. On les obtient en faisant $m=0$ ou $m=\infty$.

**133.** Remarque II. — Lorsque la courbe est une ellipse, le trinôme $A+2Bm+Cm^2$, ayant ses racines imaginaires, est toujours différent de zéro ; à toute direction des cordes correspond un diamètre défini par l'équation (14).

Cette équation (14), si l'on y considère $m$ comme un paramètre arbitraire, représente toutes les droites qui passent par le centre ; on en conclut que toute droite passant par le centre est un diamètre.

Remarque III. — Dans le cas de l'hyperbole, le trinôme $A+2Bm+Cm^2$ s'annule pour deux valeurs réelles de $m$, qui sont précisément les coefficients angulaires des asymptotes. Si l'on attribue à $m$ l'une de ces valeurs, l'équation (11) s'abaissant au premier degré, chacune des sécantes ne rencontre la courbe qu'en un point. Si, en outre, les coordonnées $a$ et $b$ du point I, par lequel on mène la sécante, vérifient la relation (12), l'équation (11), ayant ses deux premiers coefficients nuls, n'admet plus de solution ; la droite représentée par l'équation (14) est alors le lieu des points I tels que les parallèles menées par chacun de ses points à la direction donnée ne rencontrent pas la courbe ; mais, en vertu de la relation (16), la valeur de $m'$ étant égale à $m$, toutes ces parallèles se confondent avec la droite (14) elle-même. Comme cette droite passe par le centre, c'est l'une des asymptotes.

L'équation (14), si l'on y considère $m$ comme un paramètre arbitraire, représentant toutes les droites qui passent par le centre, on en conclut que toutes ces droites, excepté les deux asymptotes, sont des diamètres.

**134.** Remarque IV. — Dans le cas de la parabole, on a $AC-B^2=0$, ou $\frac{A}{B}=\frac{B}{C}$ ; il en résulte que la valeur de $m'$ donnée par l'équation (15), est indépendante de $m$ et égale à

$-\frac{B}{C}$; ainsi tous les diamètres de la parabole sont parallèles entre eux.

Le trinôme $A + 2Bm + Cm^2$ a ses deux racines égales à $-\frac{B}{C}$ coefficient angulaire des diamètres. Si l'on mène des sécantes parallèles à cette direction, chacune d'elles ne coupera la courbe qu'en un point. D'autre part, quand on attribue à $m$ la valeur $-\frac{B}{C}$, les coefficients de $x$ et $y$ dans l'équation (14) deviennent nuls et l'équation cesse de représenter une droite.

L'équation (14), dans laquelle on regarde $m$ comme un paramètre arbitraire, représente toutes les droites parallèles à la direction $-\frac{B}{C}$; on en conclut que toute droite parallèle à cette direction est un diamètre de la parabole.

Lorsqu'on a en même temps $AC - B^2 = 0$ et $BE - CD = 0$, ou $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$, le lieu du second degré se compose de deux droites parallèles; si l'on appelle $-m'$ la valeur commune des rapports précédents, on a

$$Ax + By + D = -m'(Bx + Cy + E),$$

et l'équation (14) se réduit à

$$(m - m')(Bx + Cy + D) = 0.$$

Ainsi, dans ce cas, tous les diamètres coïncident.

### DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

**135.** Supposons $AC - B^2$ différent de zéro. Les deux coefficients $m$ et $m'$ sont liés par la relation

$$(16) \qquad Cmm' + B(m + m') + A = 0.$$

Imaginons que l'on mène des sécantes telles que MM' parallèles au diamètre DD' (fig. 79); soit $m''$ le coefficient angulaire du diamètre EE' qui divise ces cordes en deux parties égales, on aura de même, entre la direction $m'$ des cordes et la direction $m''$ du diamètre correspondant EE', la relation

$$Cm'm'' + B(m' + m'') + A = 0\,;$$

cette équation et la précédente étant du premier degré par rapport à $m''$ et à $m$, on a $m'' = m$. Les deux diamètres DD′ et EE′, dont les coefficients angulaires sont $m'$ et $m$, jouissent de cette propriété que chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; on les a nommés, pour cette raison, *diamètres conjugués*.

L'ellipse et l'hyperbole ont une infinité de systèmes de diamètres conjugués. On peut prendre pour premier diamètre une droite quelconque menée par le centre, pourvu qu'elle ne se confonde pas avec l'une des asymptotes, si la courbe est une hyperbole.

**136.** Nous avons vu (n° 130), que l'équation de la courbe, rapportée à des axes parallèles aux axes primitifs et menés par le centre, est

$$(17) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0,$$

Si l'on prend pour nouveaux axes de coordonnées deux diamètres quelconques, et que l'on effectue la transformation à l'aide des formules (4) du n° 51, le polynôme homogène et du second degré $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ se transformant en un polynôme homogène et du second degré $A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2$, l'équation devient

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + H = 0.$$

Lorsque les deux diamètres sont conjugués, comme à chaque valeur de $x'$ correspondent deux valeurs de $y'$ égales et de signes contraires, le coefficient B′ est nul, et l'équation se réduit à la forme simple

$$(18) \qquad A'x'^2 + C'y'^2 + H = 0.$$

Dans le cas de la parabole, si l'on prend pour origine un point de la courbe, ce qui fait disparaître le terme constant, pour axe des $x'$ le diamètre qui passe par ce point et pour axe des $y'$ une parallèle aux cordes que le diamètre divise en deux parties égales, comme à chaque valeur de $x'$ correspondent

deux valeurs de $y'$ égales et de signes contraires, on doit avoir $B'x' + E' = 0$, et par suite séparément $B' = 0$, $E' = 0$; d'autre part, la courbe étant une parabole, la condition $A'C' - B'^2 = 0$ doit être sastifaite, ce qui exige $A' = 0$; ainsi l'équation se réduit à la forme simple

$$C'y'^2 + 2D'x' = 0. \tag{19}$$

Remarquons que l'axe des $y'$ coïncide avec la tangente à l'origine.

### AXES.

**137.** Dans les courbes du second degré, les diamètres perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales sont des *axes* de symétrie.

La parabole ayant tous ses diamètres parallèles, si l'on imagine une série de cordes MM' (fig. 80) perpendiculaires à la direction commune des diamètres, le diamètre AA', qui divise ces cordes en deux parties égales, sera un axe de la courbe et ce sera le seul. Le coefficient angulaire des diamètres est $-\frac{B}{C}$; donc, si les coordonnées sont rectangulaires, l'axe de la courbe est le diamètre des cordes ayant pour coefficient angulaire $\frac{C}{B}$; son équation (n° 131) est

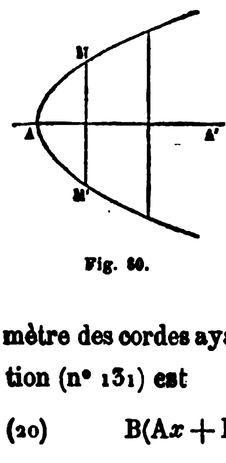


Fig. 80.

$$B(Ax + By + D) + C(Bx + Cy + E) = 0. \tag{20}$$

Dans le cas des coordonnées obliques, le coefficient angulaire des cordes perpendiculaires à l'axe étant $\frac{C - B\cos\theta}{B - C\cos\theta}$, cette droite est déterminée par l'équation

$$(Ax + By + D)(B - C\cos\theta) + (Bx + Cy + E)(C - B\cos\theta) = 0.$$

L'équation de la parabole, rapportée à son axe AA' et à la tangente au *sommet* A, est de la forme (19).

Lorsque la courbe est une ellipse ou une hyperbole, à tout axe AA′ (fig. 81) en correspond un second BB′, formant avec le premier un système de diamètres conjugués, la question est ainsi ramenée à la recherche des diamètres conjugués perpendiculaires entre eux. Si les coordonnées sont rectangulaires, on obtient les coefficients angulaires des axes en joignant à l'équation (16) la relation $mm' = -1$. On en déduit $m + m' = \frac{C - A}{B}$; ainsi, $m$ et $m'$ sont les racines de l'équation du second degré.

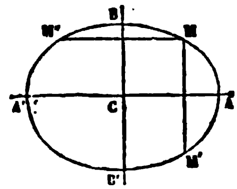


Fig. 81.

$$(21)\qquad Bu^2 + (A - C)u - B = 0.$$

Si l'origine des coordonnées coïncide avec le centre, l'équation

$$(22)\qquad By^2 + (A - C)xy - Bx^2 = 0,$$

que l'on déduit de l'équation (21) en remplaçant $u$ par $\frac{y}{x}$, représente l'ensemble des deux axes.

Dans le cas des coordonnées obliques, les coefficients angulaires des axes sont les racines de l'équation

$$(23)\qquad (B - C\cos\theta)u^2 + (A - C)u - (B - A\cos\theta) = 0.$$

L'équation de la courbe, rapportée à ces deux axes, est do la forme (18).

Soit $u$ une racine de l'une des équations (21) ou (23) : l'équation de l'axe correspondant sera :

$$f'_x + uf'_y = 0.$$

Donc, l'origine des coordonnées étant choisie d'une manière quelconque, on aura une équation du second degré représentant l'ensemble des axes en remplaçant, dans (21) ou (23), $u$ par $-\frac{f'_x}{f'_y}$ ce qui donne dans le cas des axes rectangulaires (éq. 21)

$$(24)\qquad B(f'^2_x - f'^2_y) - (A - C)\, f'_x f'_y = 0$$

**137 *bis*.** Reconnaitre la position d'un point par rapport a une conique. Soit

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

le premier membre de l'équation d'une conique. Si l'on déplace dans le plan le point M $(x, y)$ d'une manière continue en lui faisant suivre un chemin quelconque, la fonction $f(x, y)$ varie d'une manière continue et ne peut changer de signe que si elle s'annule, c'est-à-dire si le point M traverse la courbe. Le signe de $f(x, y)$ est donc le *même* en tous les points du plan situés d'un *même côté* de la courbe; d'ailleurs, ce signe change effectivement quand le point M *traverse* une branche simple de la courbe. En effet, soit $y = mx + h$, l'équation d'une sécante M'M" coupant la courbe en deux points réels distincts M'M", d'abcisses $x'$ et $x''$; déplaçons le point M sur cette sécante, nous aurons

$$f(x, y) = f(x, mx + h);$$

la fonction $f(x, mx + h)$ est un trinôme du second degré en $x$ ayant pour racines $x'$ et $x''$. Ce trinôme a un certain signe quand $x$ est extérieur à l'intervalle $x'x''$ et le signe contraire quand $x$ est dans cet intervalle. Donc, quand le point M se déplace sur la droite indéfinie M'M", la fonction $f(x, mx + h)$ ou son égale $f(x, y)$ a un certain signe tant que le point M est extérieur au segment M'M" et le signe contraire lorsque le point est sur ce segment. Le signe de $f(x, y)$ change donc quand le point M traverse la courbe sur une sécante.

D'après cela, il suffit de connaître le signe de $f(x, y)$ en un point du plan non situé sur la courbe, pour connaître ce signe partout. Prenons par exemple la fonction

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + y$$

qui, égalée à zéro, représente une ellipse réelle. Si on prend un point $M(x, y)$ placé très loin, il sera extérieur à la courbe; prenons-le par exemple sur l'axe $Oy$ ($x = 0$, $y$ très grand) : alors $f(x, y)$ qui se réduit à un trinôme en $y$ est manifestement

positif. Donc, dans cet exemple, $f(x,y)$ est positif en dehors de l'ellipse et par suite négatif à l'intérieur. On reconnaîtra immédiatement la position d'un point $(x,y)$ par rapport à la courbe en regardant le signe de $f(x,y)$.

Revenons au cas général et cherchons à donner des règles simples suivant les différents cas.

1° Si l'équation $f(x,y)=0$ représente une ellipse imaginaire, ou une ellipse point, ou deux droites parallèles imaginaires, ou deux droites confondues, la fonction $f(x,y)$ a le même signe en tous les points du plan; car, dans les trois premières hypothèses, elle ne s'annule qu'en un point au plus et, dans la dernière (droites confondues), la fonction $f(x,y)$ est un carré parfait.

2° Si $f(x,y)=0$ représente une ellipse réelle ou une hyperbole, on convient d'appeler intérieur de la courbe la région du plan qui contient le centre; extérieur, le reste du plan. Les signes de $f(x,y)$ sont différents à l'intérieur et à l'extérieur. Soient $a$ et $b$ les coordonnées du centre, la fonction $f(x,y)$ prend au centre la valeur (n° 130)

$$f(a,b)=\mathrm{H}=\frac{\Delta}{\delta}=\frac{\Delta}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}$$

le signe de cette quantité donne donc le signe de $f(x,y)$ à l'intérieur de la conique; le signe sera contraire à l'extérieur.

3° Si $f(x,y)=0$ représente une parabole ou deux droites parallèles réelles, l'intérieur de la courbe est la région qui contient le foyer de la parallèle ou la région comprise entre les deux droites. On obtient immédiatement le signe de $f(x,y)$ à l'extérieur de la courbe en prenant le signe de $f(x,y)$ en un point à l'infini dans une direction *non parallèle* à la direction de l'axe ou à celle des deux droites. Cette direction exceptionnelle s'obtient en égalant à zéro l'ensemble des termes du deuxième degré $\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\mathrm{C}y^2$ qui est un carré parfait dans le cas actuel. Comme l'un au moins des deux axes

coordonnés n'est pas parallèle à cette direction exceptionnelle, il suffira de prendre le signe de $f$ à l'infini sur cet axe coordonné, c'est-à-dire le signe de celui des coefficients A ou C qui n'est pas nul.

4° Si la courbe $f(x,y)=0$ est composée de deux droites qui se coupent, le signe de $f(x,y)$ est le même dans les angles opposés par le sommet; les signes de $f(x,y)$ sont contraires dans les anglesadjacents.

# CHAPITRE III

## Réduction de l'équation du second degré.

**138.** Pour étudier avec plus de facilité les propriétés d'une courbe du second degré, il importe de simplifier autant que possible son équation, en la rapportant à des axes de coordonnées convenablement choisis. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que l'équation du second degré peut toujours être ramenée à l'une des deux formes

$$(\alpha)\ Ax^2 + Cy^2 + H = 0, \qquad (\beta)\ Cy^2 + 2Dx = 0.$$

Quand la courbe est une ellipse ou une hyperbole, on ramène son équation à la forme ($\alpha$), en prenant pour axes des coordonnées un système de deux diamètres conjugués quelconques; généralement, les coordonnées seront obliques; elles seront rectangulaires, si l'on rapporte la courbe à ses axes. Quand la courbe est une parabole, on ramène son équation à la forme ($\beta$), en prenant pour axe des $x$ un diamètre quelconque, et pour axe des $y$ la tangente à l'extrémité de ce diamètre; si l'on veut que ces coordonnées soient rectangulaires, on prendra pour axe des $x$ l'axe de la courbe.

C'est à l'aide de ces deux formes d'équations, en coordonnées rectangulaires, que nous démontrerons la plupart des propriétés des courbes du second degré. Nous allons expliquer la marche à suivre pour effectuer la réduction de l'équation. Soit

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

une équation du second degré donnée et rapportée à des axes rectangulaires; s'ils ne l'étaient pas, on les rendrait tels préalablement par une première transformation. En conservant l'axe des $x$ et en prenant pour axe des $y$ la perpendiculaire

élevée à cette droite par l'origine, les formules de transformation sont

$$x = x' - y'\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad , \quad y = \frac{y'}{\sin\theta}.$$

### ELLIPSE ET HYPERBOLE

**139.** Examinons d'abord le cas où la quantité $AC - B^2$ est différente de zéro; la courbe admet un centre unique, dont les coordonnées $a$ et $b$ sont données par les formules (n° 129).

$$a = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{f}} \quad , \quad b = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{f}}:$$

transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au centre C (fig. 82); nous savons que les termes du second degré ne changent pas, que ceux du premier degré disparaissent, et que le terme constant H de la nouvelle équation est donné par la formule $\frac{\Delta}{\mathbf{f}}$. L'équation de la courbe, par ce changement de coordonnées, se simplifie et devient

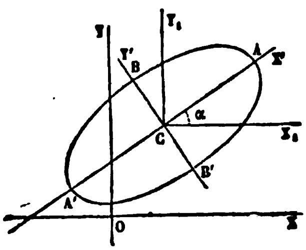


Fig. 82.

$$(2) \qquad Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + H = 0.$$

Faisons maintenant tourner les axes des coordonnées, supposés rectangulaires, d'un angle $\alpha$ autour du centre C, pour les faire coïncider avec les axes de la courbe, les formules de transformation sont

$$x_1 = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad , \quad y_1 = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

En substituant dans l'équation (2) on obtient la nouvelle équation

$$(3) \qquad \begin{aligned} &(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha)x'^2 \\ &+ (A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha)y'^2 \\ &+ 2[(C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]x'y' + H = 0, \end{aligned}$$

On peut disposer de l'angle $\alpha$ de manière à annuler le coefficient du terme en $x'y'$ ; pour cela, on posera

$$(4)\qquad (C-A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

ou

$$(5)\qquad B\operatorname{tang}^2\alpha + (A-C)\operatorname{tang}\alpha - B = 0.$$

Cette équation du second degré est la même que l'équation (21) n° 137, par laquelle on détermine les directions des axes de la courbe. Mais on peut résoudre l'équation (4) plus simplement en la mettant sous la forme

$$(C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0,$$

d'où

$$(6)\qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}.$$

Si l'on exclut le cas du cercle, où l'on a à la fois $B=0$, et $A=C$, l'équation (6) donne pour $2\alpha$ une valeur positive $\omega$ moindre que $\pi$, et les diverses valeurs de l'angle $2\alpha$ qui satisfont à cette équation sont comprises dans la formule

$$2\alpha = \omega + k\pi,$$

où $k$ désigne un nombre entier quelconque positif ou négatif, on en déduit

$$\alpha = \frac{\omega}{2} + k\frac{\pi}{2}.$$

Les diverses valeurs de $\alpha$ ne donnent que quatre directions différentes pour l'axe CX'; ces quatre directions sont opposées deux à deux et forment deux droites rectangulaires. Nous prendrons pour $\alpha$ la valeur $\frac{\omega}{2}$, qui est toujours positive et inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

**140.** Le terme en $x'y'$ disparaît dans l'équation (3) ; il reste à calculer les coefficients des termes en $x'^2$ et en $y'^2$. Si l'on pose

$$A' = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$C' = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha,$$

on a

$$(7)\quad \begin{cases} A' + C' = A + C, \\ A' - C' = (A - C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 4B\sin\alpha\cos\alpha \\ \qquad = (A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha. \end{cases}$$

L'équation (6) donne

$$\sin 2\alpha = \frac{2B}{\pm\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\pm\sqrt{4B^2 + (A-C)^2}};$$

il en résulte

$$A' - C' = \pm\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}.$$

On calculera donc les deux coefficients $A'$ et $C'$ à l'aide des formules

$$(8)\quad \begin{cases} A' + C' = A + C, \\ A' - C' = R, \end{cases}$$

en posant,

$$R = \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}.$$

Nous avons choisi la valeur de $2\alpha$ positive et inférieure à $\pi$; $\sin 2\alpha$ ayant une valeur positive, il faudra mettre devant le radical le signe de B. De cette manière, l'équation de la courbe est ramenée à la forme simple

$$(9)\quad A'x'^2 + C'y'^2 + H = 0.$$

Elle représente une ellipse ou une hyperbole, suivant que les deux coefficients $A'$ et $C'$ ont le même signe ou des signes contraires.

Des formules précédentes (8) élevées au carré et retranchées, on déduit la relation

$$A'C' = AC - B^2.$$

Les deux coefficients $A'$ et $C'$ de l'équation de la courbe rapportée à ses axes sont les racines de l'équation

$$(10)\quad S^2 - (A + C)S + (AC - B^2) = 0.$$

Les dimensions de la courbe définie par l'équation (9) dé-

pendent des deux paramètres $-\frac{H}{A'}, -\frac{H}{C}$. Dans le cas de l'ellipse, ces deux quotients, qui ont le même signe, sont positifs; si on les représente par $a^2$ et $b^2$, $a$ et $b$ seront les segments de CX′ et CY′ compris entre le centre et la courbe. Les longueurs $2a$ et $2b$ se nomment les *axes* de l'ellipse. Les quantités $a^2$ et $b^2$ sont les racines de l'équation du second degré

$$(11) \qquad (AC - B^2)u^2 + (A + C)Hu + H^2 = 0,$$

que l'on obtient en remplaçant dans l'équation (10) S par $-\frac{H}{u}$.

Dans le cas de l'hyperbole, les deux quotients $-\frac{H}{A'}. -\frac{H}{C}$ ont des signes différents; si on les représente par $a^2$ et $-b^2$, ou $-a^2$ et $b^2$, suivant les deux cas qui peuvent se présenter, ces deux quantités sont encore les racines de l'équation (11). Les quantités $2a$ et $2b$ se nomment les *axes* de l'hyperbole.

## PARABOLE.

**141.** Quand $AC - B^2 = 0$, les termes du second degré dans l'équation proposée forment un carré parfait; on a, en effet, en remplaçant A par sa valeur $\frac{B^2}{C}$,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = C\left(y^2 + \frac{2B}{C}xy + \frac{B^2}{C^2}x^2\right) = C\left(y + \frac{B}{C}x\right)^2,$$

et l'équation peut s'écrire

$$C\left(y + \frac{B}{C}x\right)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Faisons d'abord tourner les axes des coordonnées autour de l'origine d'un angle $\alpha$ (fig. 83), à l'aide des formules de transformations

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \qquad y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha;$$

l'équation proposée devient

$$(12)\qquad C\left[\left(\cos\alpha-\frac{B}{C}\sin\alpha\right)y_1+\left(\sin\alpha+\frac{B}{C}\cos\alpha\right)x_1\right]^2$$
$$+2(D\cos\alpha+E\sin\alpha)x_1+2(E\cos\alpha-D\sin\alpha)y_1+F=0.$$

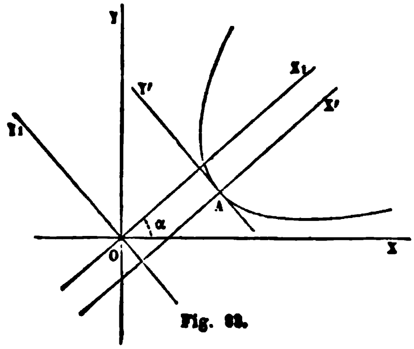



Fig. 22.

On peut disposer de l'angle $\alpha$ de manière à annuler le coefficient de $x_1$ ou de $y_1$ dans le polynôme qui est élevé au carré; posons, par exemple,

$$\sin\alpha+\frac{B}{C}\cos\alpha=0$$

d'où

$$(13)\quad \operatorname{tang}\alpha=-\frac{B}{C},\ \sin\alpha=\frac{-B}{\pm\sqrt{B^2+C^2}},\ \cos\alpha=\frac{C}{\pm\sqrt{B^2+C^2}},$$

l'équation (12) se simplifiera et prendra la forme

$$(14)\qquad C'y_1^2+2D'x_1+2E'y_1+F=0.$$

On a

$$C'=C\left(\cos\alpha-\frac{B}{C}\sin\alpha\right)^2=C(\cos\alpha+\operatorname{tang}\alpha\sin\alpha)^2=\frac{C}{\cos^2\alpha},$$

et, par suite, $C'=\frac{B^2+C^2}{C}=A+C$. Quant aux coefficients $D'$ et $E'$, on les obtiendra en remplaçant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs valeurs, ce qui donne

$$D'=\frac{CD-BE}{\pm\sqrt{C(A+C)}}\quad,\quad E'=\frac{CE+BD}{\pm\sqrt{C(A+C)}}$$

L'une des valeurs de $\alpha$ données par l'équation (13) est positive et inférieure à $\pi$; si l'on choisit cette valeur, $\sin\alpha$ sera positif, et il faudra prendre le radical avec un signe contraire à celui de B. Si le coefficient $D'$ était nul, l'équation (14), ne renfermant plus $x_1$, ne pourrait représenter que deux droites paral-

lèles à l'axe $OD_1$. Lorsque ce coefficient est différent de zéro, on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes, en posant

$$x_1 = a + x' \quad , \quad y_1 = b + y' ;$$

l'équation (14) devient

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2(C'b + E')y' + (C'b^2 + 2D'a + 2E'b + F) = 0.$$

On disposera des coordonnées $a$ et $b$ de la nouvelle origine A de manière à annuler le coefficient de $y'$ et le terme constant,

$$C'b + E' = 0 \quad , \quad C'b^2 + 2D'a + 2E'b + F = 0,$$

ce qui donne pour $a$ et $b$ des valeurs finies, et l'équation sera ramenée à la forme simple

$$(15) \qquad C'y'^2 + 2D'x' = 0.$$

Les dimensions de la courbe dépendent de la valeur numérique du quotient $\frac{D'}{C'}$, ou de celle de

$$\frac{BE - CD}{(A + C)\sqrt{C(A + C)}}.$$

Cette quantité se nomme le *paramètre* de la parabole.

**142.** Les coefficients des équations réduites peuvent se calculer facilement par l'emploi de certaines fonctions des coefficients et de l'angle des axes qui ne changent pas de valeurs quand on fait un changement d'axes quelconque. Pour former ces fonctions, reprenons les formules (4) du n° 51

$$(16) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta} \\ y = \dfrac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta} \end{cases}$$

qui servent à la transformation des coordonnées, quand on change la direction des axes, en conservant la même origine; ces formules expriment $x$ et $y$ par des fonctions homogènes du premier degré en $x'$ et $y'$. En remplaçant $x$ et $y$ par ces valeurs dans le polynôme homogène du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

le résultat sera un polynôme homogène du second degré en $x'$ et $y'$

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2.$$

En particulier, le trinôme

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2$$

se change en

$$x'^2 + 2x'y'\cos\theta' + y'^2,$$

$\theta'$ étant l'angle des nouveaux axes; car chacun de ces trinômes donne le carré de la distance de l'origine à un même point du plan.

Considérons le polynôme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - S(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2),$$

ou, (17) $\quad (A - S)x^2 + 2(B - S\cos\theta)xy + (C - S)y^2,$

dans lequel la lettre S désigne une constante arbitraire; il donnera évidemment naissance au polynôme transformé

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 - S(x'^2 + 2x'y'\cos\theta' + y'^2),$$

ou, (18) $\quad (A' - S)x'^2 + 2(B' - S\cos\theta')x'y' + (C' - S)y'^2.$

Remarquons maintenant que les valeurs de S pour lesquelles l'un des polynômes est le carré d'une fonction entière du premier degré des variables dont il dépend sont les mêmes. Supposons, par exemple, que pour une certaine valeur de S le premier polynôme prenne la forme $(ax + by)^2$, $a$ et $b$ étant des constantes; quand on remplace $x$ et $y$ par leurs valeurs (16), la fonction du premier degré $ax + by$ se change en une fonction du premier degré $a'x' + b'y'$, et le second polynôme prend la forme $(a'x' + b'y')^2$. Quand les polynômes sont des carrés, les équations que l'on obtient en égalant à zéro leurs racines représentent la même droite rapportée aux deux systèmes d'axes YOX, Y'OX'.

Les valeurs de S pour lesquelles le polynôme (17) est un carré sont les racines de l'équation du second degré

$$(A - S)(C - S) - (B - S\cos\theta)^2 = 0,$$

ou, (19) $S^2 \sin^2\theta - (A + C - 2B\cos\theta)S + AC - B^2 = 0.$
Nous représenterons par $S_1$ et $S_2$ ces deux racines; de même, les valeurs de S pour lesquelles le polynôme (18) est un carré sont les racines de l'équation

$$(A' - S)(C' - S) - (B' - S\cos\theta')^2 = 0,$$

ou, (20) $S^2 \sin^2\theta' - (A' + C' - 2B'\cos\theta')S + A'C' - B'^2 = 0.$
Les deux équations (19) et (20) admettant les mêmes racines on a

(21) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{A' + C' - 2B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}, \\ \dfrac{AC - B^2}{\sin^2\theta} = \dfrac{A'C' - B'^2}{\sin^2\theta'}. \end{array}\right.$$

Donc les deux fonctions

$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{AC - B^2}{\sin^2\theta}$$

des coefficients de l'équation d'une conique et de l'angle des axes, conservent les mêmes valeurs quand on fait une transformation de coordonnées.

La quantité $\dfrac{\Delta}{\sin^2\theta}$ possède la même propriété. En effet, supposons $\mathfrak{f}$ différent de zéro; alors en transportant l'origine des coordonnées au centre de la conique, on a une équation dont le terme constant H a pour valeur (n° 130) $H = \dfrac{\Delta}{\mathfrak{f}}\cdot$ Comme ce terme constant reste le même quels que soient l'orientation et l'angle des axes et que $\dfrac{\mathfrak{f}}{\sin^2\theta}$ reste constant quand on fait un changement d'axes, il en est de même de $\dfrac{\Delta}{\sin^2\theta}\cdot$ Ainsi, la conique étant rapportée à des axes $xOy$ qui font un angle $\theta$, si on la rapporte à de nouveaux axes $x'O'y'$ faisant un angle $\theta'$ et si l'on appelle

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

la nouvelle équation et $\Delta' = A'(C'F' - E'^2) + \ldots$ la nouvelle valeur de $\Delta$, on a

$$\frac{\Delta'}{\sin^2\theta'} = \frac{\Delta}{\sin^2\theta}.$$

Cette relation sera identique si l'on y remplace A', B', C', D', E', F' par leurs expressions en fonction de A, B, C, D, E, F qui résultent des formules de transformation des coordonnées. Elle aura donc lieu quels que soient A, B, C, D, E, F, c'est-à-dire même dans le cas où $\mathfrak{f}$ serait nul, quoique le raisonnement employé pour trouver cette relation ne puisse plus s'appliquer à ce cas.

Les trois quantités

$$(23)\qquad \frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{\mathfrak{f}}{\sin^2\theta}, \quad \frac{\Delta}{\sin^2\theta}$$

sont homogènes par rapport aux coefficients A, B, C, D, E, F, la première est du premier degré, la deuxième du second, la troisième du troisième degré. Si donc on multiplie le premier membre de l'équation de la conique :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

par une constante K, c'est-à-dire si l'on remplace A, B, C..., par KA, KB, KC..., la première des trois quantités (23) est multipliée par K, la deuxième par $K^2$, la troisième par $K^3$. On en conclut qu'une combinaison des quantités (23) homogène et de degré zéro par rapport aux coefficients A, B, C..., ne change pas si l'on introduit ce facteur K. Telles sont par exemple les deux combinaisons

$$(24)\qquad \frac{\mathfrak{f}\sin^2\theta}{(A + C - 2B\cos\theta)^2}, \quad \frac{\Delta\sin^4\theta}{(A + C - 2B\cos\theta)^3}$$

obtenues en divisant la seconde et la troisième des quantités (23) respectivement par le carré et le cube de la première. On a ainsi deux quantités (24) qui ne changent pas quand on fait un changement d'axes et qu'on multiplie, ou divise, tous les coefficients par un même facteur.

La condition $\Delta = 0$ exprime que la conique est réduite à deux droites ; la condition $\mathfrak{f} = 0$, qu'elle est du genre parabole ; la condition $A + C - 2B\cos\theta = 0$, qu'elle est une hyperbole *équilatère*, c'est-à-dire une hyperbole dont les asymptotes sont rectangulaires. En effet appelons $m'$ et $m''$ les coefficients

angulaires des asymptotes; la condition de perpendicularité est

(25) $$1 + (m' + m'') \cos\theta + m'm'' = 0;$$

d'ailleurs ces coefficients angulaires sont racines de l'équation

$$Cm^2 + 2Bm + A = 0$$

qui donne

$$m' + m'' = -\frac{B}{C}, \quad m'm'' = \frac{A}{C},$$

valeurs qui substituées dans la relation (25) fournissent la condition indiquée.

**143.** La grandeur d'une ellipse ou d'une hyperbole dépend de deux nombres qui sont les longueurs des axes de ces courbes; la grandeur d'une parabole dépend d'un seul nombre, *le paramètre;* enfin la grandeur d'une conique réduite à deux droites dépend d'un nombre qui est leur angle quand elles se coupent et leur plus courte distance quand elles sont parallèles. Nous nous proposons de calculer ces différentes quantités.

Soit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une courbe du second degré rapportée à des axes faisant un angle $\theta$. Si l'on fait

$$\varepsilon = A + C - 2B\cos\theta, \quad \mathbf{f} = AC - B^2, \quad \Delta = A(CF - E^2) + \ldots$$

les trois quantités

(1) $$\frac{\varepsilon}{\sin^2\theta}, \quad \frac{\mathbf{f}}{\sin^2\theta}, \quad \frac{\Delta}{\sin^2\theta}$$

possèdent cette propriété que toute combinaison de ces trois quantités, homogène et de degré zéro par rapport aux coefficients A, B, C..., garde une valeur constante quand on change les axes coordonnés et qu'on multiplie ou divise tous les coefficients de l'équation de la courbe par un même facteur, comme nous venons de le montrer.

Supposons d'abord que la courbe du second ordre soit une ellipse ou une hyperbole : en la rapportant à son centre et à ses axes on mettra son équation sous la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - \alpha\beta = 0$$

où dans le cas de l'ellipse réelle $\alpha = b^2$, $\beta = a^2$, dans celui de l'hyperbole $\alpha = b^2$, $\beta = -a^2$, dans celui de l'ellipse imaginaire $\alpha = -b^2$, $\beta = -a^2$. Nous dirons, dans les trois cas, que $\alpha$ et $\beta$ sont les carrés des longueurs des axes. Les deux combinaisons

$$(2) \qquad \frac{\varepsilon\Delta}{\mathbf{f}^2}, \quad \frac{\Delta^2 \sin^2\theta}{\mathbf{f}^3}$$

des quantités (1) étant homogènes et de degré zéro par rapport aux coefficients, garderont la même valeur si on les forme pour l'équation réduite. Or, pour l'équation réduite, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \alpha + \beta$, $\mathbf{f} = \alpha\beta$, $\Delta = -\alpha^2\beta^2$; donc

$$\frac{\varepsilon\Delta}{\mathbf{f}^2} = -(\alpha + \beta), \quad \frac{\Delta^2 \sin^2\theta}{\mathbf{f}^3} = \alpha\beta,$$

et $\alpha$ et $\beta$ sont racines de l'équation du second degré

$$(3) \qquad \rho^2 + \rho\frac{\varepsilon\Delta}{\mathbf{f}^2} + \frac{\Delta^2 \sin^2\theta}{\mathbf{f}^3} = 0$$

qu'on appelle *équation aux carrés des axes*. D'après la nature de la question, cette équation doit avoir ses racines réelles : on le vérifie facilement, car la quantité $\frac{\varepsilon^2\Delta^2}{\mathbf{f}^4} - \frac{4\Delta^2\sin^2\theta}{\mathbf{f}^3}$ s'écrit

$$\frac{\Delta^2}{\mathbf{f}^4}(\varepsilon^2 - 4\mathbf{f}\sin^2\theta) = \frac{\Delta}{\mathbf{f}^4}\Big[(A-C)^2\sin^2\theta + [(A+C)\cos\theta - 2B]^2\Big]$$

quantité essentiellement positive. Les racines seront égales lorsque

$$A = C, \quad B = A\cos\theta;$$

la courbe est alors un cercle. Les racines sont égales et de signes contraires quand $\varepsilon = 0$, la courbe est alors une hyperbole équilatère.

Supposons maintenant que la courbe du second ordre soit une parabole; en la rapportant à son axe et à la tangente au sommet, on mettra son équation sous la forme réduite

$$y^2 - 2px = 0;$$

quelle est la valeur du paramètre $p$? Des trois quantités (1)

la deuxième est nulle : l'on peut former une combinaison homogène, de degré zéro par rapport aux coefficients, des deux autres quantités (1) en divisant la dernière par le cube de la première, ce qui donne

$$\frac{\Delta \sin^4 \theta}{\varepsilon^3}.$$

Cette même quantité formée avec l'équation réduite est $-p^2$: on a donc

$$\frac{\Delta \sin^4 \theta}{\varepsilon^3} = -p^2,$$

équation qui donne $p$.

Si la conique considérée se réduit à un système de deux droites qui se coupent, son équation peut se ramener à la forme

$$y^2 + mx^2 = 0;$$

alors $\Delta = 0$, et l'on a, en formant la quantité $\frac{\varepsilon^2}{\mathbf{f} \sin^2 \theta}$ pour l'équation réduite,

$$\frac{\varepsilon^2}{\mathbf{f} \sin^2 \theta} = \frac{(1+m)^2}{m};$$

d'où l'on tire pour $m$ deux valeurs inverses l'une de l'autre. Si $\mathbf{f}$ est négatif les deux droites sont réelles et les valeurs de $m$ sont négatives : appelant alors $\varphi$ l'angle des deux droites on aura

$$m = -\operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} \text{ et } -\frac{\varepsilon^2}{\mathbf{f} \sin^2 \theta} = 4 \cot g^2 \varphi$$

équation qui donne $\varphi$.

Enfin supposons la courbe réduite à deux droites parallèles et calculons la distance de ces droites. Dans ce cas, des trois quantités (1), deux $\mathbf{f}$ et $\Delta$ sont nulles : les combinaisons précédentes de ces trois quantités ne peuvent plus être employées. On considérera ce cas comme un cas limite du cas des courbes à centre unique et cela de la façon suivante. Soit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = c$$

une conique réduite à deux droites parallèles, comme A et C ne peuvent pas être nuls à la fois, à cause de la condition $f = 0$, supposons C différent de zéro et considérons la courbe auxiliaire

$$(A+\lambda)x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

qui dépend du paramètre $\lambda$. Dans cette courbe on a

$$s_1 = A + C + \lambda - 2B\cos\theta\,,\quad f_1 = (A+\lambda)C - B^2$$
$$\Delta_1 = (A+\lambda)(CF - E^2) + \ldots$$

Les expressions de $\Delta_1$ et $f_1$ se réduisent pour $\lambda = 0$ à $\Delta$ et $f$, c'est-à-dire à zéro. Quand $\lambda$ est différent de zéro, la courbe auxiliaire a un centre unique : son équation réduite est de la forme

$$\alpha_1 x^2 + \beta_1 y^2 - \alpha_1\beta_1 = 0,$$

où $\alpha_1$ et $\beta_1$ sont racines de l'équation (3) que nous écrivons

$$f_1\rho^2 + \frac{s_1\Delta_1}{f_1}\rho + \left(\frac{\Delta_1}{f_1}\right)^2 \sin^2\theta = 0.$$

Quand $\lambda$ tend vers zéro, $f_1$ et $\Delta_1$ tendent vers zéro et leur rapport $\frac{\Delta_1}{f_1}$ tend vers la limite $\frac{CF - E^2}{C}$. Donc l'une des racines $\beta_1$ de l'équation ci-dessus croît indéfiniment et l'autre tend vers la limite

$$\alpha = -\frac{CF - E^2}{sC}\sin^2\theta.$$

D'ailleurs l'équation réduite écrite sous la forme

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}x^2 + y^2 - \alpha_1 = 0$$

devient $y^2 - \alpha = 0$, et la valeur trouvée pour $\alpha$ est le *carré de la demi-distance* des deux droites parallèles auxquelles se réduit la conique auxiliaire pour $\lambda = 0$.

### EXEMPLES.

I. $$2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0.$$

La courbe est une ellipse, puisque la quantité $AC - B^2$ est positive

Pour obtenir les coordonnées du centre, on égale à zéro les deux dérivées partielles

$$4x - 3y + 1 = 0\,, \quad -3x + 6y - 7 = 0,$$

d'où

$$x = 1\,, \quad y = \frac{5}{3}\,, \quad H = -\frac{13}{3}.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au centre C (fig. 82), l'équation devient

$$2x_1^2 - 3x_1y_1 + 3y_1^2 - \frac{15}{3} = 0.$$

Faisons maintenant tourner les axes d'un angle $\alpha$ donné par la formule

$$\text{tang}\, 2\alpha = \frac{2B}{A - C} = 3.$$

L'équation résolue par les tables donne

$$2\alpha = 71^\circ 33' 54'' \quad \text{ou} \quad \alpha = 35^\circ 46' 57''.$$

On peut aussi obtenir l'angle $\alpha$ par une construction graphique ; on porte sur les axes des $x$ et des $y$, à partir de l'origine C, deux longueurs respectivement égales 1 et 3 ; la diagonale du rectangle construit sur ces deux longueurs fait avec l'axe des $x$ un angle qui a pour tangente 3 ; l'axe CX' est donc la bissectrice de cet angle. On obtient ensuite A' et C' par les formules

$$A' + C' = 5\,, \quad A - C' = -\sqrt{10},$$

puisque B est négatif. Il en résulte

$$A' = \frac{5 - \sqrt{10}}{2}, \quad C' = \frac{5 + \sqrt{10}}{2},$$

et l'équation de la courbe devient

$$(5 - \sqrt{10})x'^2 + (5 + \sqrt{10})y'^2 = \frac{26}{3};$$

la courbe intercepte sur les axes des longueurs

$$CA = \sqrt{\frac{26}{3(5 - \sqrt{10})}}, \quad CB = \sqrt{\frac{26}{3(5 + \sqrt{10})}}.$$

II. $$2x^2 - 5xy + 5y - 1 = 0.$$

La courbe est une hyperbole (fig. 84). Les coordonnées du centre données par les équations

$$4x - 5y = 0, \; -5x + 5 = 0,$$

sont

$$x = 1, y = \frac{4}{5}, \quad \text{d'où } H = 1$$

Si l'on transporte l'origine au centre, l'équation devient

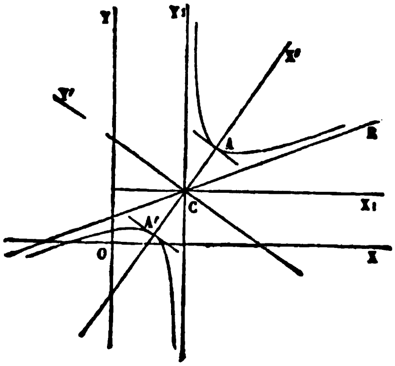



Fig. 84.

$$2x_1^2 - 5x_1y_1 + 1 = 0.$$

L'angle $\alpha$ est donné par la formule $\tang 2\alpha = -\frac{5}{2}$, et on a

$$A' + C' = 2,$$
$$A' - C' = -\sqrt{29},$$

d'où

$$A' = \frac{2-\sqrt{29}}{2}, \quad C' = \frac{2+\sqrt{29}}{2}.$$

L'équation de la courbe rapportée à ses axes est

$$(2-\sqrt{29})x'^2 + (2+\sqrt{29})y'^2 + 2 = 0$$

L'équation primitive ne contenant pas de terme en $y^2$, l'une des asymptotes est parallèle à l'axe OY.

III. $$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0.$$

La courbe est une parabole (fig. 83). Les termes du second degré forment un carré parfait, et l'équation peut s'écrire

$$9\left(y - \frac{2}{3}x\right)^2 - 36x + 100 = 0.$$

Faisons tourner les axes des coordonnées de l'angle $\alpha$ donné par la ormule $\tang \alpha = -\frac{B}{C} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, d'où $\alpha = 34^\circ 41' 25''$, on aura

$$C' = 13, \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$D' = -\frac{54}{\sqrt{13}}, \quad E' = \frac{36}{\sqrt{13}}.$$

L'équation de la courbe rapportée aux axes $OX_1$ et $OY_1$ est donc

$$13y_1^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{72}{\sqrt{13}}y_1 + 100 = 0.$$

On obtient les coordonnées du sommet en joignant à cette équation la suivante $26y_1 + \frac{72}{\sqrt{13}} = 0$. On en déduit

$$y_1 = -\frac{36}{13\sqrt{13}}, \quad x_1 = \frac{3901}{27 \cdot 13\sqrt{13}}.$$

Si l'on transporte les axes en ce point, l'équation devient

$$13y'^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}x' = 0.$$

# CHAPITRE IV

## De l'Ellipse.

**148.** Proposons-nous de construire la courbe représentée par l'équation

$$A'x^2+C'y^2+H=0,$$

dans laquelle les deux cofficients A' et C' ont le même signe.

Lorsque la constante H est égale à zéro, l'équation n'étant satisfaite que par $x=0$, $y=0$, représente un seul point, l'origine des coordonnées.

Quand les deux coefficients A' et C' ont le même signe que H, l'équation, ne pouvant être satisfaite par des valeurs réelles de $x$ et $y$, ne représente aucun lieu géométrique.

Considérons enfin le cas où ces deux coefficients ont un signe contraire à celui de H, et posons

$$a^2=-\frac{H}{A'}, \quad b^2=-\frac{H}{C'};$$

l'équation devient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

En la résolvant par rapport à $y$, on en déduit

$$(2) \qquad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

L'ordonnée $y$ n'est réelle que pour les valeurs de $x$ comprises entre $-a$ et $+a$, et elle est elle-même comprise entre $-b$ et $+b$; si donc, à partir de l'origine, on porte sur l'axe des $x$, et de part et d'autre, deux longueurs OA, OA' égales à $a$, et sur l'axe des $y$ deux longueurs OB, OB' égales à $b$, la courbe est située tout entière dans le rectangle CDEF construit sur les deux droites AA', BB' (fig. 85).

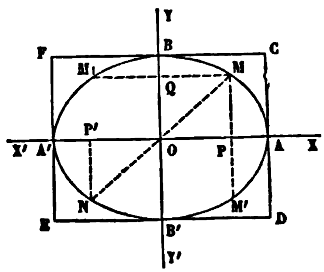


Fig. 85.

Quand $x$ croît de o à $a$, $y$ décroît en valeur absolue de $b$ à o, ce qui, à cause du double signe, donne les deux arcs égaux BMA, B'M'A. Il en est est de même quand $x$ varie de o à $-a$, ce qui donne les deux arcs $BM_1A'$, B'NA', égaux aux précédents. Ces quatre arcs égaux forment l'ellipse.

140. La droite A'A est un *axe* de l'ellipse; car à chaque abscisse OP correspondent deux ordonnées PM, PM' égales et de signes contraires. La droite B'B est aussi un *axe* de l'ellipse; car, si l'on résolvait l'équation par rapport à $x$, on verrait de même qu'à chaque ordonnée OQ correspondent deux abscisses QM, $QM_1$ égales et de signes contraires. Les points A, A', B, B', où les axes recontrent l'ellipse, sont les *sommets* de l'ellipse. Les longueurs A'A, B'B des deux axes sont respectivement égales à $2a$ et à $2b$.

L'ellipse devient un cercle, quand les axes sont égaux.

Il est aisé de voir que l'origine O est centre de l'ellipse; en effet, soient $x$, $y$ les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipse; il est évident que l'équation (1) est aussi satisfaite par les valeurs $-x$, $-y$; il existe, par conséquent, un second point N de l'ellipse qui a ses coordonnées $-$OP', $-$P'N respectivement égales aux coordonnées OP, PM du point M, mais de sens contraires; les triangles OPM, OP'N sont égaux; donc OM $=$ ON; et la ligne MON est droite à cause des angles égaux POM, P'ON. Ainsi les points M et N

de l'ellipse sont deux à deux symétriques par rapport au point O; donc le point O est centre de l'ellipse.

**147.** Pour étudier comment varie la distance du centre aux différents points de l'ellipse, ou le rayon de l'ellipse, formons l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires, en prenant le centre O pour pôle et l'axe OA de la courbe pour axe polaire. Si dans l'équation (1) on remplace $x$ et $y$ par $\rho \cos \omega$ et $\rho \sin \omega$, on a

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}. \tag{3}$$

Supposons $a>b$, et mettons l'équation sous la forme

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{a^2}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin^2\omega.$$

Si l'on fait varier $\omega$ de $0$ à $\frac{\pi}{2}$, la quantité $\frac{1}{\rho^2}$ croît, et, par conséquent, $\rho$ décroît constamment de $a$ à $b$. Le maximum de $\rho$ est $a$, le minimum $b$.

**148.** Désignons par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque du plan et considérons le polynôme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1.$$

Pour un point M situé sur l'ellipse (fig. 86), le polynôme est égal à zéro. Imaginons qu'un point mobile P parte du point M et s'éloigne sur le prolongement du rayon OM; les deux coordonnées $x$ et $y$ augmentant en valeur absolue, le polynôme va en croissant indéfiniment; il prend donc des valeurs positives de plus en plus grandes. Au contraire, si le point mobile se rapproche du

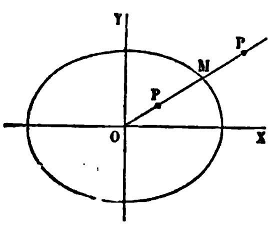


Fig. 86.

centre, le polynôme diminue et prend des valeurs négatives. Ainsi le polynôme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ reste négatif pour tous les points situés à l'intérieur de l'ellipse, sur l'ellipse il est nul, et il devient positif pour tous les points situés en dehors de l'ellipse.

**149.** *Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'un des axes de l'ellipse sont proportionnels aux produits des segments correspondants formés sur cet axe.*

En effet, si l'on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque M de l'ellipse (fig. 85), on a, en vertu de l'équation (2)

$$\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{(a-x)(a+x)}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Mais les deux segments AP, A'P de l'axe AA' sont égaux respectivement à $a-x$ et à $a+x$ ; on a donc

$$\frac{\text{MP}^2}{\text{AP}\times\text{A'P}}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Ainsi le carré de l'ordonnée est au produit des segments formés sur l'axe dans un rapport constant.

**150.** *Les ordonnées perpendiculaires au grand axe de l'ellipse sont aux ordonnées correspondantes du cercle décrit sur cet axe comme diamètre dans le rapport constant du petit axe au grand axe.*

Soit AA' le grand axe de l'ellipse (fig. 87) ; sur ce grand axe comme diamètre décrivons un cercle ; à l'ordonnée MP de l'ellipse correspond l'ordonnée $M_1P$ du cercle. L'équation (2) s'écrit

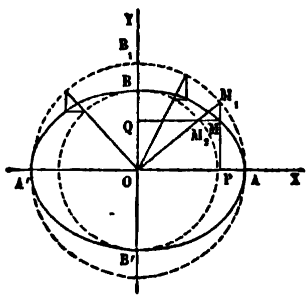


Fig. 87.

$$\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{a};$$

mais $\sqrt{a^2-x^2}$ représente l'ordonnée $M_1P$ du cercle ; on a donc

$$\frac{\text{MP}}{\text{M}_1\text{P}}=\frac{b}{a}.$$

Le petit axe jouit de la même propriété ; l'ordonnée MQ,

perpendiculaire au petit axe, est à l'ordonnée correspondante $M_2Q$ du cercle décrit sur cet axe comme diamètre dans le rapport constant du grand axe au petit axe.

*L'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle.* Imaginons que l'on fasse tourner le cercle $AB_1A'$ autour de l'axe AA' d'un angle $\varphi$, tel que l'on ait $\cos\varphi = \frac{b}{a}$, l'ordonnée $PM_1$ du cercle tournera autour du point P, tout en restant perpen-
du cercle tournera autour du point P, tout en restant perpendiculaire à l'axe AA'; dans cette position, elle se projettera sur la droite PM; pour avoir la longueur de la projection, il suffit de multiplier la longueur $PM_1$ par $\cos\varphi$ ou par $\frac{b}{a}$, ce qui donne l'ordonnée PM de l'ellipse. Ainsi le point $M_1$ du cercle a pour projection le point M de l'ellipse ; chacun des points du cercle se projetant ainsi au point correspondant de l'ellipse, il s'ensuit que l'ellipse est la projection du cercle.

On peut aussi considérer le cercle comme la projection orthogonale d'une ellipse. Imaginons que l'on fasse tourner l'ellipse autour de l'axe BB' d'un angle $\varphi$ ayant pour cosinus $\frac{b}{a}$, l'ordonnée QM de l'ellipse aura pour projection l'ordonnée $QM_2$ du cercle décrit sur BB' comme diamètre, et le petit cercle sera la projection de l'ellipse.

**151**. *Construction de l'ellipse par points.* On déduit de ce qui précède un moyen très-simple de construire l'ellipse par points. Sur chacun des deux axes de l'ellipse comme diamètre on décrit un cercle (fig. 87); du centre on trace un rayon quelconque qui coupe les deux cercles en $M_1$ et $M_2$ ; par le point $M_1$, on mène une parallèle au petit axe, par le point $M_2$ une parallèle au grand axe ; le point d'intersection M de ces deux droites appartient à l'ellipse. Après avoir déterminé de la sorte un nombre suffisant de points, on fait passer un trait continu par tous ces points, et l'ellipse est ainsi construite.

**152**. *Construire les points d'intersection d'une ellipse et d'une droite.* Il est utile de savoir déterminer les points où une

droite donnée MM′ coupe une ellipse définie par ses deux axes AA′, BB′ (fig. 88), sans que l'ellipse soit tracée. Ainsi que nous l'avons dit, l'ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale du cercle $AB_1A'$, décrit sur le grand axe AA′ comme diamètre, et que l'on fait tourner autour de AA′

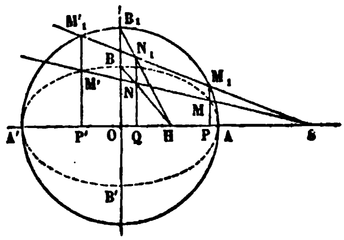


Fig. 88.

d'un angle $\varphi$ ayant pour cosinus $\frac{b}{a}$. Cherchons dans le plan du cercle la droite $M_1M'_1$, qui a pour projection MM′ dans le plan de l'ellipse; soit N un point quelconque de la droite MM′; prolongeons la droite BN jusqu'à sa rencontre en H avec l'axe AA′; la droite $B_1H$ se projette sur BH; par conséquent, le point $N_1$, où elle coupe l'ordonnée QN, se projette en N. On obtiendrait de même un autre point quelconque de la droite $M_1M'_1$; mais il est plus simple de se servir du point S où la droite MM′ rencontre l'axe; la droite $SN_1$ a pour projection la droite donnée sur le plan de l'ellipse. Cette droite $SN_1$ coupe le cercle en deux points $M_1, M'_1$; les ordonnées $M_1P$, $M'_1P'$ détermineront sur la droite donnée les deux points M, M′ où cette droite rencontre l'ellipse.

TANGENTE.

**153.** Nous avons trouvé (n° 125) l'équation de la tangente à une courbe du second degré; quand l'équation de l'ellipse est mise sous la forme simple

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

l'équation de la tangente au point M, ayant pour coordonnées $x$ et $y$, devient

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1=0. \tag{4}$$

Le coefficient angulaire de la tangente a pour valeur $-\frac{b^2x}{a^2y}$,

On voit qu'en A et A' la tangente est perpendiculaire à l'axe A'A, qu'en B et B' elle lui est parallèle, et que, quand le point de contact se meut sur l'ellipse de A en B, la tangente fait avec A'A un angle obtus qui croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$.

La normale, étant perpendiculaire à la tangente, a pour équation

$$Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(X - x).$$

**184.** *Construction de la tangente en un point de l'ellipse.*

Si dans l'équation de la tangente on fait $Y = 0$, on obtient l'abscisse $X = \frac{a^2}{x}$ du point T où la tangente rencontre le prolongement du grand axe (fig. 89). Comme cette valeur de OT est indépendante du petit axe $2b$ et de l'ordonnée $y$ du point de contact, il en résulte que, si sur l'axe A'A on construit plusieurs ellipses, les tangentes aux points qui ont même abscisse passent par un même point T situé sur le prolongement de l'axe A'A. Or, parmi ces ellipses, se trouve le cercle $AB_1A'$; pour construire la tangente à l'ellipse au point M, on mènera une tangente au cercle au point $M_1$, situé sur la même ordonnée; on joindra le point M au point T, où la tangente au cercle rencontre le prolongement de l'axe A'A; la droite MT, ainsi obtenue, est la tangente à l'ellipse.

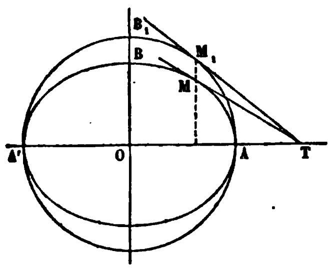


Fig. 89.

Cette construction revient à considérer la tangente à l'ellipse au point M comme la projection de la tangente au cercle au point correspondant $M_1$. En effet, quand on fait tourner le plan du cercle autour de l'axe AA' de l'angle $\varphi$, le point T, où la tangente $M_1T$ rencontre l'axe, reste immobile; le point $M_1$ se projetant en M, la droite $M_1T$ a pour projection MT; c'est la tangente à l'ellipse.

**185.** *Mener une tangente par un point extérieur* P. Dési-

gnons par $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point P (fig. 90). Nous avons trouvé (n° 126) l'équation de la corde des contacts MM'. La détermination des points de contact revient donc à la résolution des deux équations simultanées

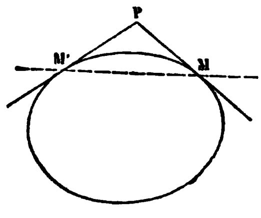


Fig. 90.

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$(5) \qquad \frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

En éliminant $y$, on obtient l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)-2\frac{xx_1}{a^2}+1-\frac{y_1^2}{b^2}=0,$$

dont les racines sont les abscisses des points de contact M et M' des deux tangentes menées du point P. Cette équation, dans laquelle on peut regarder $\frac{x}{a}$ comme l'inconnue, aura ses racines réelles si la condition $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1>0$ est satisfaite, c'est-à-dire si le point P est en dehors de l'ellipse.

Il est facile de construire géométriquement les tangentes menées du point P, en considérant l'ellipse comme la projection du cercle $AB_1A'$ (fig. 91). Cherchons dans le plan du cercle le point $P_1$, qui a pour projection le point P dans le plan de l'ellipse. Traçons dans le plan de l'ellipse la droite PB, que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre avec l'axe en H; la droite $HB_1$, ayant pour projection HB, passera par le point $P_1$ et déterminera ce point. Du point $P_1$ menons au cercle les tangentes $P_1M_1$, $P_1M'_1$ que nous prolongerons jusqu'à leur rencontre avec l'axe en T et T'; les droites PT, PT',

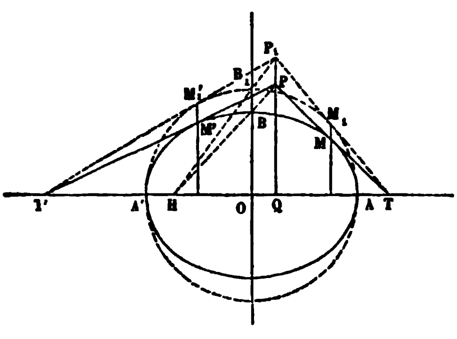


Fig. 91.

projections des tangentes au cercle, seront tangentes à l'ellipse, et les points de contact M et M′ seront situés sur les ordonnées des points $M_1$, $M'_1$. Pour que l'on puisse effectuer ces constructions, il n'est pas nécessaire que l'ellipse soit tracée.

**156.** ***Mener une tangente parallèle à une droite donnée.*** Soit $y=mx$ l'équation de la droite donnée OL, que l'on peut supposer menée par le centre (fig. 92). Appelons $x$ et $y$ les coordonnées du point de contact M; ce point étant sur l'ellipse, on a l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

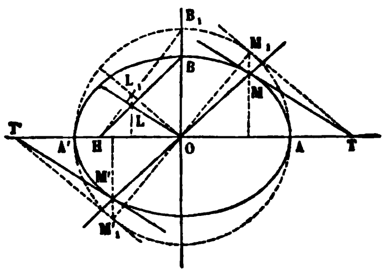


Fig. 92.

le coefficient angulaire de la tangente devant être égal à $m$, on a la seconde équation

$$-\frac{b^2x}{a^2y}=m.$$

Ces deux équations simultanées déterminent les deux inconnues $x$ et $y$; la première représente l'ellipse proposée; la seconde une droite MM′ passant par le centre; les points où cette droite rencontre l'ellipse sont les points de contact.

Il est facile de construire ces tangentes géométriquement. Cherchons d'abord dans le plan du cercle le diamètre $OL_1$, qui a pour projection OL sur le plan de l'ellipse; il suffit de joindre le point B à un point quelconque L de la droite OL et de prolonger la droite BL jusqu'à sa rencontre avec l'axe en H; puis de tracer $B_1H$ et de prendre le point d'intersection $L_1$ de cette droite avec l'ordonnée du point L; le point L étant la projection du point $L_1$, la droite OL est la projection de $OL_1$. On mène au cercle des tangentes $M_1T$, $M'_1T'$ parallèles à $OL_1$, et par les points T et T′ où ces tangentes rencontrent l'axe, des parallèles TM, T′M′ à la droite OL. On a les tangentes demandées; car les projections OL, TM des droites parallèles $OL_1$, $TM_1$ sont elles-mêmes parallèles. Les points de contact M et M′ sont déterminés par les ordonnées des points $M_1$ et $M_1'$.

**157.** On peut obtenir l'équation de la tangente à l'ellipse sous d'autres formes qu'il est bon de connaître.

Si l'on désigne par $\alpha$ l'angle que fait avec l'axe des $x$ la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente et par $p$ la longueur de cette perpendiculaire, la tangente sera représentée par l'équation (n° 83)

$$X\cos\alpha + Y\sin\alpha - p = 0;$$

en identifiant avec l'équation (4), on a les relations

$$\frac{\frac{x}{a}}{a\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{b}}{b\sin\alpha} = \frac{1}{p} = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}};$$

d'où

$$p = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}.$$

Ainsi la tangente aura pour équation

$$(6)\qquad X\cos\alpha + Y\sin\alpha = \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}.$$

On peut encore trouver l'équation de la tangente en cherchant les points d'intersection de l'ellipse et d'une droite et exprimant que ces deux points coïncident, comme nous l'avons fait pour le cercle (n° 94). On obtient ainsi l'équation de la tangente sous la forme

$$(7)\qquad y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

**158.** Comme application, proposons-nous de trouver le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse. Supposons que l'on veuille mener par un point extérieur P (fig. 93), ayant pour coordonnées $x'$ et $y'$, des tangentes à l'ellipse; la tangente devant passer par le point P, on aura l'équation de condition

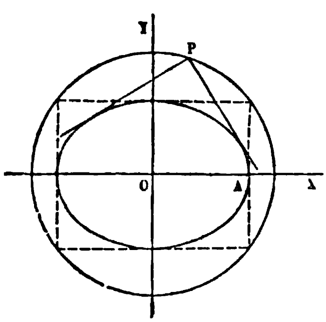


Fig. 93.

$$y' = mx' \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

dans laquelle le coefficient angulaire $m$ est l'inconnue. Cette équation, mise sous forme entière

$$(a^2 - x'^2)m^2 + 2x'y'm + (b^2 - y'^2) = 0,$$

est du second degré; ses deux racines donnent les directions des deux tangentes menées du point P à l'ellipse, et, par conséquent, déterminent ces tangentes. Les deux tangentes menées par le point P seront rectangulaires, si le produit des deux valeurs de $m$ est égal à $-1$, ce qui exige que les coordonnées du point P vérifient la relation

$$\frac{b^2-y'^2}{a^2-x'^2}=-1, \quad \text{ou} \quad x'^2+y'^2=a^2+b^2.$$

Ainsi le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'ellipse est le cercle circonscrit au rectangle construit sur les axes.

## DIAMÈTRES.

**189.** Nous avons trouvé (n° 131) l'équation générale des diamètres dans les courbes du second degré. En représentant par $f(x, y)=0$ l'équation de la courbe, et par $m$ le coefficient angulaire des cordes parallèles MM' (fig. 94), nous avons vu que l'équation du diamètre DD' se met sous la forme

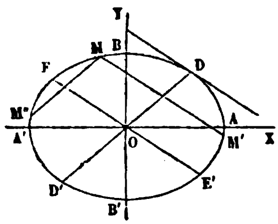


Fig. 94.

$$f'_x+mf'_y=0.$$

L'ellipse étant rapportée à ses axes, l'équation du diamètre se réduit à

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2my}{b^2}=0, \quad \text{ou} \quad y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

Si l'on désigne par $m'$ le coefficient angulaire du diamètre DD', on a, entre la direction des cordes et celle du diamètre, la relation

$$mm'=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{8}$$

Nous avons vu aussi que si l'on mène des cordes MM" parallèles au diamètre DD', le diamètre OE, qui divise ces cordes en deux parties égales, a pour coefficient angulaire $m$; les deux diamètres DD', EE' forment un système de diamètres conjugués, et leurs coefficients angulaires $m'$ et $m$ sont liés par la relation (8).

Cette relation montre que les deux coefficients angulaires $m$ et $m$ sont de signes contraires, et, par conséquent, que les deux demi-diamètres conjugués OD et OE, situés d'un même côté du grand axe, sont placés de part et d'autre du petit axe; si le premier part de la position OA et tourne de OA vers OB, le second part de la position OB et tourne de OB vers OA'.

**160.** La tangente en un point quelconque D de l'ellipse est parallèle au diamètre EE' conjugué du diamètre DD' qui passe au point de contact. En effet, si l'on appelle $x$ et $y$ les coordonnées du point D, le diamètre OD a pour coefficient angulaire $m=\frac{y}{x}$; le coefficient angulaire de la tangente au point D est $m'=-\frac{b^2x}{a^2y}$; ces deux coefficients vérifient la relation $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

On se rend bien compte de cette propriété en imaginant que la sécante MM' se meuve parallèlement au diamètre EE', et s'éloigne du centre; les deux points d'intersection M et M' se rapprochent de plus en plus du milieu de la corde, et finissent par se confondre en D; alors la sécante devient tangente au point D.

**161.** Les propriétés des diamètres conjugués se montrent immédiatement, quand on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle. Deux diamètres rectangulaires $OD_1$, $OE_1$ (fig. 95), dans le plan du cercle, forment un système de diamètres conjugués; car chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; les cordes parallèles se projettent sur le plan de l'ellipse suivant des cordes parallèles; le milieu d'une corde a pour projection le milieu de la projection de la corde; chacun des diamètres OD, OE, projections des premiers, divise donc en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre; ce sont deux diamètres conjugués de l'ellipse.

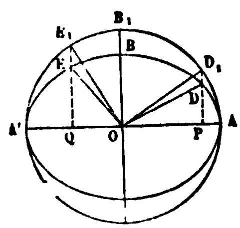


Fig. 95.

On en déduit facilement la relation qui existe entre les coefficients angulaires $m$ et $m'$ de deux diamètres conjugués. Si l'on appelle $m_1$ et $m'_1$ les coefficients angulaires des deux diamètres conjugués $OD_1$, $OE_1$ du cercle, on a $m = \frac{b}{a} m_1$, $m' = \frac{b}{a} m'_1$; d'où $mm' = \frac{b^2}{a^2} m_1 m'_1$; puisque les diamètres conjugués du cercle sont rectangulaires, on a $m_1 m'_1 = -1$; il en résulte $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

Quand on donne un diamètre OD, on peut trouver le conjugué OE, sans que l'ellipse soit tracée. On construira le diamètre $OD_1$ qui a pour projection OD; on mènera le diamètre $OE_1$ perpendiculaire à $OD$, et on projettera $OE_1$; la projection OE sera le diamètre demandé.

**162.** *Ellipse rapportée à deux diamètres conjugués.* D'après ce qui a été dit au n° 136, lorsqu'on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués OD, OE (fig. 96), l'équation de l'ellipse devient

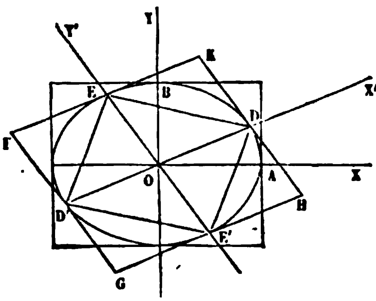


Fig. 96.

$$A''x'^2 + C''y'^2 + H = 0.$$

Les coefficients A″ et C″ ayant un même signe, contraire à celui de H, si l'on pose

$$a'^2 = -\frac{H}{A''}, \quad b'^2 = -\frac{H}{C''},$$

l'équation se met sous la forme

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1, \tag{9}$$

qui est la même que celle de la courbe rapportée à ses axes.

Il en résulte que les calculs effectués pour démontrer les propriétés de l'ellipse, au moyen de l'équation de la courbe rapportée à ses axes, et dans lesquels on n'a pas supposé les coordonnées orthogonales, pourront être répétés avec l'équa-

tion de la courbe rapportée à un système de diamètres conjugués. Ainsi, l'ellipse étant rapportée au système des diamètres conjugués OD et OE, la tangente aura pour équation

$$\frac{x'X'}{a'^2}+\frac{y'Y'}{b'^2}=1.$$

Mais l'équation de la normale ne conserverait pas la forme qui correspond aux axes OA et OB.

### THÉORÈMES D'APOLLONIUS.

**163.** On démontre aisément les théorèmes d'Apollonius par la méthode du n° 142. Imaginons l'ellipse rapportée successivement à ses deux axes et à un système de diamètres conjugués faisant entre eux un angle $\theta$. Par les formules de transformation des coordonnées, le binôme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

se change en

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}.$$

De même, le binôme

$$x^2+y^2$$

devient

$$x'^2+y'^2+2x'y'\cos\theta,$$

puisque chacune de ces deux expressions représente le carré de la distance de l'origine à un même point du plan. Il résulte de là que le polynôme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{\lambda}(x^2+y^2),$$

ou

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\lambda}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\lambda}\right)y^2, \tag{10}$$

dans lequel $\lambda$ désigne une constante arbitraire, se transforme en

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{1}{\lambda}(x'^2+y'^2+2x'y'\cos\theta),$$

ou

$$\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{\lambda}\right)x'^2-2\frac{\cos\theta}{\lambda}x'y'+\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{\lambda}\right)y'^2. \tag{11}$$

Les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'un des polynômes (10) ou (11) devient un carré parfait, étant les mêmes, les deux équations

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\lambda}\right)=0$$

ou

(12) $$(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)=0,$$

et

$$\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{\cos^2\theta}{\lambda^2}=0$$

ou

(13) $$\lambda^2-(a'^2+b'^2)\lambda+a'^2b'^2\sin^2\theta=0,$$

ont les mêmes racines. Il résulte de là que les deux racines de l'équation (13) sont égales respectivement à $a^2$ et à $b^2$; on en déduit les deux relations

(14) $$a'^2+b'^2=a^2+b^2,$$

(15) $$a'^2b'^2\sin^2\theta=a^2b^2,\ \text{ou}\ a'b'\sin\theta=ab.$$

On obtient ainsi les deux théorèmes suivants :

1° *La somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques d'une ellipse est constante et égale à la somme des carrés des axes;*

2° *L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante et égale à celle du rectangle construit sur les axes.*

Les relations (21) du n° 142 donnent immédiatement les deux équations (14) et (15).

**164.** On peut démontrer facilement ces théorèmes en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle.

Deux diamètres conjugués OD, OE de l'ellipse sont les

projections de deux diamètres rectangulaires $OD_1$, $OE_1$ du cercle (fig. 95). Les angles $D_1OP$, $E_1OQ$ étant complémentaires, les triangles rectangles $D_1OP$, $E_1OQ$ sont égaux, et l'on a

$$OQ = D_1P \text{; mais } \overline{OD_1}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{D_1P}^2 \text{;}$$

il en résulte

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = a^2.$$

Les longueurs OP et OQ étant les projections des deux demi-diamètres conjugués OD et OE sur le grand axe de l'ellipse, la somme des carrés de ces deux projections est constante, et l'on a

$$a'^2 \cos\alpha + b'^2 \cos^2\beta = a^2,$$

en designant par $\alpha$ et $\beta$ les angles que font avec l'axe OA les demi-diamètres OD et OE.

Il en est de même pour l'autre axe ; les projections des deux demi-diamètres conjugués sur le petit axe sont égales aux ordonnées DP et EQ; mais $DP = \frac{b}{a} D_1P$, $EQ = \frac{b}{a} E_1Q$, et, par suite,

$$\overline{DP}^2 + \overline{EQ}^2 = \frac{b^2}{a^2}(\overline{D_1P}^2 + \overline{E_1Q}^2);$$

les longueurs $E_1Q$ et OP étant égales, on a

$$\overline{D_1P}^2 + \overline{E_1Q}^2 = \overline{D_1P}^2 + \overline{OP}^2 = a^2,$$

et, par suite,

$$\overline{DP}^2 + \overline{EQ}^2 = b^2,$$

ou

$$a'^2 \sin^2\alpha + b'^2 \sin^2\beta = b^2.$$

En ajoutant membre à membre les deux relations précédentes, on obtient la relation

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

**165.** Pour démontrer la propriété relative à l'aire du parallélogramme, nous nous servirons du théorème suivant :

***La projection d'une aire plane sur un plan quelconque est égale à l'aire projetée multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans.***

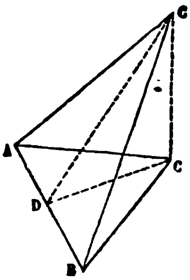


Fig. 97.

Considérons d'abord un triangle ABC (fig. 97) ayant un côté AB parallèle au plan de projection; nous pouvons supposer que le plan de projection passe par ce côté AB; du sommet C, abaissons sur ce plan une perpendiculaire CC', et, dans ce plan, menons C'D perpendiculaire à AB; la droite CD sera aussi perpendiculaire à AB et l'angle CDC' mesurera l'angle dièdre $\varphi$ des deux plans. Cela posé, on a

$$C'D = CD \cos\varphi,$$

d'où

$$\frac{AB \times C'D}{2} = \frac{AB \times CD}{2} \cos\varphi,$$

et, par suite,

$$AC'B = ACB \times \cos\varphi.$$

Ainsi l'aire du triangle AC'B est égale à celle du triangle ACB multipliée par cos $\varphi$.

Supposons maintenant que le triangle ABC (fig. 98) n'ait aucun de ses côtés parallèle au plan de projection; nous pouvons faire passer ce plan par un sommet A, de telle sorte que les deux autres sommets soient d'un même côté; le plan du triangle prolongé coupe le plan de projection suivant une droite AI, et la droite CB perce ce plan au point I; les triangles AIC, AIB se projettent suivant AIC', AIB', et l'on a, d'après ce qui a été dit,

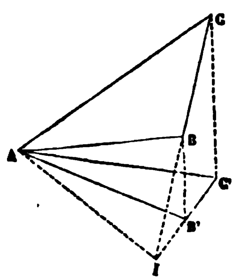


Fig. 98.

$$AIC' = AIC \times \cos\varphi,$$
$$AIB' = AIB \times \cos\varphi.$$

d'où, par soustraction,

$$AB'C' = ABC \times \cos\varphi.$$

Le théorème, étant démontré pour un triangle, s'étend à un polygone plan, que l'on peut toujours décomposer en

triangles, et même à une aire plane limitée par une courbe fermée quelconque; car on peut regarder cette aire plane comme la limite de l'aire d'un polygone inscrit, dont on augmente indéfiniment le nombre des côtés, de manière que chacun tende vers zéro.

Quand on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est la projection d'un carré circonscrit au cercle; le carré ayant une aire constante égale $4a^2$, celle du parallélogramme est aussi constante et égale à $4a^2 \cos\varphi$, c'est-à-dire à $4ab$.

### AIRE DE L'ELLIPSE.

**166.** Le même théorème nous donne immédiatement l'aire de l'ellipse. L'ellipse étant la projection d'un cercle, son aire est égale à celle du cercle $\pi a^2$, multipliée par $\cos\varphi$ ou par $\frac{b}{a}$, ce qui donne $\pi ab$.

### DIAMÈTRES CONJUGUÉS ÉGAUX.

**167** Nous avons vu (n° 159) que les deux demi-diamètres conjugués OD, OE sont situés de part et d'autre du petit axe OB (fig. 99). On sait que le rayon de l'ellipse est d'autant plus grand qu'il s'écarte davantage du petit axe; pour que les deux diamètres conjugués deviennent égaux, il faut donc que ces deux diamètres fassent des angles égaux avec le petit axe OB, ce qui exige que les angles $\alpha$ et $\beta$ soient supplémentaires. On a donc $\tang^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2}$ et, par suite, $\tang \alpha = \frac{b}{a}$; ainsi les diamètres conjugués égaux OG et OH coïncident avec les diagonales du rectangle construit sur les axes.

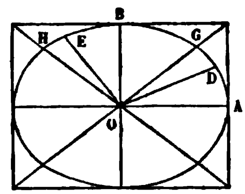


Fig. 99.

De la relation $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, on déduit $a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$, et

l'équation de l'ellipse, rapportée à ses diamètres conjugués égaux, est

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{2};$$

elle a même forme que l'équation du cercle, seulement les coordonnées sont obliques.

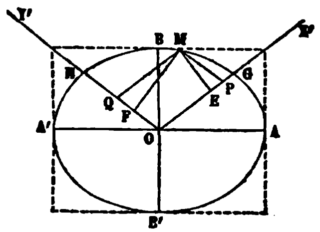


Fig. 100.

Cette équation signifie que la somme des carrés des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux diamètres conjugués égaux est constante. En effet, soient $\theta$ l'angle des deux diamètres conjugués égaux, MP et MQ les coordonnées du point M (fig. 100), ME et MF les perpendiculaires abaissées du point M sur ces diamètres, on a $ME = y' \sin\theta$, $MF = x' \sin\theta$; d'où

$$\overline{ME}^2 + \overline{MF}^2 = (x'^2 + y'^2)\sin^2\theta = \frac{(a^2 + b^2)\sin^2\theta}{2} = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

### CORDES SUPPLÉMENTAIRES.

**168.** On appelle *cordes supplémentaires* dans l'ellipse deux cordes MC, MC', qui, partant d'un même point de l'ellipse, aboutissent aux extrémités d'un diamètre CC' (fig. 101).

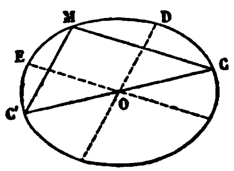


Fig. 101.

Deux cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués. Menons, en effet, les diamètres OD et OE parallèles aux cordes supplémentaires MC', MC. Dans le triangle CMC', la droite OD parallèle à C'M divise en parties proportionnelles les deux côtés CC' et CM; le centre O étant le milieu de CC', il en résulte que le diamètre OD divise en deux parties égales la corde CM, et, par suite, toutes les cordes parallèles au diamètre OE. De même, le diamètre OE divise en deux parties égales la corde C'M, et, par suite, toutes les cordes parallèles à OD. Donc les

deux diamètres OD, OE, parallèles aux cordes supplémentaires MC', MC, sont conjugués.

Réciproquement, si par les extrémités d'un diamètre CC' on mène des droites parallèles à deux diamètres conjugués OD, OE, ces droites se couperont sur l'ellipse. En effet, soit M le point où la corde CM, parallèle à OE, rencontre l'ellipse; joignons C'M; les cordes supplémentaires MC, MC' étant parallèles à deux diamètres conjugués, la seconde corde C'M sera parallèle à OD.

**169.** L'étude de la variation de l'angle de deux diamètres conjugués est ainsi ramenée à l'étude de la variation de l'angle de deux cordes supplémentaires, c'est-à-dire de l'angle inscrit dans une demi-ellipse. Pour simplifier le calcul, on supposera les deux cordes supplémentaires menées par les extrémités du grand axe (fig. 102). L'angle AMA', que nous appellerons $\theta$, est égal à la différence des deux angles MAX, MA'X; les deux droites AM, A'M ayant pour coefficients angulaires $\frac{y}{x-a}$, $\frac{y}{x+a}$, on a

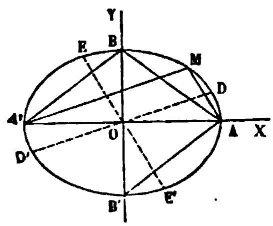


Fig. 102.

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{x^2-a^2}} = \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2},$$

et, en remplaçant $x^2$ par sa valeur tirée de l'équation de l'ellipse,

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)y}.$$

Si le point M décrit la moitié supérieure ABA' de l'ellipse, la tangente étant négative, l'angle $\theta$ est obtus; quand le point M est au point A, c'est-à-dire quand $y=0$, l'angle est droit; le point M marchant de A vers B, $y$ augmente; la valeur absolue de tang $\theta$ diminuant, l'angle obtus $\varphi$ augmente aussi et acquiert sa valeur maximum au point B; alors on a $y=b$ et

$\text{tang}\,\theta = -\frac{2ab}{a^2-b^2}$ ; quand le point M dépasse le point B et parcourt le quart d'ellipse BA', l'angle $\theta$ diminue de sa valeur maximum jusqu'à un angle droit.

Il résulte de là que l'angle des demi-diamètres conjugués OD, OE, situés d'un même côté du grand axe, est obtus et varie depuis un angle droit jusqu'à la valeur maximum ABA'; les diamètres conjugués, qui comprennent l'angle maximum, étant respectivement parallèles aux cordes supplémentaires A'B, AB, et, par suite, également inclinés de part et d'autre sur le petit axe OB, sont égaux.

Nous avons étudié la variation de l'angle obtus DOE de deux diamètres conjugués, l'angle aigu DOE' varie en sens inverse. On obtient directement cet angle en menant les cordes supplémentaires par les extrémités du petit axe BB'; quand le point M décrit le quart d'ellipse BA, l'angle inscrit diminue depuis un angle droit jusqu'au minimum BAB', supplémentaire du maximum obtus ABA'.

**170.** Lorsqu'une ellipse est tracée, on peut déterminer graphiquement le centre et les axes. Pour trouver le centre, on mènera deux cordes parallèles suffisamment écartées l'une de l'autre; on joindra les milieux de ces cordes, ce qui donnera un diamètre, dont le milieu sera le centre. Si sur ce diamètre on décrit un demi-cercle, et que l'on joigne aux deux extrémités du diamètre le point où ce demi-cercle coupe la demi-ellipse, on aura deux cordes supplémentaires perpendiculaires entre elles; les diamètres parallèles, formant un système de diamètres conjugués rectangulaires, seront les axes de l'ellipse.

On pourrait obtenir de la même manière les deux systèmes de diamètres conjugués qui font entre eux un angle donné compris entre le minimum et le maximum; il suffirait de décrire sur un diamètre un segment capable de l'angle donné.

**171.** *Construire une ellipse étant donnés deux diamètres conjugués.* Soient DD', EE' (fig. 103) les deux diamètres conjugués

donnés, dont nous désignerons les longueurs par $2a'$ et $2b'$. L'équation de l'ellipse, rapportée à ces deux diamètres conjugués, est

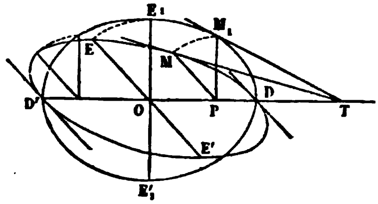


Fig. 103.

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Par le centre, menons la droite $E_1E'_1$ perpendiculaire à DD', et prenons $OE_1=OE$; l'ellipse qui a pour axes DD', $E_1E'_1$, rapportée à ces axes, est représentée par la même équation. Il en résulte que les ordonnées MP, $M_1P$, qui correspondent à une même abscisse OP, sont égales entre elles. Imaginons que, par le procédé indiqué au n° 149, on ait construit différents points de l'ellipse $DE_1D'$, dont on connaît les axes; soit $M_1$ l'un de ces points, $M_1P$ son ordonnée; si par le point P on mène PM parallèle à OE et égale à $PM_1$, on aura un point M de l'ellipse demandée. Chaque point de la première ellipse donnera un point correspondant de la seconde. Ceci revient à déformer la première ellipse en faisant tourner chaque ordonnée $PM_1$ autour de son pied P d'un angle constant.

Le même mode de transformation s'applique à la tangente. La tangente au point M est représentée par l'équation

$$\frac{xX}{a'^2}+\frac{yY}{b'^2}=1, \tag{4}$$

en coordonnées obliques; cette équation représente aussi la tangente au point $M_1$ en coordonnées rectangulaires. Ces deux tangentes coupent le prolongement du diamètre DD' au même point T, dont on obtient l'abscisse en faisant $Y=0$.

Au lieu de construire l'ellipse par points, comme nous l'avons expliqué, on pourrait déterminer d'abord les axes de l'ellipse, et construire ensuite cette ellipse au moyen de ses axes. La détermination des axes dépend du théorème suivant.

**172**. *Deux diamètres conjugués quelconques déterminent sur une tangente fixe* PQ *deux segments* DP, DQ, *dont le produit est*

*constant et égal au carré du demi-diamètre* OE *parallèle à la tangente* (fig. 104).

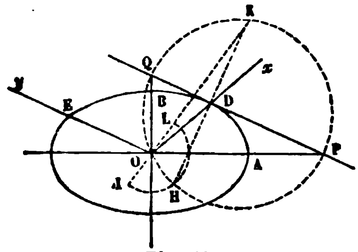



Fig. 104.

Si l'on prend pour axes des coordonnées le diamètre OD, qui passe par le point de contact et le diamètre conjugué OE, et si l'on appelle $a'$ et $b'$ les longueurs de ces demi-diamètres, l'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Soient $y=mx \quad , \quad y=m'x$

les équations de deux diamètres conjugués OA, OB; d'après la remarque faite au n° 160, les coefficients angulaires seront liés par la relation $mm'=-\frac{b'^2}{a'^2}$. Si, dans ces équations, on fait $x=a'$, on trouve $\mathrm{DP}=-ma'$, $\mathrm{DQ}=m'a'$; d'où

$$\mathrm{DP}\times\mathrm{DQ}=-mm'a'^2=b'^2.$$

**173.** On démontre facilement ce théorème quand on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle. Soient $\mathrm{OA}_1$, $\mathrm{OB}_1$ (fig. 105) deux diamètres rectangulaires du cercle, $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ la tangente en un point quelconque $\mathrm{M}_1$; menons le rayon $\mathrm{OM}_1$ et le rayon $\mathrm{ON}_1$ parallèle à la tangente; dans le triangle rectangle $\mathrm{P}_1\mathrm{OQ}_1$, on a

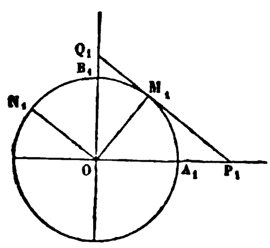



Fig. 105.

$$\mathrm{M}_1\mathrm{P}_1\times\mathrm{M}_1\mathrm{Q}_1=\mathrm{OM}_1^2=\mathrm{ON}_1^2.$$

Quand on projette la figure, les diamètres $\mathrm{OA}_1$, $\mathrm{OB}_1$ donnent deux diamètres conjugués de l'ellipse, la tangente $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ une tangente à l'ellipse et la droite $\mathrm{ON}_1$ une parallèle à cette tangente; les droites $\mathrm{M}_1\mathrm{P}_1$, $\mathrm{M}_1\mathrm{Q}_1$, $\mathrm{ON}_1$, étant parallèles, ont des projections MP, MQ, ON qui leur sont proportionnelles; on a donc aussi entre ces projections la relation

$$\mathrm{MP}\,.\,\mathrm{MQ}=\mathrm{ON}^2.$$

**174.** Supposons que les deux diamètres conjugués OA et OB soient les axes de l'ellipse (fig. 104). Le cercle décrit sur PQ comme diamètre passe par le point O, et l'ordonnée DH, perpendiculaire à PQ, est égale à OE. Il en résulte un moyen facile de construire les directions des axes, quand on connaît deux diamètres conjugués OD et OE. Par le point D on mènera une parallèle à OE; cette parallèle sera tangente au point D; on élèvera sur cette droite une perpendiculaire DH égale à OE, et on décrira un cercle ayant son centre sur PQ et passant par les points O et H; les droites OP et OQ qui vont du centre aux deux points P et Q, où le cercle coupe la tangente, donneront les directions des axes.

**175.** Il reste à déterminer les grandeurs des axes. Des relations

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2 \quad , \quad ab=a'b'\sin\theta,$$

démontrées au n° 163, on déduit

$$(a-b)^2=a'^2+b'^2-2a'b'\sin\theta=a'^2+b'^2-2a'b'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),$$

$$(a+b)^2=a'^2+b'^2+2a'b'\sin\theta=a'^2+b'^2-2a'b'\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right).$$

Comme on peut supposer que $\theta$ désigne l'angle aigu des diamètres conjugués, on voit par ces formules que la longueur $a-b$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont $a'$ et $b'$ et l'angle compris $\frac{\pi}{2}-\theta$. Ce triangle est le triangle ODH (fig. 104); car l'angle ODH est égal à $\frac{\pi}{2}-\theta$, et les deux côtés DO et DH sont égaux à $a'$ et $b'$; ainsi le troisième côté OH donnera $a-b$. De même $a+b$ est le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont $a'$ et $b'$ et l'angle compris supplémentaire du précédent; ce triangle est le triangle ODK, que l'on obtient en prolongeant la perpendiculaire DH d'une longueur égale à elle-même; le troisième côté OK donnera $a+b$. Si du point O comme centre, avec OH pour rayon, on décrit un cercle, la longueur KI sera égale au grand axe $2a$, la longueur KL au petit axe $2b$.

On peut remarquer que le grand axe, qui doit être compris dans l'angle aigu des diamètres conjugués, est dirigé suivant OA, bissectrice de l'angle HOK, le petit axe est la bissectrice de l'angle supplémentaire.

## EXERCICES.

1° Trouver le lieu des sommets des parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués d'une ellipse.

2° Trouver le lieu du milieu des cordes menées par un même point dans une ellipse.

3° Une corde d'un cercle se meut parallèlement à elle-même; par les extrémités on mène des droites parallèles à deux directions données; trouver le lieu du point de rencontre des parallèles.

4° Parmi tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, les parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués ont une aire minimum.

5° Parmi tous les parallélogrammes inscrits dans une même ellipse. ceux dont les diagonales forment un système de diamètres conjugués ont une aire maximum.

6° De toutes les ellipses inscrites dans un même parallélogramme, quelle est la plus grande?

7° De toutes les ellipses circonscrites à un même parallélogramme, quelle est la plus petite?

8° Parmi tous les systèmes de diamètres conjugués de l'ellipse, les axes forment une somme minimum et les diamètres conjugués égaux une somme maximum.

9° Inscrire dans l'ellipse une corde de direction donnée telle que la somme de sa longueur et de la distance de son point milieu au centre soit maximum. Trouver le lieu du milieu de cette corde, quand la direction varie.

10° Une droite se meut parallèlement à elle-même dans le plan de deux autres; on prend sur elle un point tel que la somme des carrés de ses distances aux intersections avec les droites fixes soit constante: quel est le lieu décrit par le point?

11° Étant données deux ellipses quelconques, on peut déterminer deux directions parallèles à la fois à deux diamètres conjugués de l'une et de l'autre ellipse; par les points communs aux deux courbes passe une troisième ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux sont parallèles à ces deux directions.

12° Une ellipse tourne autour de son centre; aux points où elle coupe une droite fixe, on mène des tangentes à la courbe; trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.

13° On donne un cercle et une droite fixe passant par son centre; une droite mobile égale au rayon s'appuie par une de ses extrémités sur le cercle, par l'autre sur la droite; trouver le lieu décrit par un point de la droite mobile.

14° Trouver l'aire de l'ellipse définie par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1.$$

15° Un triangle étant inscrit dans une ellipse, si on appelle R le rayon du cercle circonscrit, et $d$, $d'$, $d''$ les demi-diamètres parallèles aux côtés, on a $R = \frac{dd'd''}{ab}$.

16° Un rectangle quelconque étant circonscrit à une ellipse, le parallélogramme qui a pour sommets les points de contact a un périmètre constant, et deux côtés consécutifs font avec la tangente des angles égaux.

17° A partir d'un point quelconque d'une ellipse, on porte sur la normale une longueur égale à $\frac{k^2}{p}$, $k$ étant une constante et $p$ la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente; trouver le lieu de l'extrémité de cette droite.

18° Étant donnés une ellipse et le cercle construit sur le grand axe comme diamètre, on mène les normales au cercle et à l'ellipse aux points situés sur une même perpendiculaire au grand axe; trouver le lieu du point d'intersection de ces deux normales.

# CHAPITRE V

## De l'Hyperbole.

**176.** Construisons maintenant le lieu défini par l'équation

$$A'x^2+C'y^2+H=0,$$

dans laquelle A′ et C′ ont des signes contraires.

Lorsque la constante H est nulle, l'équation, résolue par rapport à $y$, donne

$$y=\pm\sqrt{-\frac{A'}{C'}}\,x;$$

elle représente deux droites passant par l'origine.

Nous supposons le cofficient C′ du même signe que H et le coefficient A′ de signe contraire; si l'on pose

$$a^2=-\frac{H}{A'},\quad b^2=\frac{H}{C'},$$

l'équation devient

(1) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

En la résolvant par rapport à $y$, on en déduit

(2) $$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

L'ordonnée $y$ n'est réelle que pour les valeurs de $x$ plus grandes que $a$ en valeur absolue; si donc, à partir de l'origine, on porte sur l'axe des $x$, de part et d'autre, deux longueurs

OA, OA′ égales à $a$, et que par les points A et A′ on mène des parallèles à l'axe des $y$, la courbe n'a aucun point entre ces parallèles.

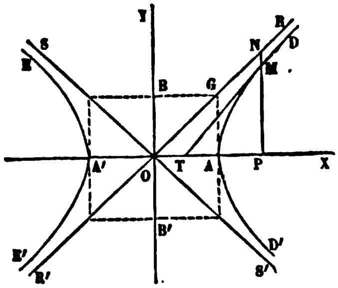



Fig. 106.

Quand $x$ croît de $a$ à $+\infty$, $y$ croît de o à $+\infty$ en valeur absolue, ce qui, à cause du double signe, donne deux arcs infinis AD, AD′, symétriques par rapport à l'axe des $x$. Il en est de même, quand $x$ varie de $-a$ à $-\infty$, ce qui donne les deux arcs A′E, A′E′, symétriques des précédents par rapport à l'axe des $y$. Ces quatre arcs égaux forment les deux branches de l'hyperbole.

L'hyperbole admet un centre et deux axes. L'axe AA′ rencontre seul la courbe; on l'appelle pour cette raison *axe transverse* ou réel; l'autre axe OY ne rencontre pas la courbe; on l'appelle axe *non transverse ou imaginaire;* la longueur AA′ de l'axe transverse est $2a$; par analogie, on dit que $2b$ est la longueur de l'axe non transverse, et on porte la longueur $b$ sur cet axe en OB et OB′. Les points A et A′ sont les deux sommets de l'hyperbole.

**177.** *Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe transverse sont proportionnels aux produits des segments correspondants formés sur cet axe.*

En effet, de l'équation (1) on déduit

$$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{(x+a)(x-a)}=\frac{b^2}{a^2};$$

donc

$$\frac{\overline{\text{MP}}^2}{\text{A'P}\times\text{AP}}=\frac{b^2}{a^2}.$$

**178.** *Asymptotes.* — Nous avons vu (nº 130) que, quand l'origine des coordonnées coïncide avec le centre de l'hyperbole, on obtient l'équation des asymptotes en supprimant le

terme constant dans l'équation de la courbe. Les deux asymptotes RR′, SS′ auront ici pour équation

(3) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0, \quad \text{ou} \quad y=\pm\frac{b}{a}x.$$

On peut vérifier aisément que la différence MN des ordonnées de la droite OR et de l'arc AD a pour limite zéro; car cette différence a pour expression

$$\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

L'arc AD est compris dans l'angle ROX et se rapproche indéfiniment de la droite OR, qui est son asymptote. Les droites OR′, OS, OS′ sont de même les asymptotes des arcs A′E′, A′E, AD′. D'après l'équation (3), les asymptotes R′R, S′S sont les diagonales du rectangle construit sur les axes.

**179.** *Hyperboles conjuguées.* — Deux hyperboles sont dites *conjuguées* lorsque, ayant même centre et mêmes axes, l'axe réel de l'une est axe imaginaire de l'autre. Ainsi l'hyperbole proposée a pour conjuguée une autre hyperbole ayant pour axe transverse $2b$ et pour axe imaginaire $2a$ (fig. 107). L'équation de cette seconde hyperbole est

(4) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes, puisque le rectangle construit sur les axes est le même pour les deux courbes. L'une des courbes est comprise dans les deux angles ROS′, R′OS, opposés par le sommet, la seconde dans les deux autres angles ROS, R′OS′.

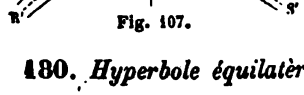


Fig. 107.

**180.** *Hyperbole équilatère.* — On dit qu'une hyperbole est équilatère lorsque les axes $a$ et $b$ ont même longueur. Dans ce cas, le rectangle des axes devient un carré, et les asymptotes sont perpendiculaires entre elles; l'hyperbole conjuguée est

égale à la première; on l'obtient en faisant tourner celle-ci d'un angle droit autour de son centre.

La condition pour que l'équation générale du second degré représente une hyperbole équilatère, a été donnée précédemment (n° 144); elle est $A + C - 2B\cos\theta = 0$.

L'hyperbole dont les axes sont $a$ et $b$ peut être construite au moyen de l'hyperbole équilatère dont l'axe est $a$, comme on a construit l'ellipse ayant pour axes $a$ et $b$ au moyen du cercle de rayon $a$, c'est-à-dire que la première hyperbole peut être regardée comme la projection orthogonale de la seconde. Mais cette considération n'est d'aucune utilité dans les constructions graphiques relatives à l'hyperbole, parce que le tracé d'une hyperbole équilatère n'est pas plus simple que celui d'une hyperbole quelconque.

**181.** Soient $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque du plan; considérons le polynôme

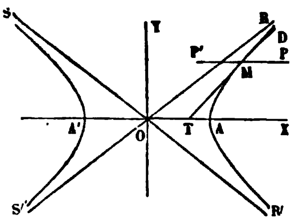


Fig. 108.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

Pour un point M appartenant à la courbe, ce polynôme est égal à zéro; si l'on fait marcher un point P à partir de M sur une parallèle à l'axe transverse AA' (fig. 108), le terme $\frac{y^2}{b^2}$ conserve une valeur invariable, tandis que le terme $\frac{x^2}{a^2}$ diminue ou augmente, suivant que le point P se rapproche ou s'éloigne de l'axe des $y$. Il en résulte que le polynôme a une valeur négative pour tous les points situés entre les deux branches de l'hyperbole, et positive pour tous les autres points du plan.

TANGENTE.

**182.** L'équation de la tangente au point M, dont les coordonnées sont $x$ et $y$, est

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} - 1 = 0. \tag{5}$$

Pour construire cette droite, on peut déterminer le point T (fig. 108), où elle coupe l'axe OX. Si, dans l'équation (5), on fait $Y=0$, il vient $X=OT=\frac{a^2}{x}$ ; on obtient cette longueur OT par une troisième proportionnelle.

**183.** Le coefficient angulaire de la tangente a pour valeur

$$\frac{b^2x}{a^2y}=\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}.$$

Supposons que le point M décrive l'arc AD ; en A le coefficient angulaire est infini, et la tangente perpendiculaire à l'axe transverse ; $x$ augmentant, le coefficient angulaire diminue constamment et tend vers la limite $\frac{b}{a}$, coefficient angulaire de l'asymptote OR ; l'angle MTX diminue donc de $\frac{\pi}{2}$ à ROX ; en même temps la valeur de OT diminue de $a$ à 0 ; il en résulte que l'asymptote est la position limite de la tangente, quand le point de contact s'éloigne indéfiniment.

**184.** *Mener une tangente par un point extérieur* P. — Si l'on appelle $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point P, les points de contact sont déterminés par l'équation de la corde des contacts

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}-1=0, \tag{6}$$

jointe à l'équation (1) de l'hyperbole.

En éliminant $y$, on obtient l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right)-2\frac{x_1x}{a^2}+\left(1+\frac{y_1^2}{b^2}\right)=0,$$

dont les racines sont les abscisses des points de contact M et M' des deux tangentes menées du point P. La condition de réalité des racines est $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1<0$, c'est-à-dire que le point P doit être placé entre les deux branches de la courbe. Si le point P est placé dans les angles des asymptotes qui comprennent la courbe, le coefficient $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}$ étant positif, le produit

des racines est positif; par suite, les deux racines sont de même signe, et les deux points de contact sur une même branche de la courbe. Au contraire, si le point P est dans l'un des angles ROS, R'OS', il y a un point de contact sur chacune des branches.

**185.** *Tangente parallèle à une droite donnée.*—Nous remarquons que l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes ne diffère de celle de l'ellipse qu'en ce que $b^2$ est remplacé par $-b^2$; si dans l'équation (7) du n° 157 de la tangente à l'ellipse on effectue ce changement, on obtient l'équation de la tangente à l'hyperbole

$$(7) \qquad y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que la valeur de $m^2$ soit plus grande que $\frac{b^2}{a^2}$, c'est-à-dire que, si la droite donnée passe à l'origine, elle soit comprise dans l'angle ROS. Nous avons vu déjà (n° 183) que la valeur numérique du coefficient angulaire d'une tangente est plus grande que $\frac{b}{a}$.

**186.** On ne peut mener à une hyperbole deux tangentes rectangulaires que lorsque l'angle ROS' est moindre qu'un angle droit, c'est-à-dire lorsque $a$ est plus grand que $b$; quand cette condition est satisfaite, le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à l'hyperbole a pour équation

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2;$$

c'est un cercle concentrique à la courbe.

DIAMÈTRES.

**187.** Lorsque l'hyperbole est rapportée à ses axes, le diamètre qui divise en deux parties égales les cordes dont le coefficient angulaire est $m$ a pour équation

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2my}{b^2} = 0,$$

ou

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x.$$

Si l'on désigne par $m'$ le coefficient angulaire du diamètre, on

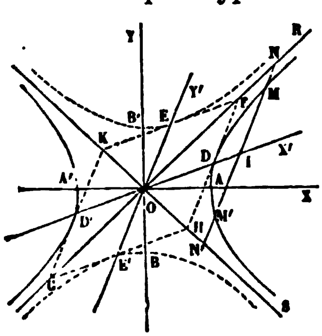



Fig. 109.

a, entre la direction des cordes et celle du diamètre, la relation

$$(8) \qquad mm' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Cette relation montre que si l'on prend $m'$ pour coefficient angulaire des cordes, on trouvera $m$ pour coefficient angulaire du diamètre; c'est-à-dire que si la droite DD' divise en deux parties égales les cordes parallèles à EE' (fig. 109), réciproquement la droite EE' divise en parties égales les cordes parallèles à DD'. Ainsi les deux diamètres DD', EE' sont tels que chacun divise en parties égales les cordes parallèles à l'autre ; ce sont deux diamètres conjugués.

L'hyperbole a une infinité de systèmes de diamètres conjugués, puisque l'on peut prendre à volonté l'un des diamètres. La relation (7) exige que $m$ et $m'$ aient le même signe; si on les suppose positifs, $m$ variant de o à $\frac{b}{a}$, $m'$ variera de $\infty$ à $\frac{b}{a}$; le diamètre DD' tourne de OA vers l'asymptote OR, et le diamètre EE' de OB vers la même asymptote. On voit ainsi que, des deux diamètres, l'un rencontre toujours la courbe, et que l'autre ne la rencontre pas. Les axes forment le seul système de diamètres conjugués rectangulaires, et l'angle aigu de deux diamètres conjugués varie de $\frac{\pi}{2}$ à o.

On démontre comme pour l'ellipse que la tangente FH en un point D de l'hyperbole est parallèle au diamètre EE' conjugué du diamètre DD' qui passe au point de contact (n° 160).

**188.** Deux hyperboles conjuguées et le système de leurs asymptotes admettent le même diamètre pour la même série de cordes; car les équations des trois lieux

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad , \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

ne diffèrent que par le terme constant qui n'entre pas dans l'équation du diamètre $f'_x + mf'_y = 0$. Les trois lieux admettent aussi les mêmes systèmes de diamètres conjugués.

Si l'hyperbole est équilatère, la relation $mm' = \frac{b^2}{a^2}$ devient

$mm' = 1$, ce qui signifie que les angles DOX, EOX sont complémentaires, et, par suite, que les asymptotes sont bissectrices des angles des diamètres conjugués.

**189.** *Hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués.* — Lorsqu'on prend pour axes des coordonnées deux diamètres conjugués OD, OE (fig. 109), l'équation de l'hyperbole devient (n° 136)

$$A''x'^2 + C''y'^2 + H = 0.$$

Les coefficients A'' et C'' ont des signes contraires, par exemple C'' a le signe de H, et A'' un signe contraire; si l'on pose

$$a'^2 = -\frac{H}{A''}, \quad b'^2 = \frac{H}{C''}.$$

l'équation prend la forme simple

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1 \tag{9}$$

qui est la même que celle de la courbe rapportée à ses axes.

Comme on a, par la transformation des coordonnées,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2}$$

pour tous les points du plan, il s'ensuit que l'équation de l'hyperbole conjuguée, rapportée aux mêmes diamètres OD, OE, est

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = -1.$$

Le diamètre OE, qui ne rencontrait pas la première hyperbole, rencontre la seconde au point E, et la longueur $b'$ de ce demi-diamètre imaginaire de la première hyperbole est égale à la longueur OE du demi-diamètre réel de la seconde.

**190.** L'équation (3) des asymptotes se transforme en l'équation

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 0 \quad \text{ou} \quad y' = \pm \frac{b'}{a'} x.$$

On en conclut que *les diagonales du parallélogramme* FHGK

*construit sur deux diamètres conjugués quelconques, coïncident avec les asymptotes de l'hyperbole.*

Les côtés FH, GK du parallélogramme sont tangents à la première hyperbole, et les côtés FK, GH à l'hyperbole conjuguée, de sorte que le parallélogramme est circonscrit au système des deux courbes.

### THÉORÈMES D'APOLLONIUS.

**191.** Il suffit de répéter le raisonnement du n° 163.

Par les formules de transformation des coordonnées, les deux binômes

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}, \quad x^2+y^2$$

se changent en

$$\frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}, \quad x'^2+y'^2+2x'y'\cos\theta.$$

Le polynôme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{\lambda}(x^2+y^2)$$

ou

$$(10)\qquad \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\lambda}\right)x^2-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{\lambda}\right)y^2$$

se transforme en

$$\frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{1}{\lambda}(x'^2+y'^2+2x'y'\cos\theta)$$

ou

$$(11)\qquad \left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{\lambda}\right)x'^2-2\frac{\cos\theta}{\lambda}x'y'-\left(\frac{1}{b'^2}+\frac{1}{\lambda}\right)y'^2.$$

Les deux polynômes (10) et (11) étant des carrés parfaits pour les mêmes valeurs de $\lambda$, les deux équations

$$(12)\qquad (\lambda-a^2)(\lambda+b^2)=0,$$

et

$$(13)\qquad \lambda^2-(a'^2-b'^2)\lambda-a'^2b'^2\sin^2\theta=0,$$

admettent les mêmes racines; il en résulte que les deux ra-

cines de l'équation (13) sont égales respectivement à $a^2$ et à $-b^2$ ; on en déduit les relations

(14) $$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2,$$

(15) $$a'^2 b'^2 \sin^2\theta = a^2 b^2 \quad \text{ou} \quad a'b' \sin\theta = ab,$$

et l'on obtient les deux théorèmes suivants :

1° *La différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante et égale à la différence des carrés des axes ;*

2° *L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante et égale à l'aire du rectangle construit sur les axes.*

De la relation $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, il résulte que si $a$ est différent de $b$, on ne peut avoir $a' = b'$ ; l'hyperbole n'a pas de diamètres conjugués égaux. Si, au contraire, l'hyperbole est équilatère, on a toujours $a' = b'$ ; tous les systèmes de diamètres conjugués sont égaux ; ce qui s'accorde avec la remarque du n° 188, puisqu'alors les deux diamètres font avec l'asymptote des angles égaux.

**192.** L'hyperbole et ses deux asymptotes ayant le même diamètre pour une même série de cordes, le milieu I de la corde MM' est aussi le milieu de la corde NN' (fig. 109). Donc *les portions* MN, M'N' *d'une sécante comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales.*

Si la sécante devient tangente, on a DF = DH ; *les portions d'une tangente comprises entre le point de contact et les asymptotes sont égales.*

**193.** Supposons l'hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués DD', EE', dont l'un EE' est parallèle à une sécante donnée MM' ; la courbe aura pour équation

$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x'^2 - a'^2),$$

et les asymptotes $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2} x'^2$. Dans la figure 109, la sécante MM' coupant la même branche en deux points, le diamètre

parallèle EE′ ne rencontre pas la courbe ; et l'on a

$$\overline{MI}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(\overline{OI}^2 - a'^2) \quad , \quad \overline{NI}^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\overline{OI}^2,$$

et, par suite,

$$\overline{NI}^2 - \overline{MI}^2 = b'^2, \quad \text{ou} \quad (NI - MI)(NI + MI) = b'^2;$$

mais $NI - MI = MN \quad , \quad NI + MI = MN;$

donc $MN \times MN' = b'^2.$

Lorsque la sécante coupe les deux branches de l'hyperbole, le diamètre parallèle rencontre la courbe, et l'on arrive à un résultat analogue. Ainsi, *le produit des segments d'une sécante, compris entre un point de la courbe et les asymptotes, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la sécante.*

**194.** Connaissant les asymptotes RR′, SS′ et un point M de l'hyperbole, on peut obtenir autant de points de la courbe qu'on le veut (fig. 110). Menons, en effet, par le point M une droite quelconque NMN′; cette droite coupe les asymptotes en N et N′; si l'on prend sur cette droite une longueur N′M′ égale à NM, on aura un second point M′ de l'hyperbole. On peut aussi déterminer les directions et les grandeurs des axes. La courbe étant comprise dans les angles ROS, R′OS′, la bissectrice OA de ces deux angles sera l'axe transverse, et la perpendiculaire OB l'axe imaginaire. Menons QMQ′ perpendiculaire à OA, l'axe imaginaire $b$ sera moyen proportionnel entre MQ et MQ′. En portant sur OB une longueur OB égale à $b$, et en menant BC parallèle à OA, BC sera l'axe réel $a$. Pour construire la tangente en un point M′ de la courbe, on mènera par ce point M′P parallèle à une asymptote, on prendra OG = 2OP; la droite M′G sera la tangente demandée.

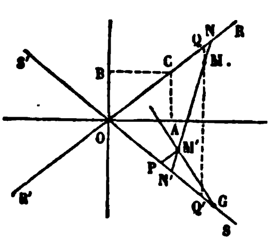


Fig. 110.

**195.** Lorsqu'on connaît les positions et les grandeurs de deux diamètres conjugués, on obtient aisément les axes.

Soient, en effet, DD′, EE′ (fig. 111) les deux diamètres, dont le premier est réel; les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres sont les asymptotes; connaissant les asymptotes et un point D, on est ramené à la construction précédente.

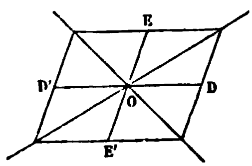


Fig. 111.

**196.** *Cordes supplémentaires.* — On appelle cordes supplémentaires deux cordes MC, MC′ qui, partant d'un même point de la courbe, aboutissent aux extrémités d'un même diamètre CC′ (fig. 112). On démontrera, comme nous l'avons fait au n° 168 pour l'ellipse, que *deux cordes supplémentaires sont parallèles à un système de diamètres conjugués;* et que, réciproquement, *si par les extrémités d'un diamètre on mène des droites parallèles à deux diamètres conjugués, ces droites se coupent sur l'hyperbole et forment un système de cordes supplémentaires.*

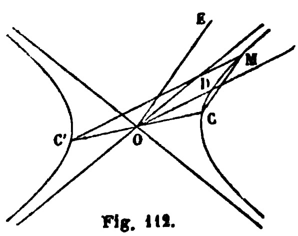


Fig. 112.

HYPERBOLE RAPPORTÉE A SES ASYMPTOTES.

**197.** Si, après avoir transporté l'origine au centre, ce qui fait disparaître les termes du premier degré, on prend pour nouveaux axes des coordonnées les deux asymptotes OX, OY (fig. 113), une parallèle à une asymptote ne rencontrant la courbe qu'en un point, l'équation doit se réduire au premier degré par rapport à $y$ et aussi par rapport à $x$, c'est-à-dire que les coefficients des termes en $y^2$ et en $x^2$ sont nuls; l'équation est donc de la forme

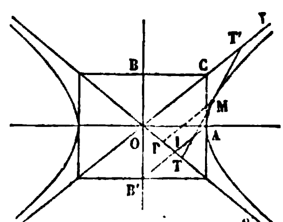


Fig. 113.

$$(16) \qquad 2B'xy + H = 0, \quad \text{ou} \quad xy = k.$$

On détermine la constante $k$, en remarquant que les coordonnées du sommet A, savoir

$$x = y = OI = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

vérifient l'équation de la courbe ; d'où

$$k = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

**198.** Quand l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes, la tangente TT' au point M, dont les coordonnées sont $x$ et $y$, a pour équation

$$(17) \qquad yX + xY = 2k^2.$$

On obtient l'abscisse du point de rencontre de la tangente avec l'axe OX en faisant dans cette équation $Y = 0$, d'où

$$X = OT = \frac{2k^2}{y} = 2x = 2OP;$$

on reconnaît de nouveau que le point de contact M divise en deux parties égales la portion TT' de la tangente comprise entre les asymptotes (n° 192).

### AIRE D'UN SEGMENT HYPERBOLIQUE.

**199.** Nous commencerons par établir le théorème qui sert ordinairement à l'évaluation des aires. Considérons l'aire comprise entre l'axe OX, une courbe, une ordonnée fixe AB, et une ordonnée mobile MP (fig. 114), correspondant à l'abscisse $x$; cette aire, que nous désignerons par S, est une fonction de la variable $x$, dont nous nous proposons de déterminer la dérivée. Donnons à $x$ un accroissement $\Delta x = PP'$ assez petit

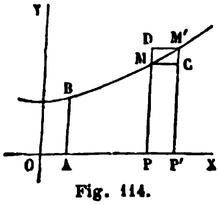


Fig. 114.

pour que de M en M′ l'ordonnée varie dans le même sens; par les points M et M′ menons des parallèles MC, M′D à l'axe OX; l'accroissement $\Delta S$ de l'aire est plus grand que le parallélogramme MPP′C, et plus petit que le parallélogramme DPP′M′; le premier parallélogramme a pour mesure $y\Delta x \sin\theta$, $\theta$ étant l'angle des axes, le second $(y+\Delta y)\,\Delta x \sin\theta$; on a donc

$$y\,\Delta x\,.\sin\theta < \Delta S < (y+\Delta y)\,\Delta x\,.\sin\theta,$$

et, en divisant par $\Delta x$,

$$y\sin\theta < \frac{\Delta S}{\Delta x} < (y+\Delta y)\sin\theta.$$

Supposons maintenant que l'on fasse tendre $\Delta x$ vers zéro; le rapport $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ est compris entre deux quantités, l'une $y\sin\theta$, l'autre ayant pour limite cette quantité; donc le rapport a aussi pour limite $y \sin\theta$. Ainsi la dérivée de l'aire considérée comme une fonction de l'abscisse est $y \sin\theta$. Réciproquement, l'aire S est une fonction primitive de $y \sin\theta$, considéré comme une fonction de $x$.

Quand les axes des coordonnées sont rectangulaires, la dérivée de l'aire est égale à $y$.

**200.** Considérons une hyperbole rapportée à ses asymptotes, et proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre l'asymptote OX, l'hyperbole, l'ordonnée fixe AB correspondant à l'abscisse $a$ et l'ordonnée variable MP correspondant à l'abscisse $x$ (fig. 115). De l'équation (16) on déduit $y=\frac{k}{x}$, et, par suite,

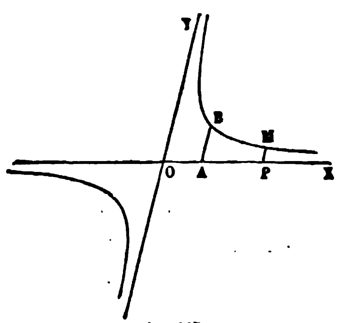


Fig. 115.

$$S'=y\sin\theta=k\,\sin\theta\times\frac{1}{x}.$$

Or $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $Lx$; donc $k\sin\theta\times\frac{1}{x}$ est la dérivée de $k\,\sin\theta\, Lx$; on a, par conséquent,

$$S=k^2\sin\theta\, Lx+C.$$

On détermine la constante C par la condition que l'aire soit nulle pour $x=a$, ce qui donne $C=-k\sin\theta\,La$. On a ainsi

$$(18)\qquad S=k\sin\theta(Lx-La)=k\sin\theta\times L\left(\frac{x}{a}\right).$$

L'abscisse $a$ restant constante, si l'on fait augmenter $x$ indéfiniment, l'aire S augmente aussi au delà de toute limite. La même chose a lieu quand on fait tendre $a$ vers zéro, $x$ restant fixe.

Dans le cas particulier où l'hyperbole est équilatère, on a $\sin\theta=1$; si l'on suppose en outre $k=1$, et que l'on compte l'aire depuis l'ordonnée qui répond à l'abscisse 1, c'est-à-dire au sommet de la courbe, la formule précédente se réduit à

$$S=L(x).$$

C'est à cause de cette propriété que les logarithmes népériens ont été appelés aussi logarithmes hyperboliques.

Si l'on suppose $k=1$ et $a=1$, la formule (10) devient

$$S=\sin\theta\,L(x).$$

On pourra prendre l'angle $\theta$ de manière que S soit le logarithme de $x$ dans un système quelconque dont la base est plus grande que $e$.

## EXERCICES.

1° La base d'un triangle est fixe, la différence des angles à la base est égale à $\frac{\pi}{2}$; on demande le lieu du troisième sommet du triangle.

2° Quel est le lieu des centres des circonférences qui interceptent des longueurs données sur les côtés d'un angle donné?

3° On donne deux droites fixes, une droite mobile coupe les deux premières de manière à former un triangle de grandeur constante; on demande le lieu des centres de gravité de ces triangles.

4° Les sécantes menées de l'un quelconque des points d'une hyper bole à deux points fixes pris sur la courbe interceptent sur l'une ou l'autre asymptote des longueurs constantes.

5° Toute corde d'une hyperbole divise en deux parties égales la portion de l'une ou l'autre asymptote comprise entre les tangentes à ses deux extrémités.

6° Si, sur une corde d'une hyperbole considérée comme diagonale, on construit un parallélogramme dont les côtés soient parallèles respectivement aux asymptotes, l'autre diagonale passera par le centre.

7° On donne un point fixe et une droite fixe; un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé au point fixe; trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle formé par les côtés de l'angle et la droite fixe.

8° Un triangle ABC est inscrit dans une hyperbole; deux de ses côtés ont des directions invariables; trouver le lieu du milieu du troisième côté.

9° Sur l'une des diagonales d'un rectangle prise pour corde on décrit un cercle; trouver le lieu des extrémités des diamètres parallèles à la seconde diagonale.

10° Étant donnés un angle et un point fixe, par ce point on mène une sécante quelconque, et par les points où cette sécante rencontre les deux côtés de l'angle, on mène des droites respectivement parallèles à ces côtés; trouver le lieu du point d'intersection de ces parallèles.

11° Trouver le lieu d'un point tel qu'en menant par ce point des parallèles aux asymptotes d'une hyperbole, l'aire du triangle formé par ces parallèles et l'hyperbole soit égale à une constante donnée.

12° Trouver le lieu d'un point tel que l'une des bissectrices des angles formés par les droites qui joignent ce point à deux points fixes A et B ait une direction donnée.

13° Toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de rencontre des hauteurs.

14° Étant donnée une ellipse, on mène deux diamètres conjugués quelconques; trouver le lieu du point d'intersection de l'un d'eux avec une droite menée par un point fixe perpendiculairement à l'autre, ou, plus généralement, avec une droite faisant un angle donné avec le second diamètre.

15° On donne deux droites A'A, B'B et un point O; du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit un cercle; aux points de rencontre du cercle avec les droites on élève des perpendiculaires à ces droites; trouver le lieu des points d'intersection de ces perpendiculaires.

# CHAPITRE VI

## De la Parabole.

**201.** Le second des types auxquels on réduit l'équation générale du second degré est $C'y^2 + 2D'x = 0$, ou

$$y^2 = 2px. \quad (1)$$

Le cas où $p$ est négatif se ramène au cas où $p$ est positif par le changement du sens des $x$ positifs ; nous supposerons donc $p$ positif. On voit immédiatement que la courbe représentée par l'équation (1) est symétrique par rapport à l'axe des $x$ et qu'elle passe à l'origine. L'équation (1), résolue par rapport à $y$, donne

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Pour que l'ordonnée soit réelle, il est nécessaire que l'abscisse soit positive ; si l'on fait croître $x$ de 0 à $+\infty$, la valeur absolue de $y$ croît aussi de 0 à $\infty$ ; on a ainsi deux arcs infinis AD et AD', qui forment la parabole (fig. 116).

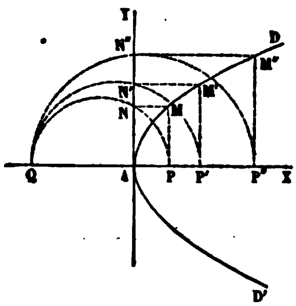


Fig. 116.

La droite AX est l'axe de la parabole ; le point A en est le sommet ; la longueur $p$, qui détermine la courbe, s'appelle le *paramètre* de la parabole.

**202.** *Construction de la courbe par points.* — L'ordonnée MP du point M est moyenne proportionnelle entre la longueur constante $2p$ et l'abscisse AP. Portons sur AX et dans le sens des $x$ négatifs une longueur AQ égale à $2p$ ; puis décrivons diverses circonférences ayant leurs centres sur QX et passant au point Q ; ces circonférences coupent de nouveau l'axe AX aux points P, P',..., et la droite AY aux points N, N',... Par les points P, P',..., menons des parallèles à AY ; par les points N, N',..., des parallèles à AX ; les points de rencontre M, M',... appartiennent à la parabole.

**203.** Des relations

$$\overline{MP}^2 = 2p \times AP \quad , \quad \overline{M'P'}^2 = 2p \times AP',$$

on déduit

$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{M'P'}^2} = \frac{AP}{AP'}.$$

*Les carrés des ordonnées perpendiculaires à l'axe de la parabole sont proportionnels aux segments de l'axe compris entre le sommet et les ordonnées.*

**204.** Par le point M de la courbe, menons une parallèle à l'axe, et imaginons qu'un point mobile parcoure cette parallèle. Dans la fonction $y^2 - 2px$ remplaçons $x$ et $y$ par les coordonnées du point mobile ; si le point M est dans la région placée du côté des $x$ positives par rapport à la parabole, la fonction sera négative, si le point M est dans l'autre région la fonction sera positive. Pour abréger, nous dirons que la première région est intérieure à la courbe et la seconde extérieure.

**205.** Nous avons vu que les branches infinies de l'hyperbole ont des asymptotes ; il n'en est pas de même de la parabole. Et, d'abord, puisque $y$ augmente indéfiniment avec $x$, il n'y a pas d'asymptote parallèle à l'axe de la parabole. En second lieu, soit $y_1 = ax + b$ l'équation d'une droite quelconque oblique à l'axe, la différence des ordonnées des points de la droite et de la courbe qui correspondent à une même abscisse est égale à

$$ax + b - \sqrt{2px},$$

et peut se mettre sous la forme

$$x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right).$$

Quand $x$ augmente indéfiniment, le premier facteur augmentant indéfiniment, et le second tendant vers la valeur $a$ différente de zéro, le produit augmente indéfiniment. Donc il n'y a pas non plus d'asymptote oblique à l'axe.

### TANGENTE.

**206.** La tangente au point M, dont les coordonnées sont $x$

et $y$, a pour équation

(2) $$yY = p(X + x).$$

Soit T le point où la tangente rencontre l'axe de la parabole (fig. 117); si dans l'équation (2) on fait $Y = 0$, on trouve $X = -x$; donc $AT = AP$. Ceci donne un moyen facile de construire la tangente à la parabole en un point donné M; on abaissera la perpendiculaire MP sur l'axe, on prendra $AT = AP$ et l'on joindra les points M et T.

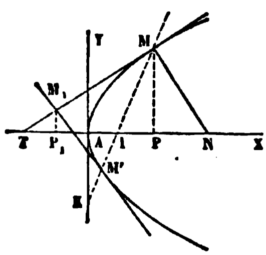



Fig. 117.

**207.** *Mener une tangente par un point extérieur* $M_1$. — Soient $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point $M_1$; les points de contact seront déterminés par l'équation de la corde des contacts

(3) $$y_1 y = p(x + x_1),$$

jointe à celle de la courbe (1); on en déduit

$$y = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1} \quad , \quad x = \frac{y^2}{2p};$$

ces valeurs sont réelles toutes les fois que le point $M_1$ est extérieur à la courbe.

Pour construire la droite MM', on cherche les points où elle coupe les axes des coordonnées; si, dans l'équation (3), on fait $y = 0$, on trouve $x = -x_1$, c'est-à-dire que AI est égal à $AP_1$; si l'on fait $x = 0$, on trouve $y = \frac{px_1}{y_1}$; on obtiendra le point K par une quatrième proportionnelle.

**208.** *Tangente parallèle à une droite donnée.* — Si l'on désigne par $m$ le coefficient angulaire de la droite donnée, l'équation $\frac{p}{y} = m$, et celle de la courbe, déterminent les coordonnées du point de contact, $y = \frac{p}{m}$ , $x = \frac{p}{2m^2}$. On en déduit l'équation de la tangente

(4) $$Y = mX + \frac{p}{2m}.$$

**209.** *Normale.* — La normale MN en un point M de la parabole, dont les coordonnées sont $x$ et $y$, a pour équation

$$(5)\qquad Y-y=-\frac{y}{p}(X-x).$$

En y faisant $Y=0$, on obtient l'abscisse du point N où elle rencontre l'axe ; on trouve

$$PN=X-x=p.$$

Ainsi, *dans la parabole la sous-normale* PN *est constante et égale au paramètre* p.

### DIAMÈTRES.

**210.** En appliquant l'équation générale des diamètres des courbes du second degré à la parabole, dont l'équation est $y^2-2px=0$, on obtient l'équation

$$(6)\qquad my-p=0,\quad \text{ou}\quad y=\frac{p}{m}.$$

On retrouve cette propriété déjà démontrée au n° 134, savoir que *tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.*

Comme on peut prendre le coefficient angulaire $m$ des cordes, de manière que $\frac{p}{m}$ ait telle valeur que l'on voudra, il en résulte que, réciproquement, *toute parallèle à l'axe est un diamètre.*

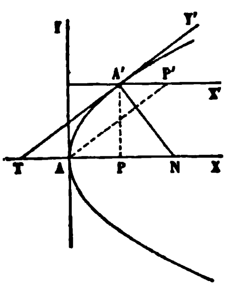


Fig. 118.

Soit A' le point de rencontre du diamètre et de la courbe (fig. 118); l'ordonnée du point A' étant égale à $\frac{p}{m}$ et le coefficient angulaire de la tangente en ce point ayant pour valeur $\frac{p}{y}$, c'est-à-dire $m$, on en conclut que *la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en deux parties égales.*

**211.** *Parabole rapportée à l'un de ses diamètres et à la tangente à son extrémité.* — Nous avons vu (n° 136) que, lorsqu'on prend pour axes des coordonnées un diamètre A'X' et la tan-

gente $A'Y'$ à son extrémité, l'équation de la parabole prend la forme

$$(7) \qquad y^2 = 2p'x.$$

Si l'on appelle $a$ et $b$ les coordonnées du point $A'$ par rapport aux axes primitifs, et que l'on mène $AP'$ parallèle à $A'T$, on sait que l'on a $A'P' = AT = AP$ (n° 206); les coordonnées $A'P'$ et $-A'T$ du sommet A par rapport aux nouveaux axes sont donc $a$ et $-\sqrt{4a^2+b^2}$; comme elles doivent vérifier l'équation (7), on en déduit

$$2p' = \frac{4a^2+b^2}{a} = \frac{4a^2+2pa}{a} = 2p+4a.$$

On a aussi

$$p' = \frac{\overline{AP'}^2}{2A'P'} = \frac{\overline{A'T}^2}{TP} = TN.$$

Si l'on désigne par $\theta$ l'angle $Y'A'X'$ des nouveaux axes, dans les triangles rectangles $NA'T$, $NA'P$, on a

$$TN = \frac{A'N}{\sin\theta}, \quad A'N = \frac{PN}{\sin\theta},$$

d'où

$$p' = TN = \frac{PN}{\sin^2\theta} = \frac{p}{\sin^2\theta}.$$

**212.** La parabole, rapportée à un diamètre $A'X$ et à la tangente $A'Y$ (fig. 119), ayant pour équation $y^2 = 2p'x$, il est évident que l'équation $yY = p'(X+x)$ représentera, soit la tangente au point M, si $x$ et $y$ désignent les coordonnées de ce point, soit la corde des contacts des tangentes issues d'un point extérieur, si $x$ et $y$ désignent les coordonnées de ce point extérieur.

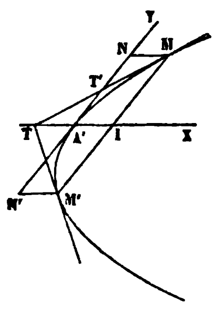


Fig. 119.

Les tangentes aux deux extrémités M et M' d'une corde coupent le diamètre en un même point T, tel que $A'T = A'I$. Il en résulte que la droite des contacts MM', relative à un point extérieur T, est divisée en deux parties égales par le diamètre TX qui passe en ce point, et que, de plus, on a $A'I = A'T$.

Ceci donne le moyen de construire une parabole par points, lorsqu'on connaît deux tangentes TM, TM', et les points de contact M et M'. On mène la corde MM', on joint le milieu I au point T, le milieu A' de la droite TI est un point de la courbe, et la tangente en ce point est parallèle à MM'. A l'aide de la tangente A'T', qui touche la courbe en A', et de chacune des tangentes données, on déterminera deux nouvelles tangentes avec leurs points de contact; et ainsi de suite. Cette méthode est fréquemment employée pour raccorder deux droites par un arc de parabole, lorsqu'on ne peut se servir d'un arc de cercle, c'est-à-dire lorsque les distances TM et TM' ne sont pas égales.

### AIRE D'UN SEGMENT PARABOLIQUE.

**213.** Proposons-nous d'évaluer l'aire S du triangle A'IM formé par les droites A'I, IM et l'arc A'M de la parabole (fig. 119). Si l'on considère cette aire comme une fonction de l'abscisse du point M, la dérivée S' est donnée par la formule

$$S' = y \sin\theta = \sqrt{2p'x}\,.\sin\theta = \sqrt{2p'}\,.\sin\theta\,.\,x^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit

$$S = \frac{2}{3}\sqrt{2p'}\,.\sin\theta\,.\,x^{\frac{3}{2}} + C.$$

La constante C est nulle puisque l'aire se réduit à zéro pour $x=0$. On a ainsi

$$S = \frac{2}{3}x\sqrt{2p'x}\sin\theta = \frac{2}{3}xy\sin\theta.$$

L'aire S est égale aux deux tiers du parallélogramme A'IMN, et, par suite, l'aire du triangle mixtiligne A'NM est le tiers du même parallélogramme.

### EXERCICES.

1° Lieu du sommet d'un angle circonscrit à la parabole, et tel que le triangle formé par les côtés de l'angle et l'arc de parabole ait une aire constante.

2° Lieu des points desquels on peut mener à une parabole deux normales rectangulaires.

3° Une sécante tourne autour d'un point fixe pris sur l'axe d'une parabole; par les points où elle coupe la parabole, on mène des normales; trouver le lieu du point de concours de ces normales.

4° Une parabole se meut parallèlement à elle-même, de manière que son sommet décrive la parabole dans sa position initiale; du sommet de la parabole fixe, on mène des tangentes à la parabole mobile; trouver le lieu des points de contact.

5° Lieu du point tel que la somme des carrés des normales menées de ce point à une parabole donnée soit constante.

6° Étant donnée une courbe du second degré inscrite dans un angle, on mène une tangente quelconque à cette courbe; trouver le lieu du point de concours des médianes ou des hauteurs du triangle formé par la tangente mobile et les côtés de l'angle; trouver aussi le lieu du centre du cercle circonscrit au même triangle.

7° Étant donnée une ellipse, par un point fixe on mène deux droites rectangulaires quelconques, et au point où ces droites rencontrent l'ellipse, on mène des tangentes à cette ellipse; trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

8° Même problème, quand on remplace les droites rectangulaires par des droites parallèles à deux diamètres conjugués d'une autre ellipse donnée.

9° Un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet placé sur une courbe du second degré donnée; au point où les côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe. Trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

10° Trouver le lieu du centre d'un triangle équilatéral formé par trois tangentes ou par trois normales à une parabole.

11° L'aire d'un triangle qui a pour sommets les points de contact de trois tangentes à une parabole est le double de l'aire du triangle formé par ces tangentes et a pour expression $\pm \frac{1}{4p}(y'-y'')(y''-y''')(y'''-y')$, en désignant par $y'$, $y''$, $y'''$ les perpendiculaires abaissées des sommets du triangle sur l'axe.

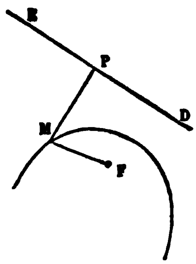
12° On mène une tangente quelconque à une hyperbole, on joint les points où elle coupe les asymptotes respectivement à deux points fixes; trouver le lieu du point de concours des deux droites.

13° Mener à une parabole une normale telle que l'aire comprise entre cette normale et la courbe ait une valeur minimum.

# CHAPITRE VII

## Foyers et directrices.

215. Proposons-nous d'abord la question suivante : Étant donnés un point F et une droite DE (fig. 120), trouver le lieu du point dont les distances au point et à la droite donnés sont entre elles dans un rapport constant.


Fig. 120.

Traçons dans le plan des axes rectangulaires quelconques ; appelons $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point F, et soit $mx+ny+h=0$ l'équation de la droite DE; les distances d'un point quelconque M du plan au point F et à la droite DE sont données par les formules

$$MF=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} \quad , \quad MP=\frac{\pm(mx+ny+h)}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

si l'on désigne par $k$ le rapport constant $\frac{MF}{MP}$, le lieu aura pour équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm\frac{k(mx+ny+h)}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

ou

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{k^2(mx+ny+h)^2}{m^2+n^2}.$$

Ce lieu est une courbe du second degré. La quantité $AC-B^2$ qui sert à distinguer l'espèce de la courbe, étant égale à $1-k^2$, la courbe est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, suivant que le rapport $k$ est inférieur, égal, ou supérieur à l'unité.

Réciproquement, étant donnée une courbe du second degré nous nous proposerons de chercher s'il existe dans le plan de la courbe un point fixe F et une droite fixe DE, tels que le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point F et à la droite DE soit constant. Si l'on trouve un point

et une droite jouissant de cette propriété, le point s'appellera *foyer* de la courbe, et la droite *directrice*.

Les axes des coordonnées étant quelconques et faisant entre eux un angle $\theta$, supposons qu'on ait trouvé un point F ayant pour coordonnées $\alpha$ et $\beta$ et une droite DE ayant pour équation $mx + ny + h = 0$, tels que le rapport $\frac{MF}{MP}$ soit égal à une quantité constante $k$; la distance MP d'un point M de la courbe dont les coordonnées sont $x$ et $y$ à la directrice DE ayant pour expression $\frac{\pm(mx+ny+h)\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}$, on aura

$$MF = \pm\frac{k(mx+ny+h)\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}.$$

Ainsi la distance d'un point quelconque M de la courbe au foyer F s'exprime par une fonction entière et du premier degré des coordonnées $x$ et $y$ du point M.

Inversement, si un point F jouit de cette propriété que sa distance à un point quelconque M de la courbe s'exprime par une fonction entière et du premier degré des coordonnées $x$ et $y$ du point M, ce point F est foyer, c'est-à-dire qu'il existe une droite DE telle que le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point F et à la droite DE soit constant. En effet, supposons que l'on ait

$$FM = \pm(mx+ny+h),$$

en désignant par $mx + ny + h$ une fonction entière et du premier degré des coordonnées $x$ et $y$ du point M. Considérons la droite DE qui a pour équation

$$mx+ny+h=0;$$

la distance du point M à cette droite est donnée par la formule

$$MP = \frac{\pm(mx + ny + h)\sin\theta}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta}};$$

on a donc $$\frac{MF}{MP} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta}}{\sin\theta}.$$

Ainsi, le rapport des distances de chacun des points de la courbe au point fixe F et à la droite fixe DE est constant; le point F est donc un foyer de la courbe, et la droite DE la directrice correspondante. En désignant par $k$ la valeur du rapport constant, on a $k\sin\theta = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta}$.

**216**. On peut donc substituer à la première définition du foyer la définition suivante. Le foyer est un point tel que sa distance à un point quelconque de la courbe puisse s'exprimer par une fonction entière et du premier degré des coordonnées variables du point de la courbe. Il est évident, d'ailleurs, que cette définition algébrique est indépendante de la position des axes des coordonnées dans le plan. Car, une fonction entière et du premier degré conserve ce caractère quand on change les axes. On obtient l'équation de la directrice en égalant cette fonction à zéro.

Si l'on prend l'axe des $y$ parallèle à la directrice, l'axe des $x$ étant quelconque, l'équation de la directrice devant se réduire à la forme $mx + h = 0$, le coefficient $n$ sera nul et la distance du foyer à un point quelconque M de la courbe s'exprimera par une fonction entière et du premier degré $\pm(mx + h)$ de l'abscisse $x$ du point M.

On voit par là que la recherche du foyer et de la directrice dans les courbes du second degré revient à la détermination d'un point F, tel que sa distance à un point quelconque M de la courbe s'exprime par une fonction entière et du premier degré des coordonnées $x$ et $y$ du point M. Supposons les axes rectangulaires, et soit

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une courbe du second degré donnée. Appelons $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du foyer cherché, les coordonnées de chacun des points de la courbe devront vérifier l'équation

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \pm(mx+ny+h),$$

$$(2) \qquad \text{ou} \quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+h)^2 = 0.$$

Les équations (1) et (2), représentant toutes les deux la même courbe, sont identiques, c'est-à-dire que les coefficients des termes correspondants doivent être proportionnels; on aura donc, pour déterminer les cinq inconnues $\alpha, \beta, m, n, h$, les cinq équations

$$(3) \quad \frac{1-m^2}{A} = \frac{-mn}{B} = \frac{1-n^2}{C} = \frac{-(\alpha+mh)}{D} = \frac{-(\beta+nh)}{E} = \frac{\alpha^2+\beta^2-h^2}{F}$$

Afin de faciliter le calcul, nous considérons séparément les trois courbes du second degré, rapportées aux systèmes d'axes rectangulaires qui ont servi à simplifier leurs équations. Nous indiquons plus loin (284) une autre méthode pour la recherche des foyers, utile surtout pour trouver des lieux géométriques de foyers.

### FOYERS ET DIRECTRICES DE L'ELLIPSE.

**217.** Soit

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation d'une ellipse donnée rapportée à ses axes. Cette équation ne contenant pas de termes en $xy$, il faut que le coefficient $-2mn$ de ce terme dans l'équation (2) soit nul, ce qui exige que l'on ait, soit $n=0$, soit $m=0$. Supposons d'abord $n=0$; les coefficients des termes du premier degré

devant être aussi nuls, on aura $\alpha + mh = 0$, $\beta = 0$, et les équations (3) se réduiront à

$$a^2(1 - m^2) = b^2 = h^2 - \alpha^2.$$

On en déduit $m^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$; comme on peut toujours supposer $m$ positif, sans quoi on changerait les signes des coefficients $m$, $n$, $h$ dans l'équation (2), on prendra $m = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Si, dans l'équation $a^2(1 - m^2) = h^2 - \alpha^2$, on remplace $h$ par sa valeur tirée de l'équation $\alpha + mh = 0$, on trouve $\alpha^2 = a^2 - b^2$, d'où $\alpha = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, $h = \mp a$.

On obtient ainsi deux foyers F et F′ (fig. 121), situés sur le grand axe et à égale distance de part et d'autre du centre. Pour les déterminer, de l'extrémité B du petit axe comme centre, avec un rayon égal à $a$, on décrira un cercle; les points F et F′ où ce cercle coupe le grand axe, sont les foyers. Si, pour abréger, on pose $a^2 - b^2 = c^2$, on a $\alpha = \pm c$, $m = \frac{c}{a}$, $h = \mp a$; les signes supérieurs se rapportent au foyer F, les signes inférieurs au foyer F′. On sait que l'on a l'équation de la directrice en égalant à zéro le polynôme $mx + ny + h$; cette équation se réduit à $\frac{c}{a}x \mp a = 0$, ou $x = \pm\frac{a^2}{c}$. On obtient ainsi deux directrices; au foyer F correspond la directrice DE qui a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$; au foyer F′ la directrice D′E′ qui a pour équation $x = -\frac{a^2}{c}$. Ces directrices sont perpendiculaires

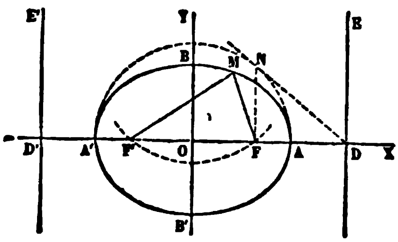


Fig. 121.

au grand axe et à égale distance du centre; la détermination du point D dépend d'une troisième proportionnelle; on la construit de la manière suivante : sur le grand axe comme diamètre décrivons un cercle, par le foyer F élevons une perpendiculaire à cet axe, et, au point N où la perpendiculaire coupe le cercle, menons une tangente au cercle; le point où cette tangente rencontre le grand axe est le point D.

Nous avons vu aussi que le rapport constant des distances de chacun des points de la courbe au foyer et à la directrice correspondante est égal à $\sqrt{m^2+n^2}$, en coordonnées rectangulaires; on a donc $k=m=\frac{c}{a}$. Le rapport $\frac{c}{a}$ est ce qu'on appelle l'*excentricité* $e$ de l'ellipse.

**218.** Supposons maintenant $m=0$; les coefficients des termes du premier degré devant être nuls, on aura $\alpha=0$, $\beta+nh=0$, et les équations (3) se réduisent à

$$a^2=b^2(1-n^2)=h^2-\beta^2.$$

On en déduit

$$n=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\quad,\quad \beta=\pm\sqrt{b^2-a^2}\quad,\quad h=\mp b.$$

Pour obtenir ces nouvelles solutions, il suffit de permuter dans les premières les lettres $a$ et $b$, $m$ et $n$, $\alpha$ et $\beta$. Comme nous avons supposé $a$ plus grand que $b$, ces deux solutions sont imaginaires. Ainsi on peut attribuer aux constantes quatre systèmes de valeurs qui rendent identiques les équations (2) et (4); mais il n'y a que deux de ces systèmes qui donnent des foyers et des directrices réels.

**219.** Théorème I. *La somme des distances de chacun des points de l'ellipse aux deux foyers est constante.*

La distance d'un foyer à un point quelconque M de la courbe a pour expression $\pm(mx+ny+h)$, c'est-à-dire $\pm\left(a-\frac{\alpha x}{a}\right)$; on choisira le signe de manière à avoir une quantité positive. Les abscisses $\alpha$ et $x$ du foyer et d'un point de l'ellipse étant moindres que $a$ en valeur absolue, le second terme est plus petit que $a$ en valeur absolue, et, par conséquent, la quantité placée entre parenthèses est positive pour tous les points de l'ellipse : il faudra donc affecter la parenthèse du signe +, et l'on aura

$$MF=a-ex \quad , \quad MF'=a+ex,$$

d'où l'on déduit

$$MF+MF'=2a.$$

**220.** Corollaire. *La somme des distances d'un point intérieur à l'ellipse aux deux foyers est plus petite que le grand axe; la somme des distances d'un point extérieur est plus grand que le grand axe.*

Considérons d'abord un point N (fig. 122) situé à l'intérieur de l'ellipse. Joignons ce point aux deux foyers et prolongeons la droite F'N jusqu'à sa rencontre avec l'ellipse en M. Le point M appartenant à l'ellipse, la somme des deux rayons vecteurs MF + MF' est égale au grand axe AA';

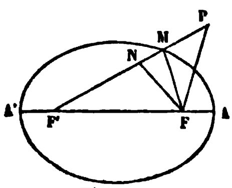


Fig. 122.

mais la ligne droite NF est plus petite que la ligne brisée NM + MF; en ajoutant de part et d'autre la même longueur F'N, on voit que le chemin F'N + NF est plus petit que F'M

$+$ MF, c'est-à-dire plus petit que AA'. Considérons maintenant un point P situé hors de l'ellipse; la droite PF' rencontre l'ellipse en un point M. La ligne brisée MP $+$ PF est plus grande que la ligne droite MF; en ajoutant de part et d'autre la même longueur F'M, on voit que le chemin F'P $+$ PF est plus grand que F'M $+$ MF, c'est-à-dire plus grand que AA'.

Il est clair que les réciproques sont vraies. Si la somme des distances d'un point du plan aux deux foyers est plus petite que le grand axe, ce point est intérieur à l'ellipse. Si la somme est plus grande que le grand axe, le point est extérieur. Il résulte de là que l'on peut considérer l'ellipse comme le lieu des points dont la somme des distances aux deux foyers est égale à $2a$. C'est ainsi qu'on définit l'ellipse en Géométrie élémentaire, et c'est sur cette propriété que repose la construction de l'ellipse par points, ou d'un mouvement continu, dont nous avons parlé au commencement (n° 11).

**221.** COROLLAIRE II. *L'ellipse est le lieu des points également distants d'un foyer* F *et du cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre avec un rayon égal au grand axe.* Si l'on joint les foyers à un point quelconque M de l'ellipse (fig. 123) et si l'on prolonge le rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à MF, on obtient une longueur F'H constante et égale au grand axe; le lieu du point H est donc la circonférence décrite du foyer F' comme centre avec le grand axe pour rayon. La portion MH du rayon étant le plus court chemin du point M à cette circonférence, le point M de l'ellipse est également distant du foyer F et de la circonférence. On a donné à ce cercle le nom de ***cercle directeur***.

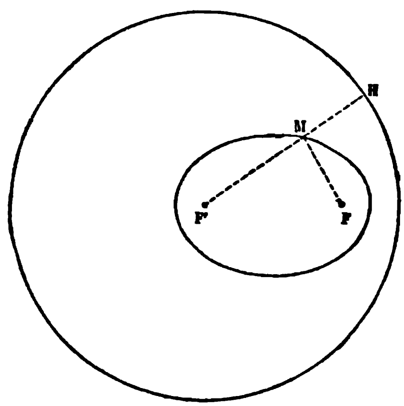


Fig. 123.

**222.** THÉORÈME II. *La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs, qui vont du point de contact aux deux foyers.*

Prenons deux points voisins M et M′ (fig. 124) sur l'ellipse; du foyer F comme centre, avec FM pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera en C le rayon vecteur FM′ : la longueur M′C représente la différence des deux rayons vecteurs FM et FM′, ou l'accroissement qu'éprouve le rayon vecteur FM quand on passe du point M au point voisin M′. De même, si du foyer F′ comme centre, avec F′M pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupera en D le rayon vecteur F′M′ prolongé, la longueur M′D représentera la différence des deux rayons vecteurs F′M et F′M′, ou la diminution qu'éprouve le rayon vecteur F′M quand on passe du point M au point M′.

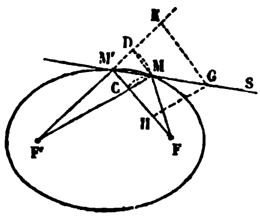


Fig. 124.

Ainsi, quand on passe du point M au point M′, le rayon vecteur FM éprouve un accroissement M′C, tandis que l'autre rayon vecteur F′M éprouve une diminution M′D. Puisque la somme des deux rayons vecteurs FM + F′M reste constante, l'augmentation de l'un est égale à la diminution de l'autre, et, par conséquent, les deux longueurs M′C et M′D sont égales.

Par les deux points M et M′ menons la sécante MS; dans les deux cercles considérés précédemment, traçons les cordes MC et MD. Sur la sécante MS portons une longueur MG, arbitraire, mais invariable, et par le point G menons GH parallèle à MC, GK parallèle à MD; à cause des parallèles, on a les rapports égaux

$$\frac{M'C}{M'H}=\frac{M'M}{M'G}=\frac{M'D}{M'K}:$$

puisque les deux longueurs M′C et M′D sont égales, il en résulte que les deux longueurs M′H et M′K sont aussi égales. Supposons maintenant que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M; la sécante MS tend vers une position

limite MT (fig. 125), qui est la tangente à l'ellipse. En même temps, les points C et D se rapprochant du point M, les cordes MC et MD, prolongées, tendent vers les tangentes aux cercles décrits des points F et F′ comme centres avec FM et F′M pour rayons, et, par conséquent, deviennent perpendiculaires aux rayons FM et F′M ; leurs parallèles GH et GK prennent aussi des directions perpendiculaires à ces mêmes rayons, et, par conséquent, les angles H et K deviennent droits. Les limites des deux triangles M′GH, M′GK (fig. 124) sont deux triangles rectangles MGH, MGK (fig. 125); ces deux triangles, ayant l'hypoténuse MG commune et les côtés MH et MK égaux entre eux, comme limites de longueurs égales, sont égaux; d'où l'on conclut l'égalité des deux angles GMH, GMK. Il en résulte que la tangente MT à l'ellipse divise en deux parties égales l'angle FMK formé par l'un des rayons vecteurs MF et le prolongement de l'autre F′M.

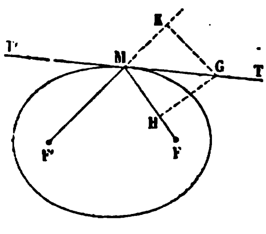


Fig. 125.

L'angle F′MT′ étant égal à son opposé par le sommet GMK, on voit que la tangente TT′ fait, avec les deux rayons vecteurs qui vont au point de contact, des angles égaux FMT, F′MT′.

**223.** Corollaire I. Menons au point M (fig. 126) une perpendiculaire MN à la tangente TT′, nous aurons la normale à l'ellipse. Les deux angles FMN, F′MN sont égaux comme complémentaires des angles égaux FMT, F′MT′; ainsi *la normale à l'ellipse au point* M *est bissectrice de l'angle* FMF′ *des rayons vecteurs qui vont de ce point aux deux foyers.*

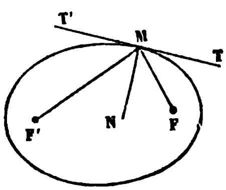


Fig. 126.

**224.** Corollaire II. Supposons qu'une lumière soit placée au foyer F (fig. 127) d'une ellipse ; les rayons lumineux, partant du point F, se réfléchissent sur l'ellipse en faisant un

angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Soit FM l'un de ces rayons; menons la tangente TT' à l'ellipse en ce point; le rayon réfléchi, devant faire avec MT' un angle égal à FMT, sera dirigé suivant MF'. Ainsi les rayons réfléchis viennent tous concourir au second foyer F', où ils forment une image très-brillante de la flamme placée au premier foyer F. C'est de là que vient la dénomination de *foyer*.

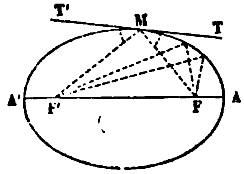


Fig. 127.

**225.** COROLLAIRE III. Réciproquement, l'ellipse est la seule courbe qui jouisse de la propriété que les rayons vecteurs qui vont du point de contact à deux points fixes F et F' fassent des angles égaux avec les deux parties de la tangente. Cherchons, en effet, l'équation de la courbe en coordonnées bi-polaires (n° 4), et désignons par $u$ et $v$ les deux rayons vecteurs MF, MF' (fig. 124). Quand on passe d'un point M de la courbe au point voisin M', les deux rayons vecteurs $u$ et $v$ éprouvent des variations

$$\Delta u = + \mathrm{M'C} \quad , \quad \Delta v = - \mathrm{M'D},$$

et l'on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = - \frac{\mathrm{M'D}}{\mathrm{M'C}} = - \frac{\mathrm{M'K}}{\mathrm{M'H}}.$$

Quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la droite MM' devient tangente et les deux angles H et K, comme nous l'avons dit, deviennent droits. Nous supposons d'ailleurs les deux angles GMH, GMK (fig. 125) égaux entre eux; les deux triangles rectangles GMH, GMK sont donc égaux; on a MH = MK, et le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta u}$ tend vers une limite égale à $-1$. Si l'on considère $v$ comme une fonction de $u$, on voit que la dérivée de cette fonction est égale à $-1$; en remontant à la fonction primitive, on a $v = -u + C$; et, par suite, $u + v = C$. Donc la courbe est une ellipse.

**226.** COROLLAIRE IV. *Le lieu des projections des foyers sur les tangentes à l'ellipse est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.* Prolongeons le rayon vecteur FM d'une longueur MH égale à MF; la tangente divisant en deux parties égales l'angle FMH est perpendiculaire sur le milieu I de la droite

FH (fig. 128); joignons ce point au centre O de l'ellipse. La droite OI, qui divise en deux parties égales les côtés FF', FH du triangle F'FH, est parallèle au troisième côté F'H, et en est la moitié; la longueur F'H étant égale au grand axe AA', la distance OI est constante et égale à OA. Donc le lieu du point I est la circonférence de cercle décrite du point O comme centre, avec OA pour rayon.

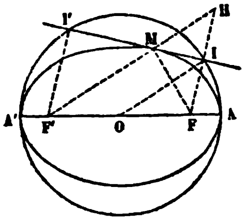


Fig. 128.

**227.** PROBLÈME I. *Mener une tangente à l'ellipse en un point* M *donné sur l'ellipse.*

Nous avons déjà résolu ce problème, ainsi que les suivants, en considérant l'ellipse comme la production d'un cercle. Nous traiterons les mêmes questions par une autre méthode qui pourra être appliquée à l'hyperbole et à la parabole.

Prolongeons le rayon vecteur F'M (fig. 129) d'une longueur MH égale à l'autre rayon vecteur MF; et par le point M menons une droite TT' perpendiculaire à FH; nous aurons la tangente demandée. Car, dans le triangle isocèle FMH, la droite MT, perpendicularre abaissée du sommet sur la base FH, divise l'angle au sommet en deux parties égales. Cette droite, étant bissectrice de l'angle FMH formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre, coïncide avec la tangente à l'ellipse.

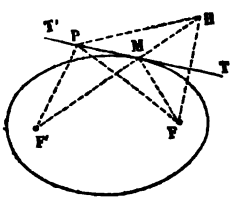


Fig. 129.

**228.** REMARQUE. Il est bon d'observer que tous les points de la tangente, excepté le point de contact M, sont situés hors de l'ellipse. Soit P un point quelconque de la tangente: joignons ce point aux deux foyers et au point H. La tangente étant perpendiculaire sur le milieu de FH, la distance PF est égale à PH, et, par conséquent, la ligne brisée F'P + PF est égale à la ligne brisée F'P + PH; mais cette dernière est plus grande que la ligne droite F'H, qui est égale au grand axe de l'ellipse, puisqu'on a prolongé le rayon vecteur F'M d'une

longueur MH égale à MF. La somme des distances du point P aux deux foyers étant plus grande que le grand axe, ce point est situé hors de l'ellipse.

La ligne brisée F'M + MF est le plus court chemin allant du point F' au point F en passant par un point de la tangente.

On dit qu'une ligne brisée est *convexe*, lorsqu'elle est située tout entière d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés indéfiniment prolongés. De même, on dit qu'une courbe est convexe lorsqu'elle est située tout entière d'un même côté par rapport à chacune de ses tangentes indéfiniment prolongées. Il résulte de ce qui précède que l'ellipse est une courbe fermée convexe.

**220.** Problème II. *Mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur* P.

Supposons le problème résolu, et soit PM (fig. 130) une tangente passant par le point P. Si l'on prolonge le rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à FM, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de la droite FH; la question revient donc à déterminer le point H. Puisque la droite F'H est égale au grand axe AA', le point H est situé sur la circonférence décrite du foyer F' comme centre avec AA' pour rayon. D'autre part, la distance PH étant égale à PF, le point H est sur la circonférence décrite du point P comme centre avec PF pour rayon; le point H est donc à l'intersection de ces deux circonférences. On déduit de là la construction suivante : du foyer F' comme centre, avec un rayon égal au grand axe, décrivons un cercle. Du point P comme centre, avec un rayon égal à la distance PF de ce point à l'autre foyer, décrivons un second cercle, qui coupera le premier au point H. Joignons FH, et du point P menons une perpendiculaire à la droite FH, nous aurons la tangente demandée. Le point de

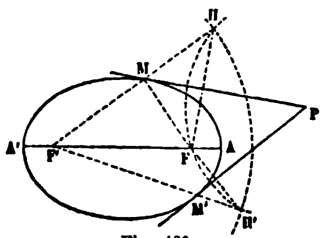


Fig. 130.

contact M sera déterminé par l'intersection de la tangente avec la droite F'H. Les deux cercles se coupent en un second point H'; en menant de même du point P une perpendiculaire à FH', on aura une seconde tangente PM', dont on déterminera le point de contact M' à l'aide de la droite F'H'.

Il est à remarquer que ces constructions peuvent être effectuées sans que l'ellipse soit tracée. Il suffit que l'on connaisse les foyers et le grand axe.

**230.** Problème III. *Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une droite donnée* KL.

Supposons le problème résolu, et soit ST une tangente parallèle à KL (fig. 131). Si l'on prolonge F'M d'une longueur MH égale à MF, on sait que la tangente est perpendiculaire sur le milieu de FH. On en déduit la construction suivante : du foyer F' comme centre, avec un rayon égal au grand axe, décrivons un cercle; par l'autre foyer F menons une droite FH perpendiculaire à la droite donnée KL; cette droite coupera la circonférence en un point H; sur le milieu de FH, élevons une perpendiculaire ST, nous aurons la tangente demandée. Le point de contact sera déterminé par l'intersection de la tangente avec la droite F'H. La droite FH prolongée rencontre la circonférence en un second point H'; en élevant une perpendiculaire sur le milieu de FH', on obtiendra une seconde tangente S'T', dont on déterminera le point de contact M' par la droite F'H'.

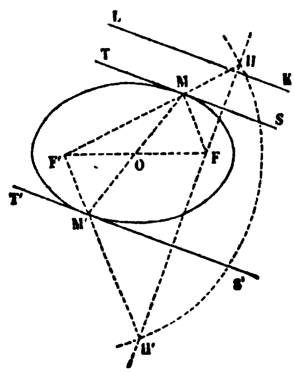


Fig. 131.

**231.** Problème IV. *Une ellipse étant définie par ses foyers et son grand axe, déterminer les points où elle est coupée par une droite donnée* MM'.

Soit M l'un des points où la droite donnée coupe l'ellipse (fig. 132); joignons ce point aux deux foyers et prolongeons le

rayon vecteur F'M d'une longueur MH égale à MF; le point H appartient au cercle directeur décrit du foyer F' comme centre; si du point M comme centre, avec un rayon égal à MF, on décrit un cercle, ce cercle sera tangent en H au cercle directeur; en abaissant du foyer F une perpendiculaire sur la droite donnée et prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même, on obtient un second point $F_1$ appartenant à ce même cercle. La question revient donc à trouver le centre M d'un cercle passant par deux points donnés F et $F_1$ et tangent au cercle directeur. Pour cela, par les deux points F et $F_1$ on fait passer un cercle quelconque qui coupe le cercle directeur en deux points K et K'; du point I, intersection des deux droites $FF_1$ et KK', on mène une tangente IH au cercle directeur; le point M, où la droite F'H coupe la droite donnée, sera le point cherché.

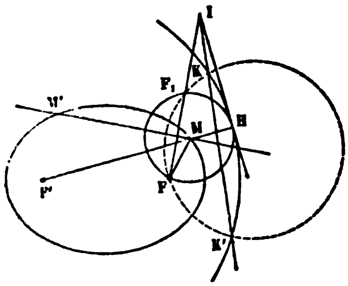


Fig. 132.

On a, en effet,

$$\overline{IH}^2 = IK \times IK' = IF \times IF_1;$$

donc le cercle qui passe par les trois points F, $F_1$, H, est tangent en H au cercle directeur. Comme on peut mener du point I deux tangentes au cercle directeur, on aura deux points M et M'.

Lorsque le point $F_1$, symétrique du foyer F par rapport à la droite donnée, est situé à l'intérieur du cercle directeur, il y a effectivement deux solutions. Lorsque le point $F_1$ est situé sur le cercle, la droite est tangente à l'ellipse. Enfin, quand le point $F_1$ est situé hors du cercle, la droite ne rencontre pas l'ellipse.

### FOYERS ET DIRECTRICES DE L'HYPERBOLE.

**232.** L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes étant

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

il suffit de remplacer $b^2$ par $-b^2$ dans les résultats trouvés pour l'ellipse. On a ainsi les deux solutions réelles

$$\beta = 0 \ , \ \alpha = \pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm c,$$

et le polynôme du second degré est le carré du polynôme du premier degré $a - \frac{\alpha x}{a}$. Les deux autres solutions sont imaginaires.

L'hyperbole admet donc deux foyers réels F et F', situés sur l'axe transverse et à égale distance du centre (fig. 133). On les obtient en menant par le sommet A une perpendiculaire AG à l'axe transverse jusqu'à l'asymptote, et prenant sur l'axe transverse des longueurs OF et OF' égales à OG.

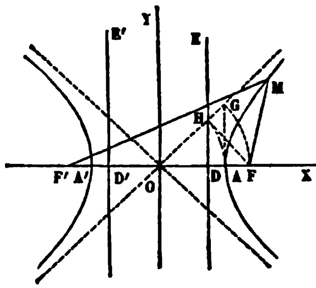


Fig. 133.

La directrice est représentée par l'équation $x = \frac{a^2}{\alpha}$. Au foyer F correspond la directrice DE, au foyer F' la directrice D'E'. Du point O comme centre, avec OA pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera l'asymptote au point H, ce point appartient à la directrice. En effet, les deux triangles OAG, OHF, qui ont un angle commun O, les côtés OA et OG respectivement égaux à OF et OH, sont égaux, et l'angle OHF est droit; si du point H on abaisse une perpendiculaire HD sur l'axe transverse OA,

on a $\overline{OH}^2 = OF \times OD$, et, par suite, $OD = \frac{a^2}{c}$. Ainsi la droite DH est la directrice.

Le rapport constant $k = \sqrt{m^2 + n^2}$ est égal à $\frac{c}{a}$; c'est l'*excentricité* de l'hyperbole; on la représente aussi par la lettre $e$.

**233.** THÉORÈME III. *La différence des distances de chacun des points de l'hyperbole aux deux foyers est constante et égale à l'axe transverse.*

La distance d'un foyer à un point quelconque M de la courbe a pour expression $\pm\left(a - \frac{\alpha x}{a}\right)$. Les abscisses $\alpha$ et $x$ du foyer et d'un point de l'hyperbole étant plus grandes que $a$ en valeur absolue, le second terme en valeur absolue est plus grand que $a$. Il faudra donc faire précéder la parenthèse du signe — ou du signe +, suivant que le point M est sur la branche de droite ou sur celle de gauche, et que l'on prend sa distance à l'un ou à l'autre foyer. Pour la branche de droite, on a

$$MF = -a + ex \quad , \quad MF' = a + ex;$$

d'où

$$MF' - MF = 2a.$$

Pour la branche de gauche, on a

$$MF = a - ex \quad , \quad MF' = -a - ex;$$

d'où

$$MF - MF' = 2a.$$

**234.** COROLLAIRE I. *La différence des distances d'un point situé entre les deux branches de l'hyperbole aux deux foyers est plus petite que l'axe transverse; lorsque le point est situé dans les deux autres parties du plan, la différence est plus grande que l'axe transverse.*

Soit P un point situé entre les deux branches de la courbe

(fig. 134); la droite PF rencontre l'hyperbole au point M. On a

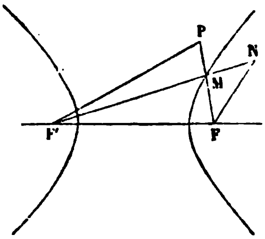


Fig. 134.

$$PF' - PM < MF';$$

si l'on retranche MF de part et d'autre, il vient

$$PF' - PF < MF' - MF;$$

cette dernière différence étant égale à $2a$, la première est plus petite que $2a$. Considérons maintenant un point N situé à droite de la première branche d'hyperbole; la droite NF' rencontre cette branche en M; on a

$$NF < NM + MF,$$

et, en ajoutant de part et d'autre MF',

$$NF + MF' < NF' + MF; \quad \text{d'où} \quad NF' - NF > MF' - MF.$$

La seconde différence étant égale à $2a$, la première est plus grande que $2a$.

Il résulte de là que l'on peut considérer l'hyperbole comme le lieu des points dont la différence des distances aux deux foyers est égale à $2a$. C'est sur cette propriété que repose la construction par points ou d'un mouvement continu que nous avons donnée au commencement (n° 14).

**235.** Corollaire II. *La distance d'un point quelconque de l'hyperbole au foyer* F *est égale à l'une des normales menées de ce point au cercle décrit de l'autre foyer* F' *comme centre avec un rayon égal à l'axe transverse.* Pour un point M de la première branche (fig. 135), on a

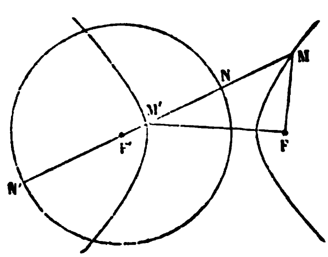


Fig. 135.

$$MF' - MF = 2a = F'N,$$

et, par suite,

$$MF = MF' - F'N = MN.$$

Pour un point M' de la seconde branche, on a

$$M'F - M'F' = 2a = F'N',$$

et, par suite,

$$M'F = M'F' + F'N = M'N'.$$

Dans le premier cas, la portion MN de la normale mesure la distance du point M au cercle, et la première branche d'hyperbole est le lieu des points également distants du foyer F et du cercle directeur.

**236.** Théorème IV. *La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui vont du point de contact aux deux foyers.*

Prenons deux points voisins M et M' sur l'hyperbole (fig. 136). Du foyer F comme centre, avec un rayon égal FM, décrivons un arc de cercle qui coupera en C le rayon vecteur FM'; du foyer F' comme centre, avec un rayon égal à F'M, décrivons un arc de cercle qui coupera en D le rayon vecteur F'M'; quand on passe du point M au point M', les deux rayons vecteurs FM, F'M éprouvent des accroissements égaux à M'C et à M'D; puisque la différence est constante, ces deux accroissements sont égaux entre eux.

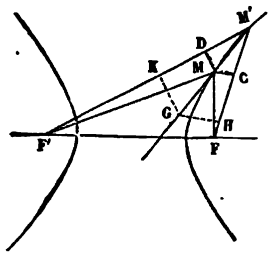


Fig. 136.

Sur la sécante MM' prenons une longueur arbitraire MG, et par le point G menons GH parallèle à la corde MC et GK parallèle à la corde MD. A cause des parallèles, on a

$$\frac{M'C}{M'H} = \frac{M'M}{M'G} = \frac{M'D}{M'K};$$

puisque les deux longueurs M'C et M'D sont égales, il en résulte que les deux longueurs M'H et M'K sont aussi égales. Lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la sécante MM' tend vers une position limite qui est la tangente à l'hyperbole au point M; en même temps, les cordes MC et MD deviennent tangentes aux cercles décrits des foyers comme centres et, par conséquent, perpendiculaires à FM et F'M; leurs parallèles GH, GK prennent aussi des directions perpendiculaires à ces mêmes rayons, et les angles H et K deviennent droits. Les deux triangles M'GH, M'GK, qui ont un côté M'G commun et un côté M'H égal à M'K, deviennent donc rectangles et, par conséquent, égaux entre eux; il en résulte que les

angles GM'H, GM'K deviennent égaux; ainsi la tangente à l'hyperbole au point M est bissectrice de l'angle FMF'.

**237.** Corollaire I. L'hyperbole est la seule courbe qui jouisse de cette propriété; car en appelant $u$ et $v$ les rayons MF et MF', $\Delta u$ et $\Delta v$ leurs variations, on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u}=\frac{M'D}{M'C}=\frac{M'K}{M'H}.$$

Si l'on suppose que les angles GM'H, GM'K deviennent égaux, quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, les deux triangles GM'H, GM'K deviennent aussi égaux, ainsi que les côtés M'H et M'K; il en résulte

$$\lim\frac{\Delta v}{\Delta u}=1$$

En remontant à la fonction primitive, on a

$$v=u+C, \quad \text{d'où} \quad v-u=C.$$

**238.** Corollaire II. *Une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent à angle droit.* On dit que deux courbes du second degré sont homofocales, lorsque leurs foyers coïncident; on appelle angle de deux courbes l'angle de leurs tangentes au point d'intersection. Soit M le point d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole qui ont mêmes foyers F, F' (fig. 137); la bissectrice MN de l'angle FMF' est, d'une part normale à l'ellipse, d'autre part tangente à l'hyperbole; donc les tangentes MT, MN aux deux courbes sont perpendiculaires entre elles.

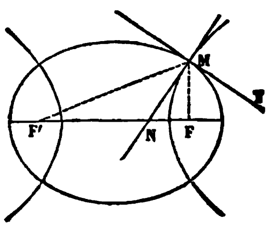


Fig. 137.

**239.** Problème V. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point M donné sur l'hyperbole.*

Sur le rayon vecteur MF' prenons une longueur MH égale à l'autre rayon vecteur MF, et par le point M menons une droite MP perpendiculaire à FH; nous aurons la tangente demandée (fig. 138).

Remarque. Il est bon d'observer que la tangente est tout entière située entre les deux branches de l'hyperbole. Soit P point quelconque de cette tangente, on a

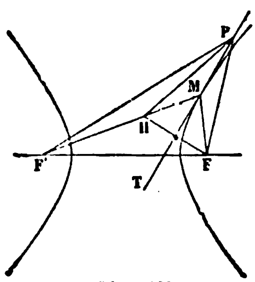


Fig. 138.

$$PF' - PH < F'H,$$

et, par suite,

$$PF' - PF < 2a;$$

donc le point P est situé entre les deux branches de l'hyperbole. Une branche de l'hyperbole, étant située d'un même côté de chacune de ses tangentes, est une courbe convexe.

La tangente étant perpendiculaire sur le milieu I de FH, le point I est la projection du foyer F sur la tangente. La droite OI, qui est parallèle à F'H et égale à la moitié de F'H, est constante; il en résulte que *le lieu des projections des foyers sur les tangentes est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.*

**240.** Problème VI. *Mener une tangente à l'hyperbole par un point donné* P *situé entre les deux branches de l'hyperbole.*

Soit PM une tangente passant par le point P (fig. 139); si du rayon vecteur MF' on retranche MH = MF, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de FH. La question revient à déterminer le point H; ce point se trouve à l'intersection du cercle décrit du foyer F' comme centre, avec un rayon égal à $2a$, et du cercle décrit du point P comme centre avec un rayon égal à PF. On obtiendra la tangente en menant du point P une perpendiculaire à FH, et on déterminera le point de contact M par le rayon vecteur F'H.

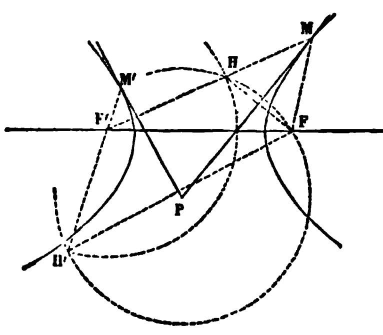


Fig. 139.

Les deux cercles se coupent en un second point H'; en me-

nant du point P une perpendiculaire à FH′, on aura une seconde tangente PM′, dont on déterminera le point de contact à l'aide de la droite F′H′.

Lorsque le point P est situé sur l'une des asymptotes, l'une des tangentes menées par le point P coïncide avec cette asymptote, et le point de contact s'éloigne à l'infini.

**241**. Problème VII. *Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une droite donnée* OL.

Du foyer F′ comme centre, avec un rayon égal à $2a$, on décrira le cercle directeur; du foyer F, on mènera une droite perpendiculaire à OL (fig. 140); cette droite coupera le cercle en deux points H et H′ : par les milieux des droites FH et FH′, on mènera des parallèles à OL; ces parallèles seront les tangentes demandées. Les droites F′H, F′H′ détermineront les points de contact M et M′.

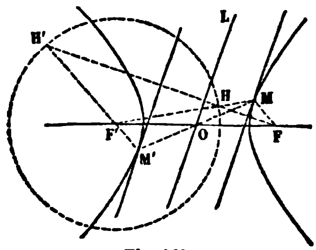


Fig. 140.

Pour que le problème soit possible, il faut que la droite donnée OL, que l'on peut supposer menée par le centre, ne rencontre pas l'hyperbole; alors la perpendiculaire FH′ menée par le foyer F coupera le cercle directeur en deux points.

**242**. Problème VIII. *Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une hyperbole définie par ses foyers et son axe transverse.*

La construction est exactement la même que pour l'ellipse.

### FOYER DE LA PARABOLE.

**243**. L'équation de la parabole, rapportée à son axe et à la tangente au sommet, est

$$y^2 - 2px = 0.$$

Cette équation ne contenant pas de terme en $xy$ ni de terme en $x^2$, on doit avoir, d'après les relations générales du nº 216, $mn = 0$, $1 - m^2 = 0$; d'où $n = 0$, $m = 1$. Le coefficient du terme en $y$ et le terme constant devant être aussi nuls,

on a $\beta = 0$, $\alpha^2 - h^2 = 0$. D'ailleurs les équations (3) du nº 216 se réduisent à $1 = \frac{\alpha + h}{p}$; on en déduit $\alpha + h = p$. L'équation $\alpha^2 - h^2 = 0$ ou $(\alpha + h)(\alpha - h) = 0$ devient $p(\alpha - h) = 0$, c'est-à-dire $\alpha - h = 0$; il en résulte $\alpha = h = \frac{p}{2}$.

On n'a ici qu'une solution. Ainsi la parabole admet un seul foyer F situé sur son axe à une distance du sommet A égale à la moitié du paramètre (fig. 141). Le polynôme du second degré étant le carré du polynôme du premier degré $x + \frac{p}{2}$, la distance FM est égale à $x + \frac{p}{2}$. Au foyer correspond une directrice DE, représentée par l'équation $x = -\frac{p}{2}$; cette directrice est perpendiculaire à l'axe et à une distance AD du sommet égale à AF.

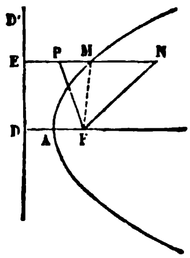


Fig. 141.

Le rapport constant $k = \sqrt{m^2 + n^2}$ se réduit ici à l'unité; ainsi chacun des points de la parabole est également distant du foyer et de la directrice.

**244.** Théorème V. *Tout point intérieur à la parabole est plus rapproché du foyer que de la directrice; tout point extérieur est, au contraire, plus rapproché de la directrice que du foyer.*

Considérons d'abord un point N situé à l'intérieur de la parabole; joignons-le au foyer et abaissons de ce point une perpendiculaire NE sur la directrice. Cette perpendiculaire rencontre la courbe en un point M que nous joignons au foyer. Le point M appartenant à la parabole, les distances MF et ME sont égales. Mais la ligne droite NF est plus courte que la ligne brisée NM + MF; si l'on remplace MF par son égale ME, on voit que la distance NF est plus petite que NE. Ainsi le point intérieur N est plus près du foyer que de la directrice. Considérons maintenant un point extérieur P situé entre la courbe et la directrice. Joignons-le au foyer et abaissons sur

la directrice une perpendiculaire PE que nous prolongerons jusqu'à sa rencontre en M avec la courbe. Le point M appartenant à la parabole, les distances MF et ME sont égales ; la ligne droite MF, ou son égale ME, est plus courte que la ligne brisée MP+PF ; si l'on retranche MP de part et d'autre, on voit que PE est plus courte que PF. Ainsi le point extérieur P est plus près de la directrice que du foyer. Lorsque le point P est situé à gauche de la directrice, il est évidemment plus près de la directrice que du foyer.

Il résulte de là que la parabole peut être considérée comme le lieu des points également distants du foyer et de la directrice. C'est ainsi qu'on définit la parabole en Géométrie élémentaire, et c'est sur cette propriété que repose la construction de la parabole par points ou d'un mouvement continu, dont nous avons parlé au commencement (n° 16).

**245.** Théorème VI. *La tangente à la parabole fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe et le rayon vecteur menés par le point de contact.*

Prenons sur la parabole deux points voisins M et M′ (fig. 142), que nous joindrons au foyer et desquels nous abaisserons des perpendiculaires ME, M′E′ sur la directrice. Du foyer F comme centre, avec FM pour rayon, décrivons un arc de cercle MC, et par le point M menons une parallèle MC′ à la directrice. La longueur M′C est la différence des deux rayons vecteurs FM′, FM ; c'est l'accroissement qu'éprouve le rayon vecteur FM quand on passe du point M au point M′. De même, la longueur M′C′ est la différence des deux perpendiculaires M′E′, ME ; c'est l'accroissement qu'éprouve la perpendiculaire ME quand on passe du point M au point M′. Comme le rayon vecteur MF reste constamment égal à la perpendiculaire ME, il en résulte que les deux accroissements M′C et M′C′ sont égaux entre eux.

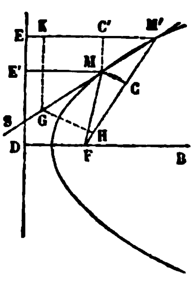


Fig. 142.

Menons la sécante MS par les deux points M et M′ et traçons la corde MC dans le cercle décrit du foyer comme centre. Sur

la sécante portons une longueur arbitraire MG, et par le point G menons GH parallèle à MC et GK parallèle à MC'. A cause des parallèles, on a les rapports égaux $\frac{M'C}{M'H} = \frac{M'M}{M'G} = \frac{M'C'}{M'K}$; puisque les deux longueurs M'C et M'C' sont égales, les deux longueurs M'H et M'K, qui leur sont proportionnelles, sont aussi égales.

Supposons maintenant que le point M' se rapproche indéfiniment du point M; la sécante MS tend vers une position limite MT qui est la tangente à la parabole; la corde MC prolongée tend de même vers la tangente au cercle, et, par conséquent, devient perpendiculaire au rayon FM; la parallèle GH prend aussi une direction perpendiculaire à FM. On voit par là que les deux triangles M'GH, M'GK ont pour limites deux triangles rectangles MGH, MGK (fig. 143); ces deux triangles rectangles, ayant l'hypoténuse MG commune, et les côtés MH et MK égaux entre eux comme limites de longueurs égales, sont égaux; d'où l'on conclut l'égalité des deux angles GMH, GMK. Ainsi la tangente MT à la parabole est bissectrice de l'angle FME, formé par le rayon MF et la perpendiculaire ME abaissée du point de contact sur la directrice. Si l'on prolonge EM suivant ML, les deux angles GMK, T'ML étant égaux comme opposés par le sommet, les deux angles TMF, T'ML, formés par la tangente avec le rayon vecteur et la parallèle ML à l'axe, sont égaux.

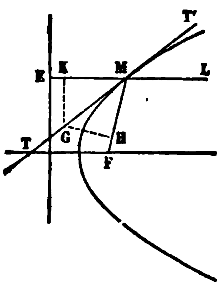


Fig. 143.

**246.** Corollaire I. Supposons qu'une lumière soit placée au foyer F (fig. 144) de la parabole; les rayons lumineux, partant du foyer F, se réfléchissent sur la parabole en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Soit FM l'un de ces rayons; menons la tangente TT' à la parabole en ce point : le rayon réfléchi, devant faire un angle LMT' égal à FMT, sera parallèle à l'axe AB de la pa-

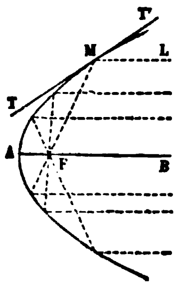


Fig. 144.

rabole. Ainsi tous les rayons réfléchis seront parallèles à l'axe.

C'est d'après ce principe que l'on construit les réflecteurs employés dans les réverbères et les lanternes des voitures. La surface intérieure, en métal bien poli, est engendrée par une parabole tournant autour de son axe; la lumière est placée au foyer; les rayons lumineux, après leur réflexion, devenant tous parallèles à l'axe, le réflecteur projette un faisceau de rayons parallèles qui se propagent sans se disperser et qui éclairent à une grande distance.

Corollaire II. Supposons au contraire que des rayons lumineux, parallèles à l'axe, tombent sur un miroir parabolique; après leur réflexion, ils iront tous converger au foyer.

On emploie les miroirs paraboliques dans la construction des télescopes; l'axe est dirigé vers l'astre; les rayons lumineux venant de l'astre se réfléchissent sur le miroir, et forment au foyer une image très-brillante de l'astre.

On emploie aussi la forme parabolique dans la construction des porte-voix et des cornets acoustiques.

**247.** Corollaire III. Réciproquement, la parabole est la seule courbe qui jouisse de cette propriété que la tangente en chacun de ses points fasse des angles égaux avec la parallèle à une droite fixe et le rayon vecteur mené d'un point fixe au point de contact. Imaginons que chacun des points M du plan soit déterminé par sa distance MF au point fixe F, et sa distance ME à une droite DE perpendiculaire à la droite fixe FB (fig. 142); désignons par $u$ et $v$ ces deux coordonnées (n° 17). Quand on passe du point M de la courbe au point voisin M', ces deux coordonnées éprouvent des accroissements $\Delta u = M'C$, $\Delta v = M'C'$, et l'on a

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{M'C'}{M'C} = \frac{M'K}{M'H}.$$

Quand le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la droite M'M devient tangente et l'angle H devient droit. Les deux triangles rectangles limites GMH, GMK (fig. 143) sont égaux, comme ayant l'hypoténuse commune et l'angle GMH

égal à GMK par hypothèse. On a donc

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = 1,$$

et en remontant à la fonction primitive $v = u + C$. En déplaçant la droite DE d'une quantité égale à la constante C, on aura $v = u$.

**248.** PROBLÈME IX. *Mener une tangente par un point* M *donné sur la parabole.*

PREMIÈRE MÉTHODE. Soit T (fig. 145) le point où la tangente rencontre le prolongement de l'axe, ME la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice. On sait que la tangente est bissectrice de l'angle FME; l'angle FTM étant égal à l'angle alterne-interne TME et, par suite, à l'angle FMT, il en résulte que le triangle TFM est isocèle, et les deux côtés FM, FT égaux entre eux. Ainsi, pour construire la tangente au point M, il suffit de porter sur l'axe une longueur FT égale au rayon vecteur FM et de joindre TM.

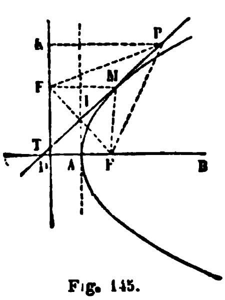


Fig. 145.

Cette méthode ne convient pas quand le point M est très-voisin du sommet A de la parabole, parce que les deux points M et T, étant alors très-rapprochés l'un de l'autre, ne déterminent pas la tangente avec une assez grande précision. Dans ce cas, on emploiera de préférence la méthode suivante.

DEUXIÈME MÉTHODE. La tangente MT, divisant en deux parties égales l'angle au sommet M du triangle isocèle FME, est perpendiculaire sur le milieu de la base FE. Ainsi, pour construire la tangente, il suffit d'abaisser du point M une perpendiculaire ME sur la directrice, et de mener du point M une perpendiculaire sur la droite FE.

Il résulte de cette construction que la tangente au sommet A de la parabole est perpendiculaire à l'axe de la parabole.

REMARQUE. Il est bon d'observer que tous les points de la tangente, excepté le point de contact M, sont situés à l'exté-

rieur de la parabole. Soit P un point quelconque de la tangente; la tangente étant perpendiculaire sur le milieu de FE. les distances PE, PF sont égales; mais l'oblique PE est plus grande que la perpendiculaire PK; donc la distance PF est plus grande que PK, et, par suite, le point P est à l'extérieur de la parabole. Il en résulte que la parabole est une courbe convexe.

249. Corollaire. *Le lieu des projections du foyer sur la tangente à la parabole est la tangente au sommet.* On voit, en effet, que le point I, milieu de FE, et projection du foyer sur la tangente, se trouve sur la parallèle à la directrice menée par le point A, milieu de FD, c'est-à-dire sur la tangente au sommet A.

250. Problème X. *Mener une tangente à la parabole par un point extérieur* P.

Supposons le problème résolu et soit PM (fig. 146) une tangente passant par le point P. Si l'on abaisse du point M une perpendiculaire ME sur la directrice et si l'on joint FE, on sait que la tangente PM est perpendiculaire sur le milieu de FE; il en résulte que la distance PE est égale à PF, et l'on en déduit la construction suivante : du point P comme centre, avec un rayon égal à la distance PF de ce point au foyer, décrivons un cercle qui coupera la directrice au point E. Joignons FE, et du point P menons une perpendiculaire sur la droite FE, nous aurons la tangente demandée. Le point de contact M sera déterminé par l'intersection de la tangente avec la parallèle à l'axe menée par le point E.

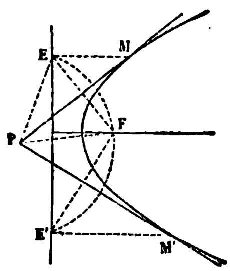


Fig. 146.

Le cercle coupe la directrice en un second point E'. On mènera de même du point P une perpendiculaire sur FE' et l'on aura une seconde tangente PM'.

Ces constructions peuvent être effectuées sans que la parabole soit tracée. Il suffit que l'on connaisse le foyer et la directrice.

**251.** Problème XI. *Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée* KL.

Supposons le problème résolu et soit MT la tangente demandée (fig. 147). Si du point de contact M on abaisse une perpendiculaire ME sur la directrice et que l'on joigne FE, on sait que la tangente est perpendiculaire sur le milieu de FE. On en déduit la construction suivante : du foyer F menons une perpendiculaire à la droite donnée KL jusqu'à sa rencontre avec la directrice en E, et sur le milieu de FE élevons une perpendiculaire MT, nous aurons la tangente demandée. On déterminera le point de contact M en menant par le point E une parallèle EM à l'axe.

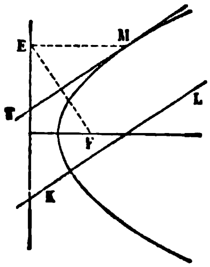


Fig. 147.

**252.** Problème XII. *Trouver les points de rencontre d'une droite donnée et d'une parabole définie par son foyer et sa directrice.*

Prenons le point F, symétrique du foyer F par rapport à la droite donnée (fig. 148). Le point M, étant également distant des points F, $F_1$, et de la directrice, est le centre d'un cercle passant par ces deux points et tangent à la directrice. Pour avoir le point de contact E, on porte sur la directrice, à partir du point I, où la droite $FF_1$ rencontre la directrice, et de part et d'autre, une longueur IE moyenne proportionnelle entre les deux longueurs IF, $IF_1$; on en déduit les deux points d'intersection M et M'.

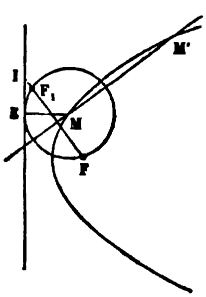


Fig. 148.

Lorsque le point $F_1$, symétrique du foyer par rapport à la droite donnée, est situé à droite de la directrice, il y a effectivement deux solutions. Lorsque le point $F_1$ est sur la directrice, la droite est tangente à la parabole. Enfin, quand le point $F_1$ est à gauche de la directrice, la droite ne rencontre pas la parabole.

**253.** Théorème VII. *La limite d'une ellipse ou d'une hyperbole*

*dont le paramètre conserve une valeur finie, tandis que le grand axe ou l'axe transverse augmente indéfiniment, est une parabole.*

Dans la parabole l'ordonnée du foyer est égale au paramètre $p$; par analogie, on appelle *paramètre* d'une ellipse ou d'une hyperbole l'ordonnée du foyer, qui est égale à $\frac{b^2}{a}$, et on désigne ce paramètre par $p$. L'ellipse, rapportée à son grand axe et à la tangente au sommet (fig. 149), a une équation de la forme

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Supposons maintenant que le sommet A restant fixe, et le paramètre $p$ conservant une valeur finie, on fasse augmenter le grand axe $2a$ indéfiniment, l'équation de l'ellipse se réduit à l'équation $y^2=2px$, qui représente une parabole. Si l'on considère les points qui correspondent à une même valeur de $x$, on voit que chaque point de la parabole est la position limite vers laquelle tend le point correspondant de l'ellipse, quand on fait augmenter $a$ indéfiniment; ce qu'on énonce en disant que la parabole est la limite de l'ellipse.

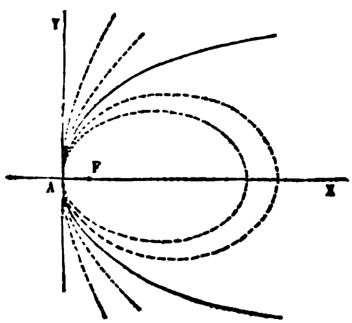


Fig. 149.

L'hyperbole, rapportée à son axe transverse et à la tangente au sommet A, a de même pour équation

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2;$$

si l'on fait augmenter $a$ indéfiniment, le paramètre $p$ conservant une valeur finie, cette équation se réduit aussi à

$$y^2 = 2px.$$

La parabole est la limite de la branche d'hyperbole à laquelle appartient le sommet A; l'autre branche s'est éloignée indéfiniment vers la gauche.

Dans ce qui précède nous avons supposé que le paramètre de l'ellipse ou de l'hyperbole conserve une valeur finie. On arrive à la même conclusion, en supposant que la distance AF du sommet A au foyer voisin F conserve une valeur finie. En effet, en appelant $\alpha$ cette distance, on a, dans l'ellipse, $c = a - \alpha$ et, par suite,

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{(a-c)(a+c)}{a} = \alpha\left(2 - \frac{\alpha}{a}\right);$$

le paramètre $p$ ayant pour limite la quantité finie $2\alpha$, l'équation de l'ellipse se réduit à $y^2 = 4\alpha x$. Il en est de même pour l'hyperbole.

**254.** Remarque. Cette transformation de l'ellipse en parabole a de l'importance. Elle permet de déduire des propriétés de l'ellipse celles de la parabole comme cas particuliers. Ainsi, dans l'ellipse, le diamètre, ou le lieu des milieux d'une série des cordes parallèles, est une droite passant par le centre; si l'on suppose que le centre s'éloigne à l'infini, l'ellipse se change en parabole, et les diamètres deviennent parallèles à l'axe.

L'ellipse est le lieu des points également distants du foyer F et du cercle directeur décrit du foyer F′ comme centre (n° 221). Le foyer F′ s'éloignant à l'infini, le cercle directeur devient la directrice de la parabole.

La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs qui vont du point de contact M aux deux foyers (n° 222); le foyer F′ s'éloignant à l'infini, le rayon vecteur MF devient parallèle à l'axe.

**255.** Théorème VIII. *Si l'on mène deux tangentes à une courbe du second degré, la droite* FP, *qui va du foyer* F *au point de concours* P *des deux tangentes, est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs* FM, FM′, *qui vont de ce foyer aux points de contact des*

*deux tangentes, ou de l'angle extérieur, suivant que les deux tangentes touchent une même branche de la courbe, ou deux branches différentes.*

Considérons deux tangentes PM, PM′ à une ellipse (fig. 150); prolongeons le rayon F′M d'une longueur MH égale à MF, et de même FM′ d'une longueur M′H′ égale à M′F′; les tangentes étant perpendiculaires sur les milieux de FH et de F′H′, on a

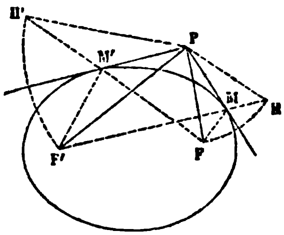


Fig. 150.

$$PH = PF, \quad PH' = PF',$$

et les deux triangles F′PH, H′PF sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir $F'H = FH' = 2a$, $PH = PF$, $PF' = PH'$; on en conclut que les angles PHM, PFM′ sont égaux; mais l'angle PHM est égal à PFM; donc les angles PFM, PFM′ sont égaux et la droite FP est bissectrice de l'angle MFM′.

La même chose a lieu dans l'hyperbole, quand les deux tangentes touchent une même branche : mais quand les tangentes touchent deux branches différentes, la droite FP est bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs FM, et le prolongement de l'autre.

Examinons maintenant le cas où la courbe est une parabole (fig. 151). Des points de contact abaissons des perpendiculaires MH, M′H′ sur la directrice; les tangentes étant perpendiculaires sur les milieux des droites FH, FH′, les angles PFM, PFM′ sont égaux respectivement aux angles PHM, PH′M′. Les droites PH et PH′, égales à la droite PF, sont égales entre elles, et le triangle HPH′ est isocèle. Les angles PHM, PH′M,′ complémentaires des angles égaux du triangle isocèle, sont égaux entre eux; donc les angles PFM, PFM′ sont égaux.

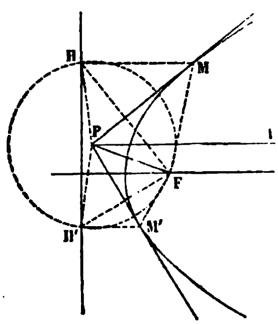


Fig. 151.

C'est ce que l'on peut d'ailleurs conclure immédiatement en regardant la parabole comme limite d'une ellipse.

**256.** Théorème IX. *Les tangentes menées d'un point extérieur* P *à une ellipse ou à une hyperbole, font des angles égaux avec les droites qui joignent ce point aux deux foyers.*

Dans les deux triangles égaux F'PH, H'PF (fig. 150), on a les angles égaux F'PH, H'PF; en retranchant la partie commune F'PF, on a FPH = F'PH', et, en prenant la moitié, FPM = F'PM'.

La même propriété subsiste dans la parabole, limite d'une ellipse; il suffit de remplacer le rayon vecteur PF' par une droite PI parallèle à l'axe (fig. 151). Il est facile d'ailleurs de démontrer directement cette propriété : si du point P comme centre, avec un rayon égal à PF, on décrit un cercle, ce cercle passera par les points H et H'; les angles MPI, FHH' sont égaux, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; mais l'angle inscrit FHH' est moitié de l'angle au centre FPH' et, par conséquent, égal à l'angle FPM'; donc les angles MPI, M'PF sont égaux.

**257.** Théorème X. *La droite* FK, *qui joint le foyer d'une courbe du second degré au point où une sécante quelconque rencontre la directrice, est bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs allant du foyer aux points où la sécante coupe la courbe, ou bissectrice de l'angle même des rayons vecteurs, suivant que les deux points d'intersection* M *et* M' *sont situés sur la même branche de la courbe ou sur deux branches différentes.*

Des points M et M' abaissons des perpendiculaires sur la directrice (fig. 152); on a

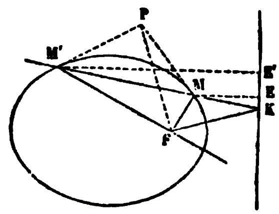


Fig. 152.

$$\frac{MF}{ME} = \frac{M'F}{M'E'},$$

et, par suite,

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{ME}{M'E'} = \frac{MK}{M'K}.$$

Lorsque les deux points M et M' appartiennent à une même branche de la courbe, le point K étant situé sur le prolongement de la corde MM', la droite FK est bissectrice de l'angle extérieur au triangle MFM'. Lorsque les

points M et M′ appartiennent à deux branches différentes, le point K étant situé entre les points M et M′, la droite FK est bissectrice de l'angle MFM′.

COROLLAIRE. Si l'on mène des tangentes à la courbe aux points M et M′, et que l'on joigne le foyer F au point de concours P de ces tangentes, les deux droites FK, FP, étant les bissectrices de deux angles supplémentaires, sont perpendiculaires entre elles.

258. THÉORÈME XI. *Si, par un point* P *pris sur la directrice, on mène des tangentes à une courbe du second degré, la droite des contacts* MM′ *passe par le foyer correspondant* F, *et elle est perpendiculaire à la droite* FP *qui joint le point* P *au foyer* (fig. 153).

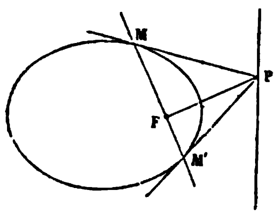



Fig. 153.

Imaginons que la tangente PM soit la limite d'une sécante dont les deux points d'intersection se sont réunis en un seul; en vertu du théorème précédent, la droite FP est perpendiculaire à FM; elle est de même perpendiculaire à FM′; donc la ligne MFM′ est droite et perpendiculaire à FP.

259. THÉORÈME XII. *Le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque de l'ellipse ou de l'hyperbole est constant.*

Soient FH, F′H′ les perpendiculaires abaissées des foyers sur une première tangente (fig. 154), FK, F′K′ les perpendiculaires abaissées sur une seconde tangente, P le point de rencontre des deux tangentes. En vertu du théorème IX, les triangles rectangles FPH, F′PK′ sont semblables, ainsi que les triangles FPK, F′PH′, et l'on a

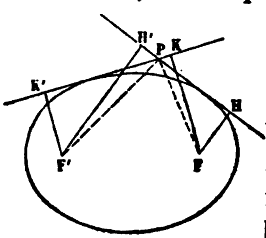



Fig. 154.

$$\frac{FH}{F'K'} = \frac{FP}{F'P} = \frac{FK}{F'H'};$$

d'où

$$FH \times F'H' = FK \times F'K'.$$

Si la courbe est une ellipse, en menant la tangente parallèle au grand axe, on reconnaît que le produit constant est égal à $b^2$. Quand la courbe est une hyperbole, si l'on considère l'asymptote comme la limite d'une tangente, on voit aussi que le produit est égal à $b^2$.

**260.** PROBLÈME XIII. *Construire une courbe du second degré, connaissant le foyer* F *et trois points* A, B, C.

Supposons le problème résolu et les trois points appartenant à une même branche ; le point D, où la sécante AB est coupée par la bissectrice de l'angle extérieur au triangle AFB, appartient à la directrice (n° 257) ; la sécante BC donnera de même un second point D′ de la directrice. Le foyer F, la directrice DD′ et le point A définissent une courbe du second degré et une seule ; ce sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que la distance AF sera inférieure, égale ou supérieure à la distance AE du point A à la directrice. Il est facile de voir que cette courbe passera par les deux points B et C ; en effet, à cause de la bissectrice FD, on a

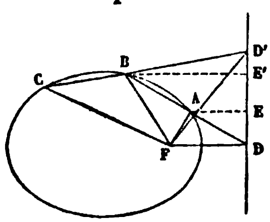


Fig. 155.

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE'},$$

et, par suite,
$$\frac{AF}{AE} = \frac{BF}{BE'};$$

donc la courbe passe par le point B. On démontrera de même qu'elle passe par le point C. On a ainsi une première solution.

On peut supposer que les trois points ne sont pas sur une même branche ; si, par exemple, les deux points A et B sont sur une même branche et le point C sur l'autre branche de l'hyperbole, les bissectrices des angles AFC, BFC donneront deux points de la directrice. Les trois solutions obtenues de cette manière sont des hyperboles. On a donc en tout quatre solutions ; des quatre courbes du second degré qui admettent le foyer donné et passent par les trois points donnés, trois sont

toujours des hyperboles, la quatrième est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant la disposition des points.

**261.** Le calcul conduit à la même conséquence; soient $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du foyer, $x'$ et $y'$, $x''$ et $y''$, $x'''$ et $y'''$ les coordonnées des trois points donnés, $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$ leurs distances au foyer; l'équation de la courbe peut se mettre sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+h)^2=0,$$

et alors la directrice aura pour équation $mx+ny+h=0$. On déterminera les trois constantes $m, n, h$ à l'aide des trois équations du premier degré

$$\begin{aligned}\delta' &= \pm(mx'+ny'+h),\\ \delta'' &= \pm(mx''+ny''+h),\\ \delta''' &= \pm(mx'''+ny'''+h).\end{aligned}$$

Chaque combinaison de signes donne un système d'équations; il y a huit combinaisons : mais on remarque que, si l'on change les signes dans les trois équations, les valeurs de $m, n, h$ changent de signes, et la courbe reste la même; on a donc quatre solutions.

La distance d'un point à une droite est exprimée par une formule renfermant un double signe; on doit prendre le même signe pour tous les points situés d'un même côté de la droite, et l'autre signe pour tous les points situés de l'autre côté. On sait que l'ellipse est située tout entière d'un même côté par rapport à chacune de ses directrices; la parabole est située aussi d'un même côté de sa directrice, tandis que chacune des directrices de l'hyperbole passe entre les deux branches de la courbe. Ainsi, prendre le même signe revient à supposer que les trois points appartiennent à une même branche; prendre des signes différents, que deux points sont sur une branche, le troisième sur une autre branche.

**262.** PROBLÈME XIV. *Construire une courbe du second degré, connaissant un foyer et trois tangentes.*

Supposons le problème résolu; si du foyer F on abaisse des

perpendiculaires sur les trois tangentes, et qu'on prolonge chacune d'elles d'une longueur égale à elle-même, on obtient trois points H, H', H'', appartenant au cercle directeur (fig. 156) qui a pour centre le second foyer F'; le rayon F'H de ce cercle est égal à l'axe $2a$ qui passe par les deux foyers. Les deux foyers F, F', avec la longueur $2a$ définissent une courbe du second degré et une seule. Il est aisé de voir que cette courbe est tangente aux trois droites données; en effet, soit M le point où le rayon F'H coupe la droite MT, la somme ou la différence des rayons vecteurs MF' et MF étant égale à F'H ou à $2a$, le point M appartient à la courbe; en outre, la droite MT, étant perpendiculaire sur le milieu de FH, est tangente à la courbe au point M. Le problème admet ainsi une solution et une seule.

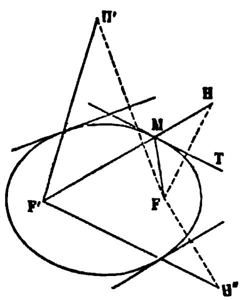


Fig. 156.

Si les trois points H, H', H'' étaient en ligne droite, la courbe cherchée serait une parabole ayant pour directrice cette droite.

### ÉQUATION TRINOME COMMUNE AUX TROIS COURBES DU SECOND DEGRÉ

**263.** Si l'on prend pour origine un point O d'une courbe du second degré, pour axe $Ox$ le diamètre qui aboutit en ce point et, pour axe $Oy$, la tangente en ce point, l'équation de la courbe prend la forme

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

En effet soit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la courbe rapportée aux axes indiqués. Comme elle passe par l'origine et qu'elle est tangente à l'axe $Oy$ on a

$$F = E = 0;$$

en outre l'axe $Ox$ étant le diamètre conjugué des cordes parallèles à $Oy$, l'équation ne doit contenir $y$ qu'au second degré, car à chaque valeur de $x$ répondent deux valeurs de $y$

égales et de signes contraires; donc $B=0$. Le coefficient C n'est pas nul, car s'il l'était la conique se réduirait à deux droites parallèles à l'axe $Oy$. On peut alors résoudre l'équation par rapport à $y^2$ et l'on obtient une équation de la forme indiquée. La courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que $q$ est négatif, positif ou nul.

Prenons en particulier pour origine un sommet de l'axe focal et pour direction positive de l'axe $Ox$ celle qui va du sommet au foyer le plus voisin. Alors les coefficients $p$ et $q$ auront les valeurs suivantes :

1° *Ellipse.* En appelant $a$ et $b$ les axes de l'ellipse, on doit avoir $y=0$ pour $x=2a$, et $y^2=b^2$ pour $x=a$. Donc

$$pa+qa^2=0 \quad 2pa+qa^2=b^2$$

d'où
$$p=\frac{b^2}{a},\ q=-\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=e^2-1$$

2° *Hyperbole.* On doit avoir $y=0$ pour $x=-2a$, et $y^2=-b^2$ pour $x=-a$; donc

$$-pa+qa^2=0 \quad , \quad -2pa+qa^2=-b^2$$

d'où
$$p=\frac{b^2}{a} \quad , \quad q=\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=e^2-1.$$

3° *Parabole.* $p$ est le paramètre, $q$ est nul.

En résumé, en prenant pour origine un sommet de l'axe focal et pour axe des $x$ la droite qui va de ce sommet au foyer le plus voisin, on mettra les équations des trois courbes sous la forme commune

$$y^2=2px+(e^2-1)\,x^2$$

$p$ désignant le paramètre et $e$ l'excentricité, qui est supérieure à l'unité pour l'hyperbole, inférieure à l'unité pour l'ellipse et égale à l'unité pour la parabole.

### ÉQUATION DES COURBES DU SECOND DEGRÉ EN COORDONNÉES POLAIRES.

**264.** Nous prendrons pour pôle un foyer F et pour axe polaire la droite qui va de ce foyer au sommet voisin A, ou, ce qui est la même chose, la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice correspondante DE.

Considérons d'abord une ellipse. Le rapport des distances d'un point quelconque M de la courbe au foyer et à la directrice étant constant et égal à l'excentricité, on a $\frac{MF}{ME} = e$, ou $MF = ME \times e$. La distance FD du foyer à la directrice est égale à $\frac{b^2}{c}$.

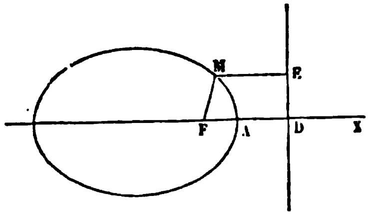



Fig. 157

En projetant la ligne brisée FME sur l'axe, on a

$$\rho \cos \omega + ME = FD = \frac{b^2}{c},$$

d'où

$$ME = \frac{b^2}{c} - \rho \cos \omega ;$$

en remplaçant ME par sa valeur dans l'équation précédente, on en déduit

$$(1) \qquad \rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}.$$

Si la courbe est une hyperbole (fig. 158), le même calcul s'applique à la branche A, dont le sommet est voisin du foyer F pris pour pôle. Quant à la branche A' située de l'autre côté de la directrice, la projection de la ligne brisée FM'E donne

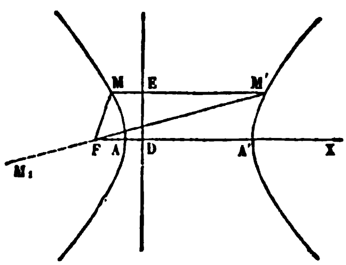



Fig. 158.

$$\rho \cos \omega - M'E = FD,$$

ce qui conduit à l'équation

$$(2) \qquad \rho = \frac{-p}{1 - e \cos \omega}.$$

Mais si l'on convient de porter les rayons vecteurs négatifs en sens contraire de la direction indiquée par l'angle $\omega$, il est facile de voir que l'équation (1) représente à elle seule les deux branches de l'hyperbole. Soit M' un point quelconque de la seconde branche, $\omega'$ l'angle correspondant A'FM', $\rho'$ le rayon vecteur FM'; en vertu de l'équation (2), on a $\rho' = \frac{-p}{1 - e\cos\omega'}$. Dans l'équation (1), donnons à l'angle $\omega$ la valeur $\omega' + \pi$, il viendra

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\omega'} = -\rho'$$

on obtient ainsi pour $\rho$ une valeur négative $-\rho'$. Mais la valeur $\omega + \pi$ attribuée à $\omega$ indique la direction $FM_1$ opposée à FM'; si $\rho$ avait une valeur positive, il faudrait la porter dans la direction $FM_1$ ; $\rho$ ayant une valeur négative $-\rho'$, on convient de porter la valeur absolue $\rho'$ en sens inverse, c'est-à-dire dans la direction FM', ce qui donne le point M'. Il résulte de là que l'équation (1) suffit pour représenter les deux branches de l'hyperbole, la première par les valeurs positives de $\rho$, la seconde par les valeurs négatives.

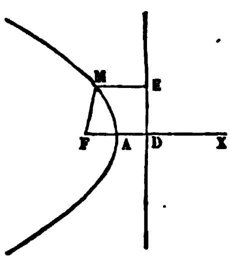


Fig. 159.

Le calcul effectué pour l'ellipse s'applique à la parabole (fig. 159); il suffit de faire $e = 1$. Il en résulte que l'équation (1) représente les trois courbes du second degré; la courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que l'excentricité $e$ est inférieure, égale ou supérieure à l'unité,

## EXERCICES

1° M et M' étant deux points d'une parabole, P le point de concours des tangentes en ces deux points et F le foyer, démontrer que l'on a

$$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{MF}} = \frac{\overline{PM'}^2}{\overline{M'F}}.$$

2° Dans une courbe au second degré, la perpendiculaire abaissée du foyer sur une corde et le diamètre conjugué de la corde se coupent sur la directrice.

3° Un demi-diamètre d'une ellipse ou d'une hyperbole est moyen proportionnel entre les droites qui joignent les foyers à l'extrémité du diamètre conjugué du premier.

4° Dans l'hyperbole équilatère, la distance d'un point quelconque de la courbe au centre est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point aux foyers.

5° Trouver dans le plan d'une ellipse un cercle tel que la longueur de la tangente menée au cercle de chacun des points de l'ellipse soit une fonction rationnelle, entière et du premier degré, des coordonnées de ce point.

Démontrer que la somme ou la différence des tangentes menées de chacun des points de l'ellipse à deux cercles jouissant de la propriété précédente est constante.

6° Lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à une parabole.

7° Par le foyer d'une parabole on mène une corde, et sur la corde comme diamètre on décrit un cercle, puis on mène au cercle des tangentes parallèles à une droite donnée; trouver le lieu des points de contact.

8° Un angle constant tourne autour du foyer d'une courbe du second degré; au point où les côtés de l'angle rencontrent la courbe, on mène des tangentes à cette courbe; trouver le lieu du point d'intersection de ces tangentes.

9° Étant donnée une ellipse, en un point quelconque M, on mène la tangente que l'on prolonge jusqu'aux points P et Q, où elle rencontre les tangentes aux extrémités du grand axe; trouver le lieu du point de rencontre N des droites F'P et FQ, et du point de rencontre N' des droites FP et F'Q. Démontrer que les deux points N et N' sont situés sur la normale au point M.

10° Étant donnée une courbe du second degré, une sécante tourne autour d'un point fixe P; on joint au foyer F les points M et M' où elle coupe la courbe; démontrer que le produit $\tang \frac{\text{PFM}}{2} \tang \frac{\text{PFM}'}{2}$ est constant.

11° L'angle sous lequel du foyer d'une courbe du second degré on voit la portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est constant.

12° Un triangle étant circonscrit à une parabole, le point de concours des hauteurs est sur la directrice, et le cercle circonscrit au triangle passe par le foyer.

13° Si, en un point quelconque M d'une ellipse, on mène une normale, la portion de cette normale comprise entre le point M et le petit axe a pour projection sur les rayons vecteurs menés du point M aux deux foyers une longueur égale au demi-grand axe.

14° La portion de la normale comprise entre le point M et le grand axe a pour projection sur les rayons vecteurs une longueur égale au paramètre de l'ellipse.

15° Deux courbes du second degré ont un foyer commun ; si l'on mène de ce foyer des rayons vecteurs aux extrémités d'un diamètre quelconque de l'une des courbes, la somme ou la différence des rapports de ces rayons aux rayons de la seconde courbe qui ont la même direction, est constante.

16° On prolonge les rayons vecteurs qui vont d'un point quelconque M de l'ellipse aux deux foyers F et F' jusqu'à leur rencontre en P et Q avec la courbe ; démontrer que la somme $\frac{MF}{FP}+\frac{MF'}{F'Q}$ est constante.

17° Une rose des vents formée de $m$ rayons tourne autour de son centre placé au foyer d'une ellipse ; démontrer que la somme des inverses des longueurs comptées sur chaque rayon depuis le foyer jusqu'au point où il coupe l'ellipse, est constante.

18° D'un point quelconque P situé dans le plan d'une ellipse, on mène des tangentes à cette ellipse ; on abaisse du point P une perpendiculaire PC sur la corde des contacts AB ; les droites PC et AB coupent le petit axe en D et E ; démontrer que le cercle décrit sur DE comme diamètre passe par les deux foyers.

19° Étant données deux ellipses homofocales, par un point P on mène à l'une d'elles des tangentes qui rencontrent la seconde, l'une en A et B, l'autre en C et D ; démontrer que l'on a

$$\frac{1}{PA}\pm\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}\pm\frac{1}{PD}.$$

20° On décrit un cercle sur le grand axe d'une ellipse comme diamètre, l'ordonnée d'un point quelconque M de l'ellipse rencontre le cercle en un point N; si l'on appelle $\omega$ l'angle que fait avec le grand axe le rayon vecteur FM, et $u$ l'angle que fait avec le grand axe le rayon ON du cercle, on a les relations

$$\rho=a(1-e\cos u)\quad,\quad \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{u}{2}.$$

En désignant par S l'aire du secteur elliptique AFM, on a aussi

$$S=\frac{ab}{2}(u-e\sin u).$$

21° Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales.

**22°** Un triangle étant inscrit dans une parabole, si l'on appelle R le rayon du cercle circonscrit au triangle, $c$, $c'$, $c''$ les cordes menées par le foyer parallèlement aux côtés, $\theta$, $\theta'$, $\theta''$ les angles que font les côtés avec l'axe, on a

$$\mathrm{R}\sin\theta'.\sin\theta'' = p, \quad 8p\mathrm{R}^2 = cc'c''.$$

**23°** Soient A le sommet, F le foyer d'une parabole, $(\rho, \omega)$, $\rho'$, $\omega'$) les coordonnées de deux points M et M' de la courbe, $\theta$ l'angle MFM', S l'aire du secteur AFM, A celle du secteur MFM', $l$ la longueur de la corde MM'; démontrer les formules suivantes employées en astronomie :

$$p = \frac{2\rho\rho'\sin^2\frac{\theta}{2}}{\rho + \rho' - 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}}, \quad 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{(\rho+\rho')^2 - l^2},$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{6}(p+\rho)\sqrt{p(2\rho - p)} = \frac{p^2}{12}\tan\!g\frac{\omega}{2}\left(1 + \tan\!g^2\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\sqrt{\rho\rho'}\;\sin\frac{\theta}{2}\left(\rho + \rho' + \sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\rho + \rho' + \sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{2p\left(\rho + \rho' - 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2p}}{6}\left[\left(\frac{\rho+\rho'+l}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\rho+\rho'-l}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

**24°** Considérons une ellipse rapportée à ses deux axes et un point extérieur P dont les coordonnées sont $\alpha$ et $\beta$; du point P on mène des tangentes à l'ellipse et l'on joint chacun des points de contact aux deux foyers. Démontrer : 1° que la distance $\delta$ du point P à l'une quelconque des quatre droites ainsi obtenues est égale à $\frac{1}{a}\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}$, $a$ et $b$ désignant les demi-axes de la courbe; 2° que la somme ou la différence des tangentes menées des deux foyers à la circonférence décrite de P comme centre avec $\delta$ pour rayon est égale à $2a$.

25° Calculer le paramètre et l'excentricité d'une courbe du second degré définie par son équation générale. (On se servira des formules du n° 143.)

# CHAPITRE VIII

## Sections coniques.

**285.** Théorème I. *La section d'un cylindre circulaire droit par un plan quelconque oblique à la base est une ellipse.*

Par l'axe OO′ du cylindre (fig. 160) menons un plan perpendiculaire au plan sécant; nous prendrons ce plan pour plan de la figure. Ce plan coupe le cylindre suivant deux génératrices opposées GG′, HH′, et le plan sécant suivant la droite AA′. Dans le plan de la figure, décrivons deux cercles O et O′ tangents à la droite AA′ et aux deux génératrices GG′, HH′ du cylindre; il suffit pour cela de mener les bissectrices des angles A et A′ jusqu'à leur rencontre en O et O′ avec l'axe du cylindre; si, du point O comme centre, avec le rayon du cylindre, on décrit un cercle, ce cercle touchera les génératrices en G et H, et la droite AA′ au point F; le cercle décrit du point O′ comme centre touchera de même les génératrices en G′ et H′, et la droite AA′ au point F′. Imaginons maintenant que la figure tourne autour de l'axe OO′; la génératrice GG′ engendrera la surface du cylindre, tandis que les deux cercles engendreront deux sphères inscrites dans le cylindre et le touchant intérieurement, la première suivant la circonférence de grand cercle GLH, la seconde suivant la circonférence de grand cercle G′L′H′. En outre, les deux sphères sont tangentes au plan proposé, la première au point F, la seconde au point F′. En effet, le plan de la figure et le plan proposé sont perpendiculaires entre eux; la droite OF, qui est tracée dans le premier plan perpendiculairement à leur intersection AA′, est perpendiculaire au second plan; le plan

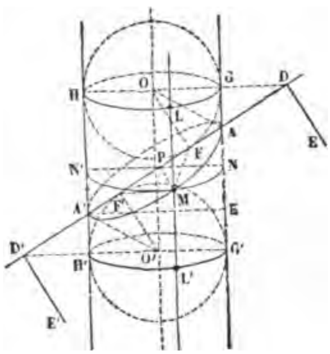



Fig. 160.

AMA′, étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon OF, est tangent à la sphère O au point F. On verrait de même que ce plan est tangent à la sphère O′ au point F′.

Cela posé, soit AMA′ la courbe suivant laquelle le plan sécant coupe le cylindre; nous allons démontrer que cette courbe est une ellipse ayant pour foyers les points F et F′. Joignons un point quelconque M de cette courbe aux deux points F et F′; par le point M passe une génératrice LL′ du cylindre; cette génératrice touche la sphère supérieure au point L, la sphère inférieure au point L′. Les deux droites MF, ML, tangentes menées du même point M à la sphère O, sont égales; de même, les deux droites MF′, ML′, tangentes menées du point M à la sphère inférieure, sont égales. Ainsi la somme des rayons vecteurs MF + MF′, est égale à ML + ML′, c'est-à-dire à la portion LL′ de la génératrice comprise entre les deux cercles de contact; longueur constante, car, dans le mouvement de révolution autour de OO′, la génératrice GG′ vient coïncider avec LL′. On voit par là que la somme des distances de chacun des points de la courbe aux deux points fixes F et F′ est constante et égale à GG′; on en conclut que la courbe est une ellipse ayant pour foyers F et F′.

Corollaire. Les droites DE, D′E′, intersections du plan sécant et des plans des cercles GH, GH′, suivant lesquels les sphères inscrites touchent le cylindre, sont les directrices de l'ellipse. En effet, par le point M menons un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre; ce plan coupera le cylindre suivant un cercle NMN′. La droite DE, intersection de deux plans perpendiculaires au plan de la figure, est elle-même perpendiculaire à ce plan et, par suite, à la droite AA′; il en est de même de la droite MP, intersection du plan du cercle et du plan sécant. Le rayon vecteur MF étant égal à ML ou à NG, et la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice DE étant égale à PD, le rapport des distances du point M au foyer et à la directrice est $\frac{NG}{PD}$; mais, à cause des parallèles PN, GD, ce rapport est égal à celui de AG à AD, ou de AK à AA′, rapport con-

stant, puisque ces deux dernières longueurs sont constantes.

Au foyer F correspond la directrice DE; au foyer F′ la directrice D′E′.

**266.** THÉORÈME II. *La section d'un cône circulaire droit par un plan est une courbe du second degré.*

Menons par l'axe du cône un plan perpendiculaire au plan sécant; ce plan coupe le cône suivant deux génératrices SG, SH, et le plan sécant suivant la droite AA′.

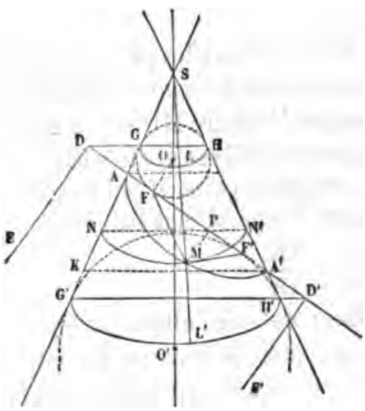



Fig. 161.

1° Considérons d'abord le cas où la droite AA′ rencontre les deux génératrices SG, SH d'un même côté du sommet S (fig. 161). Décrivons deux cercles O et O′ tangents à la droite AA′ et aux deux arêtes SG′, SH′. Si l'on fait tourner la figure autour de l'axe SO′, pendant que l'arête SG′ engendre le cône, les deux cercles engendrent deux sphères tangentes au cône suivant les cercles de contact GH, G′H′. Le plan sécant est tangent à l'une des sphères au point F, comme perpendiculaire à l'extrémité du rayon OF; il est aussi tangent à l'autre sphère au point F′

Cela posé, soit M un point quelconque de la courbe d'intersection; la génératrice SM qui passe en ce point touche les sphères aux points L et L′; menons les droites MF, MF′. Les droites MF et ML sont égales comme tangentes menées du même point M à la sphère O; les droites MF′ et ML′ sont égales comme tangentes menées du point M à la sphère O′; on a donc

$$MF + MF' = ML + ML' = LL'$$

Or, la portion LL′ de la génératrice comprise entre les cercles parallèles GH, G′H′ est constante et égale à GG′; donc la somme des distances de chacun des points de la courbe aux deux

points fixes F et F′ est constante, et, par consequent, cette courbe est une ellipse dont les points F et F′ sont les foyers.

La somme constante GG′ est égale au grand axe AA′. Si par le point A′ On mène A′K parallèle à GH, on détermine sur la génératrice une portion AK égale à la distance focale FF′; car, si des longueurs égales GG′, AA′ on retranche, d'une part AG et KG′, d'autre part les longueurs égales AF et A′F′, il reste deux longueurs égales AK, FF′.

Considérons les droites DE, D′E′, suivant lesquelles le plan sécant est coupé par les plans des cercles de contact GH, G′H′. Si du point M on abaisse une perpendiculaire MP sur le grand axe, la distance du point M à la droite DE est égale à PD. Soit NMN′ le cercle parallèle qui passe par le point M; la longueur MF ou ML est égale à GN. A cause des parallèles DG, PN, on a

$$\frac{GN}{DP}=\frac{AG}{AD}=\frac{AK}{AA'}.$$

Ainsi, les distances de chacun des points de l'ellipse au foyer F et à la droite DE sont entre elles comme la distance des foyers au grand axe. Cette droite DE est une *directrice* de l'ellipse; la droite D′E′ est la seconde directrice.

2° Lorsque la droite AA′ rencontre les deux génératrices SG et SH de part et d'autre du sommet (fig. 162), on a

$$MF'-MF=ML'-ML=LL'=GG'.$$

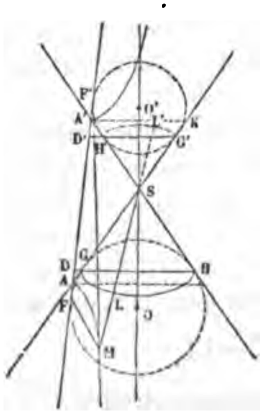


Fig. 162.

La différence des distances de chacun des points de la courbe aux deux points F et F′ est constante; cette courbe est une hyperbole qui a pour foyers les deux points F et F′. Les droites d'intersection du plan sécant et des plans de contact sont de même les directrices de l'hyperbole.

3° Supposons enfin que la droite AA′ soit parallèle à l'arête SH (fig. 163). Décrivons une sphère tangente au cône suivant le cercle GH et au plan sécant en F. Soit DE l'intersection du plan sé-

cant et du plan du cercle de contact GH. Par le point M de la section menons la droite ME perpendiculaire à DE, et la génératrice SM, qui rencontre en L la courbe de contact; la droite ME sera parallèle à AA′ et à SH; donc les trois droites ME, SM, SH sont dans un même plan, et les trois points H, L, E sur la droite d'intersection du plan de contact et du plan précédent. Les deux triangles MLE, HSL sont semblables; puisque SL est égale à SH, on a aussi ML = ME; mais ML = MF, comme tangentes menées du point M à la sphère; par conséquent, MF = ME. Ainsi la courbe est une parabole dont le point F est le foyer et DE la directrice.

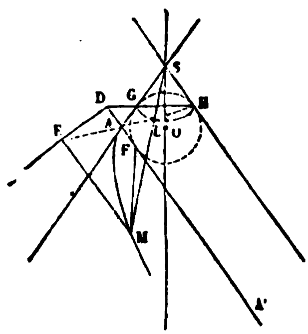


Fig. 163.

Cette méthode si élégante, pour trouver les propriétés des foyers et des directrices dans les courbes du second degré, est due à DANDELIN.

**267.** *Placer une courbe du second degré sur un cône donné.* — 1° La courbe est une ellipse. Dans le triangle AA′K (fig. 160), on connaît deux côtés AA′, AK, qui sont le grand axe et la distance des foyers, ainsi que l'angle opposé à AA′ qui est le complément de la moitié de l'angle au sommet du cône. Comme le grand axe surpasse la distance focale, on peut toujours construire ce triangle; la perpendiculaire sur le milieu de A′K détermine le point S, et par suite tout ce qui fixe la position du plan sécant.

2° La courbe est une hyperbole. Dans le triangle AA′K (fig. 162), on connaît également deux côtés, ainsi que l'angle opposé à l'un d'eux; mais comme le côté opposé à l'angle donné est le plus petit, la construction du triangle n'est pas toujours possible. Il faut que l'on ait $a > c \cos\gamma$ ($2a$ étant l'axe transverse, $2c$ la distance des foyers de l'hyperbole, $2\gamma$ l'angle au sommet du cône); d'où $\cos\gamma < \frac{a}{c}$ et, par suite, $\cos\gamma < \cos\theta$,

en appelant $\theta$ l'angle de l'asymptote avec le grand axe; donc l'angle des asymptotes doit être plus petit que l'angle du cône.

3° La courbe donnée est une parabole. En joignant le centre O de la sphère au point G, on forme un triangle rectangle OAG (fig. 163), dans lequel on connaît le côté AG qui est le demi-paramètre de la parabole, et l'angle OAG complémentaire de $\theta$. Après avoir construit ce triangle, on élèvera OS perpendiculaire sur OA jusqu'à la rencontre de AG; une fois connue la distance SA, le problème est résolu.

En résumé, sur un cône donné on peut placer toutes les ellipses, toutes les paraboles, et toutes les hyperboles dans lesquelles l'angle des asymptotes est plus petit que l'angle du cône

**268.** Remarque. Supposons que les sphères employées précédemment soient toujours inscrites dans le cône, mais coupent le plan sécant; il suffit pour cela que les cercles générateurs soient tangents aux deux lignes SA, SA′ et coupent AA′; les intersections des sphères par le plan sécant sont des cercles, et l'on verra que, dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole, la somme ou la différence des tangentes menées à ces cercles d'un point quelconque de la courbe est constante; que, dans le cas de la parabole, la tangente menée au cercle d'un point quelconque de la courbe est égale à la distance de ce point à une certaine droite.

Les géomètres grecs connaissaient les courbes du second degré comme sections d'un cône à base circulaire par un plan. Apollonius (247 ans avant J.-C.) a fait sur les sections coniques un traité en huit livres, dans lequel il rapporte ce qui a été trouvé avant lui, et expose ses propres découvertes sur cette matière. Le traité d'Apollonius contient les principales propriétés des sections coniques; nous citerons les deux théorèmes sur les diamètres conjugués (nos 162, 163 et 191), les propriétés des asymptotes de l'hyperbole, les propriétés élémentaires des foyers.

# CHAPITRE IX

## Détermination des sections coniques.

**269.** L'équation générale du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

contient six coefficients; mais, comme on peut diviser tous les termes par l'un des coefficients, pourvu que ce coefficient soit différent de zéro, l'équation ne renferme que cinq paramètres arbitraires, savoir les rapports de cinq coefficients au sixième. Pour déterminer une courbe du second degré, il faut donner les valeurs des cinq paramètres, ou bien cinq relations entre ces cinq paramètres; mais, dans ce cas, il est nécessaire d'examiner si les cinq équations de condition admettent un système de solutions réelles, et si, en outre, l'équation du second degré correspondante représente bien une courbe; autant les cinq équations de condition admettront de systèmes de solutions réelles jouissant de cette propriété, autant il y aura de courbes du second degré satisfaisant aux conditions proposées.

En général, les relations entre les paramètres proviennent de conditions géométriques auxquelles doit satisfaire la courbe. Ainsi, on peut assujettir la courbe à passer par des points donnés, à être tangente à des droites données, etc. On exprimera que la courbe passe par un point donné, en écrivant que les coordonnées du point vérifient l'équation de la courbe, ce qui donne une relation du premier degré entre les coefficients. On exprimera que la courbe est tangente à une droite donnée, en écrivant que l'équation qui fournit les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite a deux racines égales, ce qui donne une relation du second degré entre les coefficients. Une condition géométrique qui se traduit par une relation entre les coefficients est regardée comme une condition simple. Une condition géométrique qui se traduirait par deux relations serait regardée comme double. Si, par exemple, on assujettissait la courbe à toucher une droite donnée en un

point donné, l'équation qui donnerait les abscisses des points d'intersection de la droite et de la courbe devrait admettre deux racines égales à une quantité donnée; il en résulterait deux relations du premier degré entre les coefficients; la condition géométrique énoncée devrait donc compter comme deux conditions simples. D'après cela, on dira qu'il faut *cinq* conditions géométriques pour déterminer une courbe du second degré.

Si l'on veut que la courbe soit une parabole, les coefficients devant vérifier la relation $AC - B^2 = 0$, l'équation ne contiendra plus que quatre paramètres arbitraires et la parabole sera définie par quatre conditions.

De même, si l'on veut que la courbe soit une hyperbole équilatère, il faudra que les deux droites représentées par l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$, droites parallèles aux asymptotes (n° 130), soient perpendiculaires entre elles, ce qui donne une relation entre les coefficients; lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, cette relation est $A + C = 0$. Quatre conditions suffisent donc pour déterminer une hyperbole équilatère.

Avant d'aller plus loin, il est bon de généraliser les définitions, afin d'éviter les restrictions qu'apporteraient les solutions imaginaires dans les énoncés des théorèmes.

## POINTS ET DROITES IMAGINAIRES.

**270.** Un système de valeurs réelles de $x$ et de $y$ détermine un point du plan; par analogie, nous appellerons *point imaginaire* un système de valeurs imaginaires attribuées à $x$ et $y$. Si deux systèmes de valeurs imaginaires sont de la forme $x = a + bi$, $y = c + di$ et $x = a - bi$, $y = c - di$, nous dirons que les deux points imaginaires sont conjugués.

Une équation du premier degré $Ax + By + C = 0$, à coefficients réels, est vérifiée par les coordonnées d'une infinité de points réels, dont le lieu est une ligne droite; mais elle est vérifiée aussi par une infinité de systèmes de valeurs imaginaires attribuées à $x$ et à $y$; car, si l'on attribue à $x$ une valeur imaginaire quelconque, on en déduira pour $y$ une valeur

imaginaire correspondante; si l'on donne à $x$ deux valeurs imaginaires conjuguées, les deux valeurs correspondantes de $y$ seront aussi conjuguées.

Par analogie, nous appellerons *droite imaginaire* l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré à coefficients imaginaires. Il est à remarquer qu'une droite imaginaire passe par un point réel. Soit, en effet,

$$(A'+A''i)x+(B'+B''i)y+(C'+C''i)=0,$$

ou

$$(A'x+B'y+C')+i(A''x+B''y+C'')=0,$$

une droite imaginaire. Cette équation sera vérifiée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites réelles

$$A'x+B'y+C'=0 \quad , \quad A''x+B''y+C''=0.$$

L'équation générale du premier degré, renfermant trois coefficients et par suite deux paramètres arbitraires, deux points, réels ou imaginaires, détermineront la droite. Si l'on appelle $x'$, $y'$, $x''$, $y''$ les coordonnées des deux points donnés, la droite qui passe par ces deux points aura pour équation

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}.$$

La droite qui passe par deux points imaginaires conjugués est réelle. Soient, en effet, $x'=a+bi$, $y'=c+di$, $x''=a-bi$, $y''=c-di$; l'équation de la droite se réduit à

$$\frac{x-a}{b}=\frac{y-c}{d}.$$

Le point qui a pour coordonnées

$$\frac{x'+x''}{2} \quad , \quad \frac{y'+y''}{2},$$

sera dit le milieu de la droite qui joint les deux points donnés; lorsque les deux points sont imaginaires conjugués, le milieu est un point réel.

Une équation algébrique $f(x, y)=0$, à coefficients réels, est vérifiée en général par les coordonnées d'une infinité de points réels, formant une courbe; elle est vérifiée aussi par les coordonnées d'une infinité de points imaginaires, conjugués deux à deux. Si les coefficients sont imaginaires, l'équation admet toujours une infinité de solutions imaginaires, mais seulement

un nombre limité de solutions réelles; l'ensemble de ces solutions formera ce que nous appellerons une courbe imaginaire.

Deux équations, l'une du premier degré, l'autre du second degré en $x$ et $y$, admettent deux solutions. On dira donc qu'une droite rencontre une courbe du second degré en deux points, réels ou imaginaires. Une droite réelle rencontre une courbe du second degré réelle en deux points, qui sont réels ou imaginaires conjugués. Ceci permet d'expliquer un fait qui s'est présenté déjà plusieurs fois; quand on cherche, par exemple, le lieu des milieux d'une série de cordes parallèles dans l'ellipse, on trouve par le calcul une droite indéfinie, et cependant le lieu, tel qu'il est défini géométriquement, ne se compose que de la partie intérieure à l'ellipse; les sécantes extérieures rencontrent l'ellipse en deux points imaginaires conjugués, le milieu de la corde est encore un point réel, et le diamètre se prolonge ainsi en dehors de la courbe.

### INTERSECTION DE DEUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

**271.** Nous remarquerons d'abord que, si les deux courbes coïncident, c'est-à-dire si les deux équations sont vérifiées par les mêmes systèmes de valeurs des variables $x$ et $y$, les coefficients sont proportionnels. En effet, les équations

$$(1)\qquad Cy^2 + 2(Bx + E)y + (Ax^2 + 2Dx + F) = 0,$$

$$(2)\qquad C'y^2 + 2(B'x + E')y + (A'x^2 + 2D'x + F') = 0,$$

admettant les mêmes racines pour une même valeur de $x$, on a

$$\frac{C}{C'} = \frac{Bx + E}{B'x + E'} = \frac{A'x^2 + 2D'x + F'}{Ax^2 + 2Dx + F},$$

et, comme ceci doit avoir lieu quelle que soit $x$, on en conclut

$$\frac{C}{C'} = \frac{B}{B'} = \frac{E}{E'} = \frac{A}{A'} = \frac{D}{D'} = \frac{F}{F'}.$$

La réciproque est vraie : lorsque les coefficients sont proportionnels, les deux équations sont identiques, et les deux courbes coïncident.

Nous supposerons, dans ce qui suit, les courbes différentes,

c'est-à-dire les coefficients non proportionnels. Considérons d'abord le cas où les deux coefficients C et C' sont différents de zéro; si l'on retranche les équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par C' et C, on élimine $y^2$ et l'on obtient une équation de la forme

$$(3)\qquad 2(B_1x + E_1)y + (A_1x^2 + 2D_1x + F_1) = 0,$$

qui, avec l'équation (1), forme un système équivalent au système des deux équations proposées (1) et (2). Les cinq coefficients $B_1$, $E_1$, $A_1$, $D_1$, $F_1$ ne peuvent être nuls à la fois; car si cela avait lieu, les coefficients des deux équations (1) et (2) seraient proportionnels. Si les deux coefficients $B_1$ et $E_1$ étaient nuls, l'équation (3) deviendrait $A_1x^2 + 2D_1x + F_1 = 0$; elle donnerait pour $x$ deux valeurs; à chacune d'elles, d'après l'équation (1), correspondraient deux valeurs de $y$; en tout quatre solutions. Supposons que les deux coefficients $B_1$ et $E_1$ ne soient pas nuls à la fois; en général, la valeur $x = -\frac{E_1}{B_1}$, qui annule le coefficient de $y$ dans l'équation (3), n'annule pas le polynôme $A_1x^2 + 2D_1x + F_1$; dans ce cas, la quantité $B_1x + E_1$ étant différente de zéro pour toutes les solutions de l'équation (3), on peut mettre cette équation sous la forme

$$(4)\qquad y = -\frac{A_1x^2 + 2D_1x + F_1}{2(B_1x + E_1)};$$

en portant cette valeur de $y$ dans l'équation (1), on obtient une équation du quatrième degré

$$(5)\qquad a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

qui, jointe à l'équation (4), forme un système équivalent au système des deux équations (1) et (3), et, par conséquent, au système proposé. Les cinq coefficients de l'équation (5) ne peuvent être nuls à la fois; car, si cela avait lieu, l'équation (5) devenant une identité, les deux équations proposées seraient vérifiées par tous les systèmes de valeurs de $x$ et $y$ qui satisfont à l'équation (4) ou à l'équation (3); les deux courbes coïncideraient avec la courbe représentée par l'équation (3) et, par conséquent, auraient leurs coefficients proportionnels. L'équation (5) donne quatre valeurs pour $x$; à chacune d'elles correspond, d'après l'équation (4), une valeur de $y$, ce qui fait *quatre* solutions du système proposé.

Si la valeur $x = -\frac{E_1}{B_1}$ annulait le polynôme $A_1x^2 + 2D_1x + F_1$,

l'équation (3) se mettrait sous la forme

$$(B_1x + E_1)(y + mx + n) = 0,$$

et se décomposerait en deux équations distinctes, $B_1x + E_1 = 0$, $y + mx + n = 0$; la première donne la valeur $x = -\frac{E_1}{B_1}$, à laquelle, d'après l'équation (1), correspondent deux valeurs de $y$; de la seconde on déduit $y = -mx - n$, et, remplaçant $y$ par cette valeur dans l'équation (1), on obtient une équation du second degré en $x$, qui fournit deux nouvelles solutions; en tout quatre solutions. Cependant il peut arriver que cette dernière équation du second degré en $x$ se réduise à une identité; dans ce cas, les coordonnées de tous les points de la droite $y + mx + n = 0$ vérifient les deux équations proposées, qui représentent alors des couples de droites, dont deux coïncident.

Si un seul des coefficients C ou C′ était nul, l'une des équations proposées serait de la forme (3), et on répéterait ce qui vient d'être dit.

Considérons maintenant le cas où les deux coefficients C et C′ sont nuls à la fois. Si la valeur $x = -\frac{E'}{B'}$, qui annule le coefficient de $y$ dans l'équation (2), n'annule pas le polynôme $A'x^2 + 2D'x + F'$, on déduira de cette équation

$$y = -\frac{A'x^2 + 2D'x + F'}{2(B'x + E')},$$

et, substituant dans l'équation (1), on arrivera à une équation du troisième degré en $x$, ce qui donne *trois* solutions. Si la valeur $x = -\frac{E'}{B'}$ annule le polynôme $A'x^2 + 2D'x + F'$, l'équation (2) se met sous la forme

$$(B'x + E')(y + mx + n) = 0,$$

et représente deux droites $B'x + E' = 0$, $y + mx + n = 0$, qui coupent la courbe (1), la première en un point, la seconde en deux points. Il peut arriver que l'une de ces droites appartienne à la ligne (1); dans ce cas, les équations proposées représentent des couples de droites, dont deux coïncident.

On conclut de ce qui précède, que *deux lignes du second degré*

*ne peuvent avoir plus de quatre points communs, à moins que ces lignes ne soient des couples de droites, dont deux coïncident.* Lorsque les deux équations proposées ont leurs coefficients réels, les quatre points communs sont réels ou imaginaires conjugués.

**272.** Il est facile de former l'équation (5) qui, dans le cas général, donne les abscisses des quatre points communs à deux courbes du second degré. Soient $A_0y^2+A_1y+A_2=0$, $A'_0y^2+A'_1y+A'_2=0$, les deux équations proposées, dans lesquelles $A_0$ et $A'_0$ désignent des constantes $A_1$ et $A'_1$ des polynômes du premier degré en $x$, $A_2$ et $A'_2$ des polynômes du second degré. En retranchant ces équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par $A'_0$ et $A_0$, on a

$$(A_0A'_1-A'_0A_1)y+A_0A'_2-A'_0A_2=0.$$

En multipliant par $A_2$ et $A'_2$, retranchant et supprimant le facteur $y$, on a de même

$$(A_0A'_2-A'_0A_2)y+(A_1A'_2-A'_1A_2)=0.$$

L'élimination de $y$ entre ces deux dernières équations conduit à l'équation du quatrième degré

$$(A_0A'_1-A'_0A_1)(A_1A'_2-A'_1A_2)-(A_0A'_2-A'_0A_2)^2=0.$$

**273.** Corollaire. Une équation du second degré, à coefficients imaginaires, ne peut admettre plus de quatre solutions réelles. En effet, le premier membre de l'équation est de la forme $S+iS_1$, $S$ et $S_1$ désignant des polynômes réels du second degré; si l'équation est vérifiée par des valeurs réelles attribuées à $x$ et à $y$, on aura séparément $S=0$, $S_1=0$; les points réels du lieu sont donc les points communs aux deux courbes réelles $S=0$, $S_1=0$, et ces points sont en général au nombre de quatre.

Il n'y a exception, d'après le numéro précédent, que lorsque ces lignes sont des couples de droites dont deux coïncident; dans ce cas, l'équation du second degré représente elle-même deux droites, dont une est réelle. Enfin, si les deux lignes $S=0$, $S_1=0$ coïncidaient, le premier membre de l'équation proposée serait divisible par un facteur constant imaginaire, et les coefficients de l'équation deviendraient réels.

**274. Lemme.** *Tous système de* n *équations du premier degré homogènes et à* n + 1 *inconnues, est vérifié par une infinité de système de valeurs des inconnues, dont l'une au moins est différente de zéro.*

Considérons d'abord une équation à deux inconnues.

$$ax + by = 0.$$

Si les deux coefficients $a$ et $b$ étaient nuls, l'équation serait vérifiée par des valeurs arbitraires de $x$ et $y$. Supposons que l'un des coefficients, par exemple $b$, ne soit pas nul ; l'équation pouvant être mise sous la forme $y = -\frac{a}{b}x$, on attribuera à $x$ une valeur arbitraire ; à chaque valeur de $x$ correspond une valeur de $y$. Ainsi l'équation proposée est vérifiée par une infinité de systèmes de valeurs de $x$ et $y$, dont l'une au moins est différente de zéro.

Considérons maintenant deux équations à trois inconnues

$$ax + by + cz = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z = 0.$$

Si les six coefficients étaient nuls à la fois, les équations seraient vérifiées par des valeurs tout à fait arbitraires de $x, y, z$. Supposons que l'un au moins des coefficients, par exemple $c$, ne soit pas nul ; on pourra remplacer le système des deux équations proposées par le système équivalent

$$z = -\frac{ax + by}{c},$$

$$(ac' - ca')x + (bc' - cb')y = 0.$$

D'après ce que nous avons dit, la seconde équation est vérifiée par une infinité de systèmes de valeurs de $x$ et $y$, dont l'une au moins est différente de zéro ; à chacun d'eux correspond une valeur de $z$ donnée par la première équation. Ainsi, le système des deux équations proposées est vérifié par une infinité de systèmes de valeurs de $x, y, z$, dont l'une au moins est différente de zéro.

Le même raisonnement peut être continué indéfiniment.

Soient trois équations à quatre inconnues

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &= 0, \\ a'x + b'y + c'z + d't &= 0, \\ a''x + b''y + c''z + d''t &= 0. \end{aligned}$$

Si les douze coefficients étaient nuls à la fois, les équations seraient vérifiées par des valeurs tout à fait arbitraires de $x, y, z, t$. Supposons que l'un au moins des coefficients, par exemple $d$, ne soit pas nul; on pourra remplacer le système des équations proposées par le système équivalent

$$t = -\frac{ax + by + cz}{d},$$

$$(ad' - da')x + (bd' - db')y + (cd' - dc')z = 0,$$
$$(ad'' - da'')x + (bd'' - db'')y + (cd'' - dc'')z = 0.$$

En vertu de ce qui précède, le système des deux dernières équations est vérifié par une infinité de systèmes de valeurs de $x, y, z$, dont l'une au moins est différente de zéro ; à chacun d'eux correspond une valeur de $t$ donnée par la première équation.

**275.** THÉORÈME I. *Par cinq points donnés, dont trois ne sont pas en ligne droite, on peut faire passer une courbe du second degré, et on n'en peut faire passer qu'une.*

Appelons $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$, $(x_5, y_5)$ les coordonnées des cinq points donnés. Pour qu'une ligne du second degré

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

passe par ces cinq points, il est nécessaire et il suffit que les cinq équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F &= 0, \\ Ax_2^2 + 2Bx_2y_2 + Cy_2^2 + 2Dx_2 + 2Ey_2 + F &= 0, \\ Ax_3^2 + 2Bx_3y_3 + Cy_3^2 + 2Dx_3 + 2Ey_3 + F &= 0, \\ Ax_4^2 + 2Bx_4y_4 + Cy_4^2 + 2Dx_4 + 2Ey_4 + F &= 0, \\ Ax_5^2 + 2Bx_5y_5 + Cy_5^2 + 2Dx_5 + 2Ey_5 + F &= 0 \end{aligned} \right.$$

soient satisfaites. Nous avons ainsi cinq équations, homogènes et du premier degré, entre les six inconnues A, B, C, D, E, F. Il résulte du lemme précédent que ces équations sont véri-

fiées par une infinité de systèmes de valeurs des inconnues, dont l'une au moins est différente de zéro. Nous remarquons que dans aucune de ces solutions, les cinq premières inconnues ne sont nulles à la fois; car alors, en vertu de l'une quelconque des équations (2), on aurait aussi $F=0$. Nous remarquons en outre que, si les cinq points donnés ne sont pas en ligne droite, les trois premières inconnues $A, B, C$ ne peuvent être nulles à la fois; car l'équation (1) se réduirait au premier degré et représenterait une ligne droite passant par les cinq points. En attribuant aux six coefficients les valeurs qui constituent l'une des solutions précédentes, on obtient une ligne du second degré passant par les cinq points donnés. Ainsi, par les cinq points donnés on peut faire passer au moins une ligne du second degré.

Je dis maintenant que, si parmi les cinq points donnés il n'y en a pas trois en ligne droite, on ne peut faire passer par ces cinq points qu'une seule ligne du second degré; car, s'il y en avait deux, ces deux lignes auraient cinq points communs; mais nous avons vu (n° 271) que deux lignes du second degré, qui ne se composent pas de lignes droites, ne peuvent avoir plus de quatre points communs.

Les diverses solutions du système des équations (2), devant donner la même courbe du second degré, sont formées de quantités proportionnelles. Après avoir reconnu que l'une des inconnues est différente de zéro, on cherchera les rapports des cinq autres à celle-là, et on aura à résoudre un système de cinq équations du premier degré à cinq inconnues.

Les mêmes conclusions s'appliquent au cas où trois des points donnés, et trois seulement, sont en ligne droite. Le lieu du second degré est formé de cette droite et de celle qui passe par les deux autres points.

Lorsque quatre des points donnés sont en ligne droite, il y a indétermination. Le lieu du second degré se compose de cette droite, et d'une droite quelconque passant par le cinquième point.

**276.** Remarque. On peut, à l'aide d'un déterminant, former l'équation de la courbe du second degré qui passe par les cinq

points donnés. Considérons, en effet, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}$$

C'est un polynôme entier du second degré par rapport aux deux variables $x$ et $y$. Il s'annule quand on y remplace $x$ et $y$ par $x_1$ et $y_1$; car alors les éléments de la première ligne horizontale deviennent égaux à ceux de la seconde. Il en est de même quand on remplace $x$ et $y$ par $x_2$ et $y_2$, et ainsi de suite. On en conclut que l'équation $\Delta = 0$ représente une courbe du second degré passant par les cinq points donnés.

**277.** Corollaire I. Étant donné un quadrilatère $abcd$ (fig. 164), désignons par $\alpha = 0, \beta = 0$ les équations de deux côtés opposés $ab, cd$, par $\gamma = 0, \delta = 0$ celles de deux autres côtés opposés $bc, ad$; l'équation

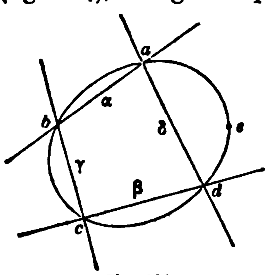


Fig. 164.

$$(3) \qquad A\alpha\beta + B\gamma\delta = 0,$$

dans laquelle les coefficients A et B sont arbitraires, représente toutes les lignes du second degré qui passent par les quatre points $a, b, c, d$. Les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ désignant des polynômes du premier degré en $x$ et $y$, l'équation est du second degré; les coordonnées du point $a$, intersection des droites $ab$ et $ad$, annulent les deux polynômes $\alpha$ et $\delta$ et par conséquent le premier membre de l'équation (3); il en est de même des trois autres points $b, c, d$. Ainsi, quelles que soient les valeurs des coefficients A et B, la courbe représentée par l'équation (3) passe par les quatre points $a, b, c, d$. Cette équation représente toutes les courbes du second degré qui passent par les quatre points; car un cinquième point $e$ détermine la courbe, et on peut attribuer au rapport des coefficients une valeur telle que la courbe passe par ce cinquième point pris à volonté dans le plan.

L'équation (3) a une signification géométrique très-simple : les polynômes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ étant proportionnels aux distances d'un point quelconque $(x,y)$ aux côtés du quadrilatère, elle indique que *le produit des distances d'un point quelconque de la courbe à deux côtés opposés* ab, cd *du quadrilatère inscrit est au produit des distances de ce même point aux deux côtés opposés* bc, ad *dans un rapport constant.* La valeur de ce rapport détermine la courbe.

En général, si l'on désigne par $S=0$, $S_1=0$ les équations de deux courbes du second degré, l'équation $S+kS_1=0$, dans laquelle $k$ est un paramètre arbitraire, représente toutes les courbes du second degré passant par les quatre points communs aux deux premières.

**278.** Corollaire II. Proposons-nous de déterminer une parabole passant par quatre points réels donnés $a$, $b$, $c$, $d$. Si l'on joint ces points deux à deux par deux droites $ab$, $cd$ qui se coupent et que l'on prenne ces droites pour axes des coordonnées, l'équation générale des courbes du second degré qui passent par les quatre points est

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-1\right)\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{d}-1\right)-kxy=0; \tag{4}$$

$a$ et $b$ étant les abscisses des points $a$ et $b$, $c$ et $d$ les ordonnées des points $c$ et $d$. Pour que le lieu soit une parabole, il faut que le paramètre $k$ satisfasse à la condition

$$\left(k-\frac{1}{ad}-\frac{1}{bc}\right)^2-\frac{4}{abcd}=0. \tag{5}$$

Lorsque le produit $abcd$ est négatif, on trouve pour $k$ deux valeurs imaginaires, et il est impossible de faire passer une parabole réelle par les quatre points. Lorsque le produit est positif, ce qui revient à dire que l'on peut former un quadrilatère convexe ayant pour sommets les quatre points, on obtient pour $k$ deux valeurs réelles différentes, et, par conséquent, deux lignes réelles du genre parabole passant par les quatre points. Si l'on pouvait réunir les points deux à deux par des droites parallèles, chaque couple de droites parallèles constituerait une solution.

**279.** Corollaire III. Il est facile de former l'équation générale des courbes du second degré qui passent par trois points donnés $a$, $b$, $c$. Si l'on désigne par $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des trois droites $bc$, $ca$, $ab$, l'équation

$$A\beta\gamma + B\gamma\alpha + C\alpha\beta = 0 \tag{6}$$

représente une courbe du second degré passant par les trois points donnés. Cette équation renferme deux paramètres arbitraires, les rapports de deux des coefficients au troisième, et l'on pourra disposer des deux paramètres de manière à faire passer la courbe par deux autres points pris à volonté dans le plan.

**280.** Théorème II. *On peut mener une courbe du second degré tangente à deux droites données, en deux points donnés, et passant par un autre point donné, et on n'en peut mener qu'une.*

Pour qu'une courbe du second degré

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{7}$$

soit tangente à une droite

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0, \tag{8}$$

au point $(x_1, y_1)$, il est nécessaire et il suffit que la courbe passe par le point $(x_1, y_1)$ et que le coefficient angulaire de la tangente en ce point soit égal à celui de la droite, ce qui donne deux équations

$$f(x_1, y_1) = 0 \quad , \quad bf'_{x_1}(x_1, y_1) - af'_{y_1}(x_1, y_1) = 0, \tag{9}$$

homogènes et du premier degré, par rapport aux coefficients A, B, C, D, E, F.

Nous aurons ainsi cinq équations, homogènes et du premier degré, entre ces six coefficients. Nous avons vu qu'un pareil système d'équations admet une infinité de solutions dans lesquelles l'une au moins des inconnues, autre que F, est différente de zéro ; à l'une de ces solutions correspond une courbe du second degré satisfaisant aux conditions énoncées.

Il n'existe qu'une courbe du second degré satisfaisant à ces conditions ; car, s'il y en avait deux, l'équation du quatrième degré à laquelle on arrive quand on cherche leurs points

communs, aurait deux racines doubles et une racine simple, ce qui est impossible.

**281.** Corollaire I. L'équation

$$(10) \qquad \alpha\beta - k\gamma^2 = 0,$$

dans laquelle $k$ est un paramètre arbitraire, représente toutes les courbes du second degré tangentes aux deux droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, aux points où elles sont coupées par la droite $\gamma = 0$ (fig. 165). La courbe est tangente à la première droite ; car si l'on fait $\alpha = 0$ dans l'équation de la courbe, on a $\gamma^2 = 0$, et, par conséquent, les deux points d'intersection de la droite et de la courbe coïncident. Elle est de même tangente à la seconde droite, et les deux points de contact sont situés sur la droite $\gamma = 0$. L'équation (10) représente toutes les courbes jouissant de ces propriétés; car on peut déterminer le paramètre $k$ de manière que la courbe passe par un autre point situé à volonté dans le plan.

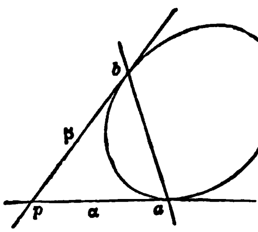


Fig. 165.

Cette équation signifie que *le produit des distances d'un point quelconque de la courbe à deux tangentes est au carré de la distance de ce point à la corde des contacts dans un rapport constant.*

En général, si l'on désigne par $S = 0$ l'équation d'une courbe du second degré, l'équation $S - k\gamma^2 = 0$ représentera toutes les courbes du second degré tangentes à la première en deux points situés sur la droite $\gamma = 0$.

Corollaire II. On peut déterminer le paramètre $k$ par la condition que la courbe soit une parabole. Si l'on prend les deux tangentes pour axes des coordonnées, l'équation (10) devient

$$(11) \qquad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 - 2kxy = 0.$$

Pour que la courbe soit une parabole, il faut que la condition $\left(k - \frac{1}{ab}\right)^2 - \frac{1}{a^2b^2} = 0$ soit vérifiée; ce qui donne les deux so-

lutions $k = 0$, $k = \frac{2}{ab}$ ; à la première correspond la droite $ab$; à la seconde une parabole dont l'équation peut être mise sous la forme $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} - 1 = 0$.

**282.** Application. Comme application, formons l'équation du second degré qui représente l'ensemble des deux tangentes menées d'un point $p$ de coordonnées $x_1, y_1$ (fig. 165) à une conique ayant pour équation

$$f(x,y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

L'équation de la corde des contacts $ab$ est comme nous l'avons vu n° 125

$$(a) \quad \gamma \equiv (Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0,$$

dont nous désignons le premier membre par $\gamma$. Les deux tangentes $pa$ et $pb$ constituent une conique bitangente à la conique donnée $f(x,y) = 0$ aux points situés sur la droite $\gamma = 0$ : elles sont donc représentées par une équation de la forme

$$(b) \qquad f(x,y) - k\gamma^2 = 0$$

où $k$ désigne un coefficient constant qui reste à déterminer. Pour cela il suffit d'exprimer que la courbe ($b$) passe par un point pris sur la conique formée par les deux tangentes $pa$ et $pb$; exprimons qu'elle passe par le point $p$ de coordonnées $(x_1, y_1)$, c'est-à-dire que l'équation ($b$) est satisfaite par $x = x_1, y = y_1$. Si dans $\gamma$ on fait $x = x_1, y = y_1$, $\gamma$ se réduit à $f(x_1, y_1)$; on a donc la condition

$$f(x_1, y_1) - kf^2(x_1, y_1) = 0,$$

qui donne pour $k$ la valeur $\frac{1}{f(x_1, y_1)}$, et l'équation demandée est enfin

$$(c) \qquad f(x,y)\, f(x_1, y_1) - \gamma^2 = 0,$$

où $\gamma$ doit être remplacé par l'expression ($a$). Cette équation se nomme l'*équation quadratique des tangentes issues du point* $x_1, y_1$.

**282 *bis*.** Bornons-nous à indiquer les résultats suivants qu'il est facile de vérifier (voyez nos 303 et 331).

Soient $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ les équations des trois côtés d'un triangle. L'équation générale des coniques inscrites dans ce triangle est

$$\lambda^2\alpha^2+\mu^2\beta^2+\nu^2\gamma^2-2\mu\nu\beta\gamma-2\lambda\nu\gamma\alpha-2\lambda\mu\alpha\beta=0$$

$\lambda,\mu,\nu$ désignant des paramètres variables. Cette équation peut s'écrire sous forme irrationnelle

$$(\sqrt{\lambda\alpha}+\sqrt{\mu\beta}+\sqrt{\nu\gamma})(\sqrt{\lambda\alpha}-\sqrt{\mu\beta}+\sqrt{\nu\gamma})(\sqrt{\lambda\alpha}+\sqrt{\mu\beta}-\sqrt{\nu\gamma})\sqrt{\lambda\alpha}-\sqrt{\mu\beta}-\sqrt{\nu\gamma})=0$$

L'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère dont les quatre côtés ont pour équations

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \quad \alpha-\beta+\gamma=0, \quad \alpha+\beta-\gamma=0, \quad \alpha-\beta-\gamma=0$$

est
$$\frac{\alpha^2}{\lambda}+\frac{\beta^2}{1-\lambda}-\gamma^2=0,$$

$\lambda$ étant un paramètre variable. (Voir n° 331, exemples.)

### CONDITIONS MULTIPLES

**283.** Reprenons l'examen des conditions géométriques par lesquelles on peut définir une courbe du second degré. Jusqu'ici nous n'avons parlé que des conditions simples, comme les points et les tangentes. Le centre équivaut à deux conditions; car si l'on prend le centre pour origine des coordonnées, l'équation du second degré, étant privée des termes du premier degré, ne contient plus que trois paramètres arbitraires; ainsi la courbe est définie par son centre et trois points.

Un diamètre, avec la direction des cordes, équivaut à deux conditions; car si l'on prend le diamètre pour axe des $x$ et une parallèle aux cordes pour axe des $y$, l'équation, étant privée des deux termes du premier degré en $y$, ne contient plus que trois paramètres arbitraires.

Un système de diamètres conjugués équivaut à trois condi-

tions; car si on les prend pour axes des coordonnées, l'équation, devant se réduire à la forme $ax^2+by^2+c=0$, ne contient plus que deux paramètres arbitraires. En général, soient $\alpha=0$, $\beta=0$, les équations de deux diamètres conjugués, les distances $\alpha$ et $\beta$ de chaque point aux deux diamètres conjugués étant proportionnelles aux coordonnées de ce point relatives à ces diamètres, la courbe sera représentée par l'équation

$$a\alpha^2+b\beta^2+c=0, \tag{12}$$

avec deux paramètres arbitraires.

L'équation

$$\alpha^2+k\beta=0 \tag{13}$$

est l'équation générale des paraboles dont la droite $\alpha=0$ est un diamètre, et la droite $\beta=0$ la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

On sait que l'équation de l'hyperbole, rapportée à ses deux asymptotes, est $xy=k$. En général, soient $\alpha=0$, $\beta=0$, les équations des deux asymptotes, l'hyperbole sera représentée par une équation de la forme

$$\alpha\beta-k=0, \tag{14}$$

ne renfermant qu'un paramètre arbitraire $k$. Ainsi les deux asymptotes équivalent à quatre conditions, et la courbe est déterminée par les deux asymptotes et un point ou une tangente. Si l'on ne donnait qu'une asymptote $\alpha=0$, l'équation $\beta=0$ de l'autre asymptote étant indéterminée, l'équation (14) contiendrait trois paramètres arbitraires, de sorte qu'une asymptote équivaut à deux conditions.

Nous avons vu que toute courbe du second degré a un foyer et une directrice; il en résulte que l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+h)^2=0, \tag{15}$$

par laquelle on exprime la propriété du foyer en coordonnées rectangulaires, et qui renferme les cinq paramètres arbitraires $\alpha$, $\beta$, $m$, $n$, $h$, représente toutes les courbes du second degré. Un foyer équivaut à deux conditions; car, si l'on donne un foyer, ses coordonnées $\alpha$ et $\beta$ étant connues, l'équation (15) ne contient plus que trois paramètres arbitraires.

De même, une directrice équivaut à deux conditions; car, en donnant l'équation de la directrice, on détermine les rapports de deux des paramètres $m$, $n$, $h$ au troisième.

On peut se rendre compte d'une autre manière des résultats que nous venons d'obtenir. Il est clair que les deux coordonnées d'un point remarquable d'une courbe du second degré, comme le centre, un foyer, un sommet, etc., sont déterminées lorsqu'on connaît les coefficients de l'équation du second degré et, par conséquent, qu'il existe deux équations entre ces coordonnées et les coefficients ; si donc on donne un pareil point, on aura deux relations entre les coefficients. Il en est de même des deux paramètres d'une droite remarquable, comme la directrice ou un axe, etc.; si cette droite est donnée, on aura encore deux relations entre les coefficients.

Ainsi, par exemple, si $f(x,y)=0$ est l'équation de la courbe, on exprimera qu'un point donné est centre en écrivant que ses coordonnées vérifient les deux équations $f'_x=0$, $f'_y=0$. Pour exprimer qu'un point donné est un sommet, il suffit d'écrire que ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe et que la normale en ce point passe par le centre.

Il est à remarquer que les formes précédentes, sous lesquelles nous avons mis l'équation du second degré, rentrent dans la forme $\alpha\beta - k\gamma^2 = 0$, composée avec trois polynômes du premier degré $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ qui se rapportent, les deux premiers aux tangentes menées d'un point arbitraire $p$ du plan, le troisième à la corde des contacts. Lorsque le point $p$ coïncide avec le centre de l'hyperbole, les tangentes $\alpha$ et $\beta$ sont les asymptotes; la droite des contacts s'éloignant à l'infini, le polynôme $\gamma$ se réduit à une constante, et l'équation $\alpha\beta - k\gamma^2 = 0$ devient $\alpha\beta - k = 0$. L'équation (12) mise sous la forme

$$(\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{-b})\ (\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{-b})+c=0,$$

se ramène à l'équation (14).

284. *Détermination des foyers d'une conique.* Soient $\alpha, \beta$ les coordonnées d'un foyer d'une conique ayant pour équation $f(x,y)=0$. Nous avons vu (nº 216) que l'équation de la courbe

peut se mettre en coordonnées rectangulaires sous la forme

$$(15)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+h)^2=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$[(y-\beta)-i(x-\alpha)][(y-\beta)+i(x-\alpha)]-(mx+ny+h)^2=0$$

équation de la forme

$$PQ-R^2=0$$

P, Q, R désignant trois fonctions linéaires de $x$ et $y$. On peut donc dire que la conique représentée par l'équation (15) est tangente aux deux droites

$$(a)\qquad y-\beta-i(x-\alpha)=0,\quad y-\beta+i(x-\alpha)=0$$

la corde des contacts étant la *directrice*

$$lx+my+h=0.$$

Les deux droites ($a$) passent par le foyer $(\alpha,\beta)$ et ont pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$; comme elles sont tangentes à la courbe, ce sont les deux tangentes menées du foyer $(\alpha,\beta)$ à la conique. On peut donc dire que le *foyer est un point tel que les deux tangentes menées de ce point à la conique ont pour coefficients angulaires* $\pm i$ : *la directrice est la corde des contacts.*

On peut dire aussi que l'ensemble des deux tangentes menées du foyer $(\alpha,\beta)$ à la conique a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0,$$

équation identique à celle *d'un cercle de rayon nul.* Les deux tangentes issues du foyer forment donc une conique dont l'équation présente les caractères de l'équation d'un cercle : *coefficient de* $xy$ *nul, coefficients de* $x^2$ *et* $y^2$ *égaux.*

De là une méthode nouvelle pour déterminer les foyers d'une conique, méthode qu'on peut présenter sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

1° Si l'on pose

$$\gamma=(A\alpha+B\beta+D)x+(B\alpha+C\beta+E)y+D\alpha+E\beta+F,$$

l'équation quadratique des tangentes menées du point $(\alpha,\beta)$ à la conique $f(x,y)=0$ est (n° 282)

$$f(x,y)\,f(\alpha,\beta)-\gamma^2=0$$

Pour exprimer que le point $(\alpha, \beta)$ est un foyer, il suffit d'exprimer que cette équation présente les caractères de l'équation d'un cercle : en coordonnées rectangulaires, coefficient de $xy$ nul, coefficients de $x^2$ et $y^2$ égaux. On a ainsi les deux équations

$$(c) \qquad \begin{gathered} Bf(\alpha, \beta) - (A\alpha + B\beta + D)(B\alpha + C\beta + E) = 0 \\ Af(\alpha, \beta) - (A\alpha + B\beta + D)^2 = Cf(\alpha, \beta) - (B\alpha + C\beta + E)^2 \end{gathered}$$

qui déterminent $\alpha$ et $\beta$. Si dans ces équations on regarde $\alpha$ et $\beta$ comme des coordonnées courantes, elles représentent deux coniques dont les points d'intersection sont les foyers : ainsi, lorsque la courbe donnée est une ellipse ou une hyperbole, ces deux coniques se coupent en quatre points distincts à distance finie qui sont les deux foyers réels et les deux foyers imaginaires de la courbe. On peut remarquer que l'élimination de $f(\alpha, \beta)$ entre les équations précédentes fournit une équation qu'on peut écrire sous forme abrégée

$$B(f_\alpha'^2 - f_\beta'^2) - (A - C) f_\alpha' f_\beta' = 0.$$

Cette équation, qui représente une conique passant par les foyers, est l'équation de l'ensemble des axes de la conique (n° 137, éq. 24).

2° La recherche des foyers se trouve simplifiée si l'on a formé la condition

$$(d) \qquad \mathbf{a}u^2 + 2\mathbf{b}uv + \mathbf{c}v^2 + 2\mathbf{d}u + 2\mathbf{e}v + \mathbf{f} = 0$$

qui exprime que la droite $ux + vy + 1 = 0$ est tangente à la conique donnée (n° 126). Soit $(\alpha, \beta)$ un foyer, les axes étant rectangulaires; la droite

$$y - \beta - i(x - \alpha) = 0$$

doit être tangente à la courbe. Or, pour cette droite particulière on a

$$u = \frac{i}{\beta - i\alpha}, \quad v = \frac{-1}{\beta - i\alpha}.$$

Exprimant que ces valeurs de $u$ et $v$ vérifient la condition $(d)$ on a, en développant et remplaçant $i^2$ par $-1$

$$(e) \quad \mathbf{f}(\alpha^2 - \beta^2) - 2\mathbf{d}\alpha + 2\mathbf{e}\beta + \mathbf{a} - \mathbf{c} + 2i(\mathbf{f}\alpha\beta - \mathbf{e}\alpha - \mathbf{d}\beta + \mathbf{b})$$

La droite

$$y - \beta + i(x - \alpha) = 0$$

devant aussi être tangente à la conique, on obtient une deuxième condition qui se déduit de la précédente par le changement de $i$ en $-i$. Donc, si le point réel ou imaginaire $(\alpha, \beta)$ est foyer, le coefficient de $i$ et le terme indépendant de $i$ doivent être nuls séparément dans la condition ($c$), et on a les deux équations

$$\mathbf{f}(\alpha^2 - \beta^2) - 2\mathbf{d}\alpha + 2\mathbf{e}\beta + \mathbf{a} - \mathbf{c} = 0,$$
$$\mathbf{f}\alpha\beta - \mathbf{e}\alpha - \mathbf{d}\beta + \mathbf{b} = 0,$$

déjà obtenues plus haut (éq. $c$) sous une autre forme.

Quand les axes sont obliques et font entre eux l'angle $\theta$, on exprime que les deux droites

$$y - \beta = (\cos\theta \pm i \sin\theta)(x - \alpha)$$

sont tangentes à la conique.

## RECHERCHE DES SÉCANTES COMMUNES A DEUX COURBES DU SECOND DEGRÉ.

**285.** Nous avons vu que deux courbes du second degré, $S = 0$, $S_1 = 0$, ont en général quatre points communs; par ces quatre points, que nous supposerons d'abord distincts, on peut faire passer trois couples de droites. Lorsque les courbes sont réelles, les points communs sont réels, ou imaginaires conjugués deux à deux. Il y à trois cas à considérer : 1° si les quatre points communs $a$, $b$, $c$, $d$ sont réels, les trois couples de sécantes communes sont évidemment réelles; 2° si les quatre points sont imaginaires et conjugués deux à deux, par exemple $a$ et $b$, $c$ et $d$, les deux droites $ab$ et $cd$, qui passent par deux points imaginaires conjugués, sont réelles; mais les quatre autres droites sont imaginaires; car, si l'une d'elles $ac$ était réelle, les points $a$ et $c$ où elle coupe les deux droites réelles

*ab* et *cd* seraient réels. La droite *bd*, qui passe par les deux points *b* et *d* respectivement conjugués des points *a* et *c*, est conjuguée de *ac*; de même la droite *ad* est conjuguée de *bc*; ainsi, dans ce cas, on a un couple de sécantes réelles *ab* et *cd* et deux couples *ac* et *bd*, *ad* et *bc*, formés chacun de deux droites imaginaires conjuguées; 3° lorsque deux des points d'intersection *a* et *b* sont réels, les deux autres *c* et *d* imaginaires conjugués, les deux droites *ab* et *cd* sont encore réelles, et les quatre autres imaginaires; mais les deux droites imaginaires d'un même couple ne sont pas conjuguées; car on sait qu'une droite imaginaire n'a qu'un point réel, qui appartient aussi à la droite conjuguée; les deux droites imaginaires *ac* et *bd*, passant par deux points réels différents *a* et *b*, ne sont pas conjuguées.

**286.** La recherche des points d'intersection des deux courbes dépend de la résolution d'une équation du quatrième degré; mais on peut ramener la question à la résolution d'une équation du troisième degré. L'équation $S+\lambda S_1=0$, dans laquelle le paramètre $\lambda$ est arbitraire, représentant toutes les lignes du second degré qui passent par les points communs aux deux premières, on peut déterminer le paramètre $\lambda$ de manière que cette équation représente deux droites; les deux courbes admettant trois couples de sécantes communes, la valeur de $\lambda$ sera donnée par une équation du troisième degré.

Soient

$$(16)\qquad \begin{cases} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,\\ A'x^2+2B'xy+C'y^2+2D'x+2E'y+F'=0,\end{cases}$$

les équations des deux courbes. L'équation nouvelle sera

$$(17)\qquad (A+\lambda A')\,x^2+2\,(B+\lambda B')\,xy\ldots=0;$$

pour qu'elle représente deux droites, il est nécessaire et il suffit que le discriminant soit nul (n° 124) et par conséquent que la constante $\lambda$ satisfasse à l'équation du troisième degré

$$
\begin{aligned}
&(A+\lambda A')(C+\lambda C')(F+\lambda F')-(A+\lambda A')(E+\lambda E')^2\\
&-(C+\lambda C')(D+\lambda D')^2-(F+\lambda F')(B+\lambda B')^2\\
&+2(B+\lambda B')(D+\lambda D')(E+\lambda E')=0.
\end{aligned}
$$

En ordonnant par rapport à $\lambda$ nous aurons une équation de la forme

$$(18)\qquad \Delta+\Theta\lambda+\Theta'\lambda^2+\Delta'\lambda^3=0$$

où $\Delta$ et $\Delta'$ sont les discriminants de S et $S_1$ et où $\Theta$ et $\Theta'$ ont les valeurs

$$
\begin{aligned}
\Theta &= A'\mathfrak{a}+2B'\mathfrak{b}+C'\mathfrak{c}+2D'\mathfrak{d}+2E'\mathfrak{e}+F'\mathfrak{f}\\
\Theta' &= A\mathfrak{a}'+2B\mathfrak{b}'+C\mathfrak{c}'+2D\mathfrak{d}'+2E\mathfrak{e}'+F\mathfrak{f}',
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ étant les quantités déjà employées précédemment (n° 124) et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{f}'$ les quantités analogues formées avec les coefficients de la conique $S_1$.

Une valeur réelle de $\lambda$ donne deux droites réelles, lorsqu'elle rend négative la quantité

$$(A+\lambda A')(C+\lambda C')-(B+\lambda B')^2.$$

et deux droites imaginaires conjuguées, lorsqu'elle rend cette quantité positive; car le premier membre de l'équation (17) a ses coefficients réels et il se décompose en un produit de deux polynômes du premier degré, dont les coefficients sont, dans le premier cas, réels, dans le second cas, imaginaires conjugués (n° 123).

Une valeur imaginaire de $\lambda$ donne deux droites imaginaires non conjuguées. En effet, deux droites réelles ou deux droites imaginaires conjuguées sont représentées par une équation du second degré,

$$(19)\qquad A''x^2+2B''xy+C''y^2+2D''x+2E''y+F''=0,$$

à coefficients réels. Les équations (17) et (19) représentant la même courbe ont leurs coefficients proportionnels; et comme $\lambda$ est une quantité imaginaire, on en conclut

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=\frac{D'}{D}=\frac{E'}{E}=\frac{F'}{F}$$

Les deux équations (16) coïncideraient.

Supposons que l'équation (18) ait ses trois racines inégales. Les trois couples de droites étant distincts, les deux courbes ont quatre points communs distincts. D'après ce que nous avons dit précédemment, lorsque les trois racines sont réelles, les quatre points sont tous réels ou tous imaginaires; lorsqu'une seule racine est réelle, deux points sont réels et deux imaginaires. Pour distinguer les deux premiers cas, on examinera si les trois racines ou une seule rendent la quantité $-f$ positive; dans le premier cas, les quatre points sont réels, dans le second, ils sont imaginaires.

**287.** Nous avons supposé jusqu'à présent les quatre points communs distincts. Si les deux points $a$ et $b$ coïncident, les deux autres étant distincts, les deux courbes sont tangentes au point réel $a$; le couple ($ab$, $cd$) se compose de la tangente en $a$ qui est réelle, et de la droite réelle $cd$; les deux autres couples ($ac$, $bd$) ($bc$, $ad$) se confondent. L'équation du troisième degré admet donc une racine simple et une racine double, toutes deux réelles; la première donne les deux droites réelles $ab$ et $cd$, la seconde deux droites, réelles ou imaginaires conjuguées, suivant que les deux points $c$ et $d$ sont réels ou imaginaires.

Supposons que les deux points $a$ et $c$ coïncident, ainsi que les deux points $b$ et $d$; les deux courbes sont tangentes aux points $a$ et $b$, qui sont réels ou imaginaires conjuguées. L'un des couples de droites est formé des tangentes en $a$ et $b$, qui sont réelles ou imaginaires conjuguées; les deux autres se confondent avec la droite double $ab$ qui est réelle. L'équation du troisième degré a encore une racine simple et une racine double, toutes deux réelles; la première donne les deux tangentes, la seconde la droite des contacts. (Voyez pour une discussion complète, le chapitre XII.)

**288.** Pour montrer une application de ce qui précède, considérons deux ellipses ayant un foyer commun. Ces deux ellipses ne peuvent se couper en plus de deux points réels; car, d'après ce que nous avons dit au n° 260, deux ellipses qui ont un foyer commun et trois points communs coïncident; elles admettent donc seulement deux sécantes communes réelles.

Soient
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-k^2\gamma^2=0,$$
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-k'^2\gamma'^2=0,$$

les équations des deux ellipses; les deux sécantes communes réelles $k\gamma=\pm k'\gamma'$ passent par le point d'intersection I des directrices DI, D'I (fig. 166), et il est facile de les déterminer géométriquement. Supposons que les deux ellipses se coupent en deux points réels A et B; l'une des sécantes communes réelles est la droite AB qui passe par ces deux points : l'autre IL ne rencontre pas les courbes. Pour déterminer cette seconde droite, joignons le point A au foyer F et abaissons de ce point des perpendiculaires AE, AE' sur les directrices; on a $k=\frac{AF}{AE}$, $k'=\frac{AF}{AE'}$, et, par suite, $\frac{k'}{k}=\frac{AE}{AE'}$. Prolongeons la perpendiculaire AE d'une longueur EH égale à elle-même; par le point H menons une parallèle HL à la première directrice et par le point A une parallèle AL à la seconde directrice; le point d'intersection L de ces deux parallèles appartiendra à la seconde sécante commune réelle IL.

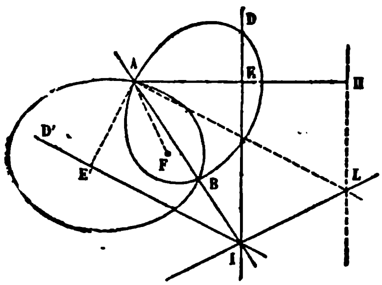


Fig. 166.

**289.** Un cercle coupe une courbe du second degré en quatre points réels ou imaginaires; soit

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

l'équation du cercle, $\alpha=0$, et $\beta=0$ celles d'un couple de sécantes communes réelles, l'équation de la courbe du second degré pourra toujours être mise sous la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=k\alpha\beta.$$

Le premier membre représente le carré de la longueur de la tangente menée d'un point quelconque de la courbe au cercle; il en résulte ce théorème : *un cercle étant placé d'une manière quelconque dans le plan d'une courbe du second degré, la tangente menée de tout point de la courbe au cercle est à la moyenne proportionnelle entre les distances de ce point à deux sécantes communes réelles dans un rapport constant.*

Supposons que le cercle soit tangent à la courbe en deux points réels ou imaginaires conjugués, la droite des contacts sera réelle, et l'équation de la courbe prendra la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=k\alpha^2.$$

Ainsi, *lorsqu'un cercle est doublement tangent à une courbe du second degré, la tangente menée d'un point quelconque de la courbe au cercle est à la distance de ce point à la corde des contacts dans un rapport constant.*

Le foyer d'une courbe du second degré peut être considéré comme un cercle d'un rayon nul ayant avec la courbe un double contact imaginaire; la directrice est la corde des contacts.

**290.** A l'aide de la théorie précédente on détermine d'une manière très-simple le nombre des normales que l'on peut mener d'un point donné à une courbe du second degré. Soit, par exemple, l'ellipse définie par l'équation

$$(1)\qquad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

et P un point dont les coordonnées sont $x_1$ et $y_1$ (fig. 167). Désignons par $x$ et $y$ les coordonnées du pied M de l'une des normales; ces inconnues devront vérifier l'équation (1) et aussi l'équation

$$(2)\qquad y_1-y=\frac{a^2y}{b^2x}(x_1-x)\quad\text{ou}\quad c^2xy+b^2y_1x-a^2x_1y=0,$$

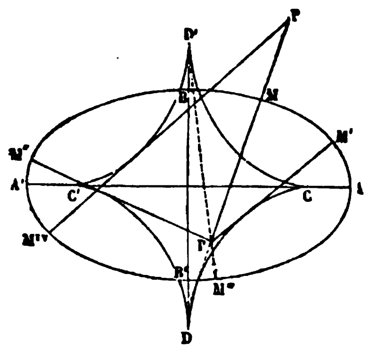



Fig. 167.

qui exprime que la normale au point M passe par le point P. Il résulte de là que le point M est déterminé par la rencontre de l'ellipse (1) et de l'hyperbole équilatère définie par l'équation (2); l'une des branches de l'hyperbole passant au centre de l'ellipse, les deux courbes ont au moins deux points réels communs. L'équation du troisième degré, de laquelle dépend la recherche des sécantes communes aux deux courbes, est

$$(3) \qquad 4a^2b^2\lambda^3 + (a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)\lambda - c^2x_1y_1 = 0.$$

Si l'équation (3) n'admet qu'une racine réelle, nous avons vu (nº 286) que les courbes (1) et (2) n'ont que deux points réels communs; si l'équation (3) a ses trois racines réelles, les courbes (1) et (2), ayant au moins deux points réels communs, se coupent en quatre points réels. On doit avoir, dans le premier cas,

$$(a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x_1^2y_1^2 > 0,$$

et dans le second cas,

$$(5) \qquad (a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x_1^2y_1^2 < 0.$$

Si les coordonnées $x_1$, $y_1$ vérifient la relation

$$(6) \qquad (a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x_1^2y_1^2 = 0,$$

les racines de l'équation (3) sont encore réelles, mais il y a une racine double, et l'on ne peut mener du point P que trois normales distinctes. Les points P qui satisfont à cette condition forment une courbe CDC'D' qui présente quatre points de rebroussement en C, C', D, D'. L'équation (6) prend la forme plus simple

$$a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}};$$

on voit aisément que pour tout point intérieur à cette courbe la relation (5) est vérifiée, c'est-à-dire que par ce point on peut mener quatre normales réelles, tandis que l'on ne peut mener que deux normales réelles par tout point extérieur à la même courbe.

## EXERCICES.

1° Construire une courbe du second degré, connaissant la directrice et trois points.

2° Construire une parabole, connaissant le foyer et deux points, ou un point et une tangente.

3° Construire une parabole, connaissant la directrice et deux points.

4° Construire une hyperbole, connaissant trois points et les directions des asymptotes.

5° Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, un sommet et un point.

6° Trouver le lieu du sommet d'une parabole ayant un foyer donné et tangente à une droite donnée.

7° Trouver le lieu du foyer d'une parabole ayant son sommet en un point donné et tangente à une droite donnée.

8° Trouver le lieu des foyers des courbes du second degré inscrites dans un parallélogramme donné.

9° Une corde tourne autour de l'un des foyers d'une courbe du second degré; trouver le lieu du point de rencontre des normales menées à la courbe par ses deux extrémités.

10° Deux courbes du second degré ayant un foyer commun, un angle de grandeur constante tourne autour de son sommet situé au foyer commun; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées respectivement aux deux courbes aux points où elles sont coupées par les côtés de l'angle.

11° Trouver le lieu du point de rencontre des droites menées parallèlement à deux directions fixées par les extrémités d'une corde de longueur donnée inscrite dans une circonférence donnée.

12° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle donné.

13° Trouver le lieu des foyers ou des sommets d'une hyperbole, ayant une asymptote et une directrice données.

14° Trouver le lieu des centres des courbes du second degré qui passent par les quatre points d'intersection de deux coniques données. Ce lieu ne change pas quand chacune des coniques varie en restant semblable et concentrique à elle-même.

15° Un cercle variable touche une ellipse donnée en un point donné; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux deux courbes.

16° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole qui a un foyer donné et qui coupe en un point donné une droite donnée parallèle à l'une des asymptotes.

17° Trouver le lieu du foyer d'une parabole qui touche deux droites données, l'une en un point fixe, l'autre en un point variable.

18° Trouver le lieu du point de rencontre de deux paraboles, qui admettent pour foyer un point donné, qui touchent une droite donnée et qui se coupent sous un angle donné.

19° Étant donnés trois points A, B, C et une droite indéfinie, on prend sur cette droite un segment variable MN, vu du point A sous un angle constant; trouver le lieu du point d'intersection des deux droites BM et CN.

20° Deux angles de grandeurs constantes tournent autour de leurs sommets placés aux extrémités du grand axe d'une ellipse, le point de rencontre de deux des côtés décrit l'ellipse; trouver le lieu du point de rencontre des deux autres côtés.

21° Trouver le lieu des sommets d'une hyperbole équilatère passant en un point donné et ayant pour asymptote une droite donnée.

22° Étant donnés un système de coniques ayant pour foyers F et F', et une droite fixe passant par le foyer F; les tangentes à ces diverses coniques, aux points où chacune d'elles est coupée par cette droite, sont tangentes à une même parabole, qui a pour foyer le point F', et pour directrice la sécante.

La partie de chaque tangente comprise entre la conique et la parabole est vue du foyer F' sous un angle droit.

# CHAPITRE X

## Théorie des pôles et des polaires.

**291.** Considérons une équation algébrique du degré $m$,

$$f(x, y) = 0,$$

mise sous forme entière. La tangente, au point dont les coordonnées sont $x$ et $y$, est représentée par l'équation

$$(1) \qquad (X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0,$$

ou

$$X f'_x + Y f'_y - (x f'_x + y f'_y) = 0.$$

Cette équation renferme aussi les coordonnées du point de contact au degré $m$ ; mais on peut, au moyen de la relation (1), faire disparaître les termes du degré $m$. On opère aisément cette réduction à l'aide d'une notation particulière, que nous ferons connaître. Concevons que dans l'équation (1) on remplace $x$ et $y$ par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et que l'on multiplie tous les termes par $z^m$, le polynôme $f(x, y)$ se transforme en un polynôme homogène et du degré $m$ par rapport aux trois lettres $x, y, z$, polynôme que nous représenterons par $f(x, y, z)$. Il est évident que, si dans ce dernier polynôme on fait $z = 1$, on reproduit le polynôme proposé $f(x, y)$. On sait que si une fonction $f(x, y, z)$ est homogène et du degré $m$ par rapport aux trois lettres $x, y, z$, on a identiquement

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = m f(x, y, z).$$

On en déduit

$$x f'_x + y f'_y = m f(x, y, z) - z f'_z.$$

La valeur du second membre, quand on y fait $z = 1$, est égale à la quantité $x f'_x + y f'_y$, telle qu'elle entre dans l'équation de la tangente ; mais le point de contact étant sur la courbe, le premier terme $m f(x, y, z)$ se réduit à zéro ; l'expression $x f'_x + y f'_y$ est donc égale à la valeur que prend $- z f'_z$, quand on fait $z = 1$. On peut ainsi mettre l'équation de la tangente sous la forme

$$X f'_x + Y f'_y + z f'_z = 0.$$

Pour plus de symétrie, on écrira

$$(2) \qquad X f'_x + Y f'_y + Z f'_z = 0.$$

Quand on aura pris les trois dérivées partielles de la fonction homogène $f(x, y, z)$, on remplacera $z$ et Z par l'unité dans l'équation (2).

**292**. Proposons-nous maintenant de mener par un point donné $p$, ayant pour coordonnés $x_1$ et $y_1$, des tangentes à la courbe donnée. Appelons $x$ et $y$ les coordonnées de l'un des points de contact; la tangente en ce point devant passer par le point $p$, l'équation (2) sera vérifiée par les coordonnées $x_1$ et $y_1$ du point $p$, ce qui donne la relation

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + Z f'_z = 0,$$

que, pour plus de symétrie, on mettra sous la forme

$$(3) \qquad x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0,$$

en convenant de remplacer $z$ et $z_1$ par l'unité. Les points de contact seront determinés par les deux équations simultanées (1) et (3). Ces deux équations étant, l'une du degré $m$, l'autre du degré $m-1$, le nombre des solutions sera au plus $m(m-1)$. Ainsi par un point $p$ on peut mener au plus $m(m-1)$ tangentes, réelles ou imaginaires, à une courbe du degré $m$.

Lorsque la courbe est du second degré, l'équation (3) est du premier degré, et l'on a deux solutions, réelles ou imaginaires conjuguées. Quand les deux solutions sont réelles, on peut mener du point $p$ à la courbe deux tangentes réelles. Quand les deux solutions sont imaginaires conjuguées, les deux tangentes sont imaginaires conjuguées, mais la droite des contacts (3) reste réelle.

L'équation générale des lignes du second degré tangentes à une courbe du second degré représentée par l'équation $f(x,y) = 0$, aux points où elle est coupée par la droite (3), est (n° 281)

$$f(x,y) - \lambda(x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z)^2 = 0,$$

$\lambda$ désignant un paramètre arbitraire. Si l'on détermine $\lambda$ de façon que cette ligne passe au point $x_1, y_1$, elle se réduira nécessairement au système des deux tangentes issues de ce point qui sont ainsi représentées par l'équation

$$4f(x_1, y_1) f(x, y) - (x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z)^2 = 0.$$

### PROPORTION HARMONIQUE.

**293**. Étant donnés deux points A et B, on sait qu'il existe sur la droite AB deux points C et D tels que le rapport de leurs distances aux deux points A et B est égal à un rapport donné (fig. 168). Ces deux points C et D sont dits *conjugués harmoniques* par rapport aux deux points A et B. D'après cela, il y a une infinité de systèmes de points conjugués

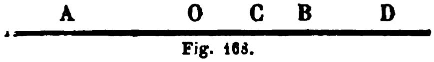



Fig. 168.

harmoniques de deux points donnés; on peut prendre l'un des points à volonté. Lorsque le point C se rapproche du milieu O de la droite AB, le point conjugué D s'éloigne à l'infini, et réciproquement.

Nous conviendrons de représenter par le symbole AB la distance du point A au point B, affectée du signe + ou du signe —, suivant que le point B est à droite où à gauche du point A. D'après cette convention on a $AB = -BA$, et la propriété des points C et D s'exprime par la relation

$$(4)\qquad \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}.$$

Cette relation pouvant être mise sous la forme

$$\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB},$$

on voit que, réciproquement, les deux points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points C et D.

Si l'on détermine les positions relatives des quatre points par les distances de l'un d'eux A aux trois autres, la relation précédente devient

$$(5)\qquad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

En comptant les distances à partir du point O, milieu de AB, on a

$$(6)\qquad OC.OD = \overline{OB}^2.$$

**294.** Théorème I. *Étant donnée une section conique, si par un point* p *du plan on mène une sécante quelconque* mm' (fig. 169), *le lieu du point* p' *conjugué harmonique du point* p, *par rapport aux deux points d'intersection* m *et* m' *de la sécante et de la courbe, est une ligne droite.* Soient

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la courbe, $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point $p$; une sécante quelconque menée par le point $p$ pourra être représentée par les équations

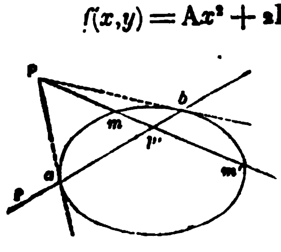


Fig. 169.

$$(7)\qquad \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \rho,$$

dans lesquelles $a$ et $b$ désignent deux constantes, et $\rho$ la distance du point $p$ à un point quelconque $m$ de la droite, distance affectée du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que le point $m$ est par rapport au point $p$ d'un côté ou de l'autre; on en déduit $x = x_1 + a\rho$, $y = y_1 + b\rho$. En portant ces valeurs dans l'équation de la courbe, on obtient une équation du second degré en $\rho$,

$$f(x_1 + a\rho, y_1 + b\rho) = 0,$$

qui donne les distances $\rho'$ et $\rho''$ du point $p$ aux deux points $m$ et $m'$. L'équation développée devient

$$(Aa^2 + 2Bab + Cb^2)\rho^2 + (af'x_1 + bf'y_1)\rho + f(x_1, y_1) = 0,$$

ou, si l'on prend pour inconnue $\frac{1}{\rho}$,

$$f(x_1, y_1)\frac{1}{\rho^2} + (af'_{x_1} + bf'_{y_1})\frac{1}{\rho} + (Aa^2 + 2Bab + Cb^2) = 0.$$

Appelons $r$ la distance du point $p$ au point conjugué harmonique $p'$. D'après la relation (5), on doit avoir

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}.$$

Mais, en vertu de la dernière équation,

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = -\frac{af'_{x_1} + bf'_{y_1}}{f(x_1, y_1)};$$

on en déduit
$$\frac{2}{r} = -\frac{af'_{x_1} + bf'_{y_1}}{f(x_1, y_1)},$$

ou
$$arf'_{x_1} + brf'_{y_1} + 2f(x_1, y_1) = 0.$$

Le point $p'$ appartenant à la droite $pmm'$, ses coordonnées $x$ et $y$ vérifient les équations (7) de cette droite, c'est-à-dire que l'on a $x - x_1 = ar$, $y - y_1 = br$; en remplaçant $ar$ et $br$ par ces valeurs dans l'équation précédente, on élimine les paramètres variables $a$ et $b$ et l'on obtient l'équation du lieu

$$(8) \qquad (x - x_1)f'_{x_1} + (y - y_1)f'_{y_1} + 2f(x_1, y_1) = 0,$$

qui est du premier degré. Ainsi le lieu cherché est une droite; cette droite P est appelée la *polaire* du point $p$ et le point $p$ le *pôle* de la droite P.

Si l'on fait les calculs, le terme constant

$$2f(x_1,y_1)-x_1f'_{x_1}-y_1f'_{y_1}$$

se réduit à $2Dx_1+2Ey_1+2F$ et l'équation précédente devient

$$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+(2Dx_1+2Ey_1+2F)=0.$$

Mais on peut effectuer cette réduction d'une autre manière; imaginons, comme précédemment, que dans le polynôme $f(x, y)$ on remplace $x$ et $y$ par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, et que l'on multiplie tous les termes par $z^2$, ce polynôme se changera en un polynôme homogène et du second degré, que nous représenterons par $f(x, y, z)$. On a identiquement, d'après la propriété des fonctions homogènes que nous avons rappelée (n° 291),

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=2f(x,y,z);$$

on en déduit $\quad 2f(x,y,z)-xf'_x-yf'_y=zf'_z,$

ou bien, en remplaçant $x$, $y$, $z$ par $x_1$, $y_1$, $z_1$,

$$2f(x_1,y_1,z_1)-x_1f'_{x_1}-yf'_{y_1}=z_1f'_{z_1}.$$

On peut donc écrire l'équation (8) sous la forme

$$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+z_1f'_{z_1}=0,$$

ou, pour plus de symétrie,

(9) $$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=0,$$

en convenant de remplacer, après les dérivations, $z$ et $z_1$ par l'unité. Si l'on développe cette équation, on reconnaît qu'elle ne change pas quand on y permute les lettres $x$ et $x_1$, $y$ et $y_1$, $z$ et $z_1$, et l'on obtient ainsi l'équation (3) de la corde des contacts. Ainsi la polaire du point $p$ coïncide avec la corde des contacts relative à ce point.

**295**. Examinons les positions relatives du pôle et de la polaire. Par le point $p$ menons une sécante $mm'$ (fig. 170) parallèle aux cordes que le diamètre passant par le point $p$ divise en deux parties égales; le point $p$ étant au milieu de $mm'$, le point conjugué harmonique est à l'infini sur cette sécante; on en conclut que la polaire P est parallèle à

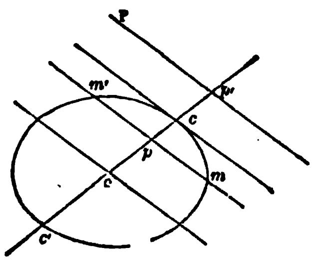


Fig. 170.

la corde $mm'$, c'est-à-dire à la direction conjuguée du diamètre passant par le point $p$.

Soit $o$ le centre de la courbe et $p'$ le point de la polaire situé sur le diamètre $op$, c'est-à-dire le point conjugué harmonique du point $p$ par rapport aux deux extrémités $c$ et $c'$ du diamètre, on a $op.\,op' = oc^2$. Si l'on fait mouvoir le pôle $p$ sur le diamètre $oc$, la polaire P se meut parallèlement à elle-même; quand le pôle va de $o$ en $c$, la polaire, d'abord située à l'infini, se rapproche de plus en plus de la courbe et devient tangente en $c$; si le pôle sort de la courbe et s'éloigne indéfiniment, la polaire coupe la courbe en deux points réels et se rapproche du centre de plus en plus.

Lorsque la courbe est une parabole, le point $c'$ étant situé à l'infini, le point $c$ est le milieu de $pp'$.

On voit aisément que, réciproquement, toute droite admet un pôle et un seul, excepté dans le cas de la parabole, lorsque la droite est parallèle à l'axe. La courbe étant rapportée à des axes quelconques, pour déterminer les coordonnées $x_1$ et $y_1$ du pôle $p$ d'une droite donnée $ux + vy + w = 0$, il suffira d'identifier cette équation avec l'équation (9), qui représente la polaire du point $p$, ce qui donne les deux relations,

$$\frac{f'_{x_1}}{u} = \frac{f'_{y_1}}{v} = \frac{f'_{z_1}}{w}. \tag{10}$$

En appelant $\frac{2}{\lambda}$ la valeur commune de ces rapports et développant les calculs on aura

$$\begin{aligned}
A\lambda x_1 + B\lambda y_1 + D\lambda &= u\\
B\lambda x_1 + C\lambda y_1 + E\lambda &= v\\
D\lambda x_1 + E\lambda y_1 + F\lambda &= w
\end{aligned}$$

équations du premier degré en $\lambda x_1$, $\lambda y_1$, $\lambda$. Si la conique n'est pas réduite à deux droites, le déterminant $\Delta$ des coefficients des inconnues n'est pas nul et en employant les formules générales de la résolution des équations du premier degré, l'on a

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda x_1 &= \mathbf{a}u + \mathbf{b}v + \mathbf{d}w\\
\Delta\lambda y_1 &= \mathbf{b}u + \mathbf{c}v + \mathbf{e}w\\
\Delta\lambda \quad &= \mathbf{d}u + \mathbf{e}v + \mathbf{f}w.
\end{aligned}$$

Quand la valeur trouvée pour $\lambda$ n'est pas nulle, ces équations donnent $x_1$ et $y_1$. La valeur de $\lambda$ est nulle quand les coefficients de la droite vérifient la conditions

$$\mathbf{d}u+\mathbf{e}v+\mathbf{f}w=0$$

c'est-à-dire, en supposant $\mathbf{f}$ différent de zéro, quand la droite passe par le centre de la conique dont les coordonnées sont $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{f}}$, $\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{f}}$ ; ou en supposant $\mathbf{f}$ égal à zéro, cas de la parabole, quand la droite est parallèle à l'axe de la parabole.

Remarque. Si la courbe du second degré est réduite à deux droites distinctes ayant pour équation

$$\alpha=lx+my+n=0 \quad , \quad \beta=l'x+m'y+n'=0$$

on aura identiquement

$$f(x,y)=\alpha\beta$$

$$f_x=l\beta+l'\alpha \quad , \quad f_y=m\beta+m'\alpha \quad , \quad f_z=n\beta+n'\alpha;$$

et en faisant

$$\alpha_1=lx_1+my_1+n \quad , \quad \beta_1=l'x_1+m'y_1+n',$$

la polaire du point de coordonnées $x_1$, $y_1$ aura pour équation

$$x_1f_x+y_1f_y+f_z=\beta\alpha_1+\alpha\beta_1=0,$$

équation d'une droite passant par le point de concours des deux droites $\alpha=0$, $\beta=0$ ou parallèle à ces deux droites dans le cas où elles seraient parallèles entre elles. On conclut de cette forme de l'équation de la polaire que :

La polaire d'un point quelconque du plan, autre que le point de concours des deux droites, passe par ce point de concours. La polaire du point de concours est indéterminée. Si le pôle décrit une droite passant par l'intersection des deux droites $\beta-m\alpha=0$, la polaire reste fixe et a pour équation $\beta+m\alpha=0$. Inversement une droite ne passant pas par le point de concours a ce point pour pôle. Une droite $\beta+m\alpha=0$ passant par le point d'intersection des deux droites a une infinité de pôles situés sur la droite $\beta-m\alpha=0$. (Voyez n° 103.)

**296.** Théorème II. *Les polaires de tous les points d'une droite passent par le pôle de cette droite*, et, réciproquement, *les pôles*

*de toutes les droites qui passent par un même point sont situés sur la polaire de ce point.*

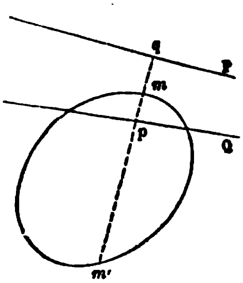


Fig. 171.

Sur la droite P, dont le pôle est $p$, prenons un point quelconque $q$ (fig. 171); la droite $pq$ coupe la conique en deux points $m$ et $m'$; les deux points $p$ et $q$ étant conjugués harmoniques par rapport aux deux points $m$ et $m'$, la polaire Q du point $q$ passe par le point $p$.

Réciproquement, soit $q$ le pôle d'une droite quelconque Q passant par le point $p$; les deux points $q$ et $p$ étant conjugués harmoniques par rapport aux deux points $p$ et $m'$ où la droite $pq$ coupe la conique, le point $q$ appartient à la polaire P du point $p$.

*Droites conjuguées.* On dit que deux droites sont conjuguées par rapport à une conique quand le pôle de l'une se trouve sur l'autre. Soient

$$ux+vy+w=0 \quad , \quad u'x+v'y+w'=0$$

deux droites conjuguées. En écrivant que le pôle $(x_1, y_1)$ de la première est sur la seconde, on a

$$u'x_1+v'y_1+w'=0$$

ou, d'après les valeurs précédentes de $x_1, y_1$

$$u'(\mathbf{a}u+\mathbf{b}v+\mathbf{d}w)+v'(\mathbf{b}u+\mathbf{c}v+\mathbf{e}w)$$
$$+w'(\mathbf{d}u+\mathbf{e}v+\mathbf{f}w)=0,$$
$$\mathbf{a}uu'+\mathbf{b}(uv'+vu')+\mathbf{c}vv'+\mathbf{d}(uw'+wu')$$
$$+\mathbf{e}(vw'+wv')+\mathbf{f}ww'=0.$$

Cette condition peut encore s'écrire si l'on pose

$$\varphi(u, v, w)=\mathbf{a}u^2+2\mathbf{b}uv+\mathbf{c}v^2+2\mathbf{d}uw+2\mathbf{e}vw+\mathbf{f}w^2$$
$$u'\varphi'_u+v'\varphi'_v+w'\varphi'_w=0$$
$$u\varphi'_{u'}+v\varphi'_{v'}+w\varphi'_{w'}=0.$$

**297.** Théorème III. *Étant donnée une section conique, si par un point* p *on mène deux sécantes quelconques* pmm', pnn', *qui coupent la courbe en* m, m' n, n' (fig. 172); *les points d'intersection* q

*et q′ des droites* mm, m′n′ *ou* m′n, mn′, *appartiennent à la polaire du point* p.

Nous remarquons d'abord que le théorème I subsiste, lorsque le lieu du second degré se réduit au système de deux droites; mais alors la polaire du point *p* passe par le sommet de l'angle; car, si l'on considère la sécante qui passe par le sommet, les deux points *m* et *m′* coïncident avec ce point, de même que le point *p′* conjugué harmonique du point *p*.

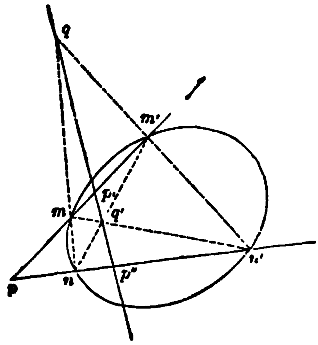


Fig. 172.

Cela posé, considérons le système des deux droites *mn*, *m′n′*, qui se coupent en *q*. La droite *pmm′* coupent la section conique et les deux côtés de l'angle *mqm′* aux mêmes points *m* et *m′*; le point *p′*, conjugué harmonique du point *p*, est le même sur la sécante *pmm′*, lorsqu'on regarde cette sécante comme appartenant à la section conique ou à l'angle. Le point *p″*, conjugué harmonique du point *p*, sera aussi le même, dans les deux cas, sur la sécante *pnn′*. Les polaires du point *p*, par rapport à la section conique et à l'angle, ayant deux points communs *p′* et *p″*, coïncident; mais on sait que la polaire relative à l'angle passe par le sommet *q;* donc le point *q* appartient à la polaire du point *p* par rapport à la courbe. Par la même raison, le point *q′* appartient à cette même polaire.

Corollaire. La courbe étant tracée, on déduit de ce théorème le moyen de construire la polaire du point *p*. On mènera par le point *p* deux sécantes *pmm′*, *pnn′*, à l'aide desquelles on déterminera deux points *q* et *q′* de la polaire.

Si le point *p* est extérieur, la polaire coupe la courbe en deux points, qui sont les points de contact des tangentes menées du point *p*.

Remarque. Dans la figure 172 la polaire du point *q* est la droite *pq′* et la polaire du point *q′* la droite *pq*. Le triangle ayant pour sommets les points *p*,*q*,*q′* possède donc cette pro-

priété remarquable que chacun de ses côtés est la polaire du sommet opposé par rapport à la courbe du second degré. On dit qu'un tel triangle est un triangle *autopolaire* ou un triangle *conjugué*, par rapport à la courbe du second degré. Inversement on dit aussi que la courbe est conjuguée au triangle.

FIGURES POLAIRES RÉCIPROQUES.

**288.** Étant donnée dans un plan une figure composée de points $a$, $b$, $c$,... et de droites A, B, C,..., si l'on prend les polaires A′, B′, C′,... des points, et les pôles $a'$, $b'$ $c'$,... des droites, par rapport à une section conique déterminée, on forme une seconde figure composée, comme la première, de droites et de points. En opérant de la même manière sur la seconde figure, c'est-à-dire en prenant les pôles des droites et les polaires des points, on retrouve la première. Ces deux figures ont été nommées pour cette raison figures *polaires réciproques* (fig. 173).

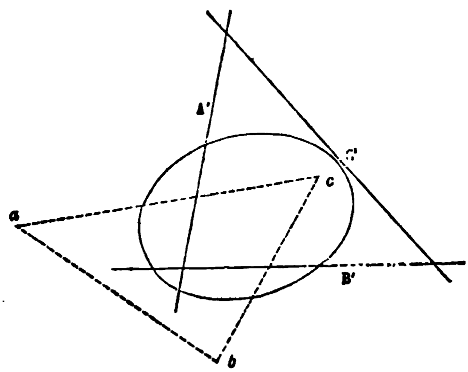


Fig. 173.

La droite $ab$, qui joint deux points $a$ et $b$ de l'une des figures, a pour pôle le point d'intersection des droites A′ et B′ de l'autre figure; et réciproquement le point d'intersection de deux droites A′ et B′ de l'une des figures a pour polaire la droite $ab$ de l'autre figure. Si plusieurs points $a$, $b$, $c$,... sont en ligne droite dans l'une des figures, les droites A′, B′, C′,... de l'autre figure passent par un même point, qui est le pôle de la droite. Réciproquement, si plusieurs droites A, B, C,... passent par un même point dans l'une des figures, les points $a'$, $b'$, $c'$,... de l'autre figure sont en ligne droite.

Étant donnée une courbe plane S, menons une tangente A à cette courbe et prenons le pôle $a'$ de cette tangente (fig. 174).

Si l'on fait rouler la tangente A sur la courbe S, le pôle $a'$ décrit une autre courbe S'. Soient A et B deux tangentes à la courbe S, $a'$ et $b'$ leurs pôles; le point d'intersection $m$ des deux droites A et B est le pôle de la droite $a'b'$. Si la tangente B se rapproche indéfiniment de la tangente A, le point $m$ tend vers le point de contact $a$ de la tangente A; en même temps la sécante $a'b'$ tourne autour du point $a'$ et devient tangente à la courbe S' au point $a'$. Ainsi, réciproquement, la courbe S est le lieu du pôle $a$ d'une tangente mobile A' à la courbe S'. Les points $a$ et $a'$ se correspondent, de telle sorte que la tangente en l'un de ces points est la polaire de l'autre. Les deux courbes S et S' sont dites pour cette raison *polaires réciproques*.

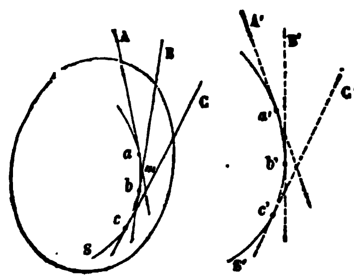


Fig. 174.

Soit (11) $$F(x, y) = 0$$
l'équation d'une courbe algébrique S du degré $m$; la tangente A au point $a$, dont les coordonnées sont $x$ et $y$, est représentée par l'équation

$$(12) \qquad XF'_x + YF'_y + ZF'_z = 0.$$

Appelons $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du pôle $a'$ de la droite A, par rapport à une courbe directrice du second degré $f(x, y) = 0$; l'équation de la polaire du point $a'$ est

$$(13) \qquad Xf'_{x_1} + Yf'_{y_1} + Zf'_{z_1} = 0.$$

Les deux équations (12) et (13), qui représentent la même droite, doivent être identiques, et l'on a les relations

$$(14) \qquad \frac{f'_{x_1}}{F'_x} = \frac{f'_{y_1}}{F'_y} = \frac{f'_{z_1}}{F'_z}.$$

Si, entre les trois équations (11) et (14), on élimine $x$ et $y$, on obtient l'équation de la courbe S', lieu du point $a'$.

Cherchons, par exemple, la courbe polaire réciproque de la section conique $Ax^2 + By^2 - 1 = 0$, par rapport au cercle directeur

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Si l'on remplace $x$ et $y$ par $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{z}$, ces deux équations prennent la forme homogène $Ax^2 + By^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, et les équations (14) deviennent $\frac{x_1}{Ax} = \frac{y_1}{By} = \frac{z_1}{z}$; on en déduit, en faisant $z = z_1 = 1$, $x = \frac{x_1}{A}$, $y = \frac{y_1}{B}$; en portant ces valeurs dans l'équation de la courbe proposée, on obtient l'équation $\frac{x_1^2}{A} + \frac{y_1^2}{B} - 1 = 0$. La courbe polaire réciproque est une nouvelle section conique.

**299.** Nous avons appelé *degré* ou *ordre* d'une courbe algébrique le degré de l'équation qui la représente en coordonnées rectilignes, ou le nombre des points, réels ou imaginaires, suivant lesquels la courbe est coupée par une droite quelconque. On appelle de même *classe* de la courbe le nombre des tangentes, réelles ou imaginaires, que l'on peut mener à la courbe par un point quelconque du plan. On sait que l'on peut mener d'un point quelconque deux tangentes à une courbe du second ordre; les courbes du second ordre appartiennent donc à la seconde classe.

Il est aisé de voir que deux courbes polaires réciproques S et S' (fig. 175) sont telles que l'ordre de l'une est égal à la classe de l'autre. Une droite quelconque P coupe la courbe S en $m$ points $a$, $b$, $c$,.....; à ces $m$ points correspondent $m$ droites A', B', C',... tangentes à la courbe S et passant par le point $p'$, pôle de la droite P; réciproquement, à chaque tangente A' menée du point $p'$ à la courbe S' correspond un point $a$ appartenant à la courbe S et situé sur la droite P. Ainsi, le nombre des tangentes que l'on peut mener du point $p'$ à la courbe S' est égal au nombre des points d'intersection de la courbe S par la droite P, et, par consé-

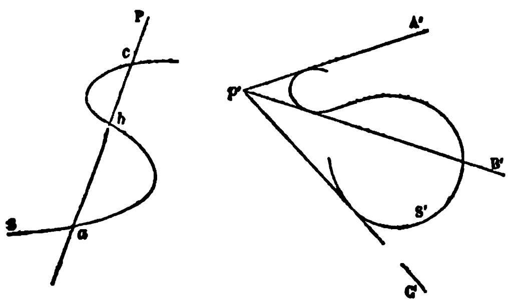


Fig. 175.

quent, la classe de la courbe S' est égale à l'ordre de la courbe S. De même, l'ordre de la courbe S' est égal à la classe de la courbe S.

Une courbe du second ordre étant de la seconde classe, il en résulte que la courbe polaire réciproque d'une courbe du second ordre est aussi du second ordre.

Il est même facile, dans ce cas, de déterminer l'espèce de la

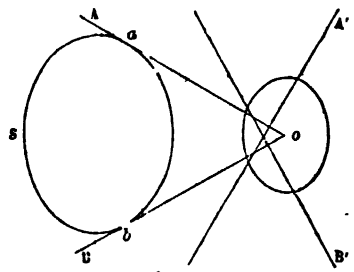


Fig. 176.

courbe. Si le centre *o* de la courbe directrice est situé en dehors de la courbe S, on peut de ce point mener deux tangentes réelles A et B à la courbe S (fig. 176); les pôles de ces tangentes s'éloignant à l'infini, on en conclut que la courbe S' a des branches infinies dans deux directions différentes; c'est donc une hyperbole. Soient *a* et *b* les points de contact des tangentes A et B; les polaires A' et B' de ces deux points sont les tangentes à la courbe S' aux points situés à l'infini; ce sont, par conséquent, les asymptotes. Lorsque le centre *o* de la courbe directrice est situé sur la courbe S, les points *a* et *b* coïncident avec le point *o*, la polaire de ce point, ou l'asymptote, est rejetée à l'infini, et la courbe S' est une parabole. Enfin, si le centre *o* de la courbe directrice est situé à l'intérieur de la courbe S, la courbe S' est une ellipse.

A deux points quelconques *a* et *b* de la conique S et aux tangentes A et B en ces points correspondent deux tangentes A et B' à la conique S' et leurs points de contact *a'* et *b'*. Au point d'intersection *c* des droites A et B correspond la droite *a'b'*, et à la droite *ab* le point d'intersection *c'* des droites A' et B'. Ainsi à un point *c* et à sa polaire *ab* dans la première figure correspondent dans la seconde figure une droite *a'b'* et son pôle *c'*.

**300.** La méthode des polaires réciproques a une grande importance dans l'étude des sections coniques; elle permet, quand on a trouvé une propriété de ces courbes, d'en déduire

immédiatement une propriété corrélative. Nous avons démontré, par exemple, au n° 275, que par cinq points donnés on peut faire passer une section conique et qu'on n'en peut faire passer qu'une; on en déduit que *l'on peut mener une section conique tangente à cinq droites données* et *qu'on n'en peut mener qu'une*. Concevons, en effet, que l'on ait tracé dans le plan une section conique quelconque pour servir de courbe directrice, et que, par rapport à cette section conique, on ait marqué les pôles $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$ des cinq droites données A, B, C, D, E; par les cinq points $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$ on peut faire passer une section conique S'; la courbe polaire réciproque de la courbe S' sera une section conique S tangente aux cinq droites données. Réciproquement, à toute section conique tangente aux cinq droites correspond une section conique passant par les cinq points; comme on ne peut faire passer qu'une section conique par les cinq points, il n'existe qu'une section conique tangente aux cinq droites.

Considérons les polaires d'un même point $p$ par rapport aux diverses coniques qui passent par quatre points donnés; si $f(x, y) = 0$, et $F(x, y) = 0$ sont les équations de deux d'entre elles, l'équation $f + kF = 0$, dans laquelle $k$ désigne un paramètre arbitraire, représentera l'ensemble de ces coniques. La polaire du point $p$, dont les coordonnées sont $x_1$ et $y_1$, a pour équation

$$x_1(f'_x + kF'_x) + y_1(f'_y + kF'_y) + z_1(f'_z + kF'_z) = 0,$$

ou

$$(x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z) + k(x_1 F'_x + y_1 F'_y + z_1 F'_z) = 0;$$

toutes les polaires passent par le point de rencontre $p'$ des deux droites

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0, \quad x_1 F'_x + y_1 F'_y + z_1 F'_z = 0.$$

Il est clair que, réciproquement, les polaires du point $p'$ par rapport aux diverses coniques, passent toutes par le point $p$.

Si l'on transforme la figure par la méthode des polaires réciproques, on en conclut que le lieu des pôles d'une même droite P par rapport aux diverses coniques tangentes à quatre droites données est une droite. Si la droite P s'éloigne à l'infini dans une direction arbitraire, son pôle par rapport à chacune des coniques est le centre de cette conique; ainsi le lieu des centres des coniques tangentes à quatre droites données est une droite. Chacune des diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites pouvant être regardée comme une ellipse ou une hyperbole infiniment aplatie tangente aux quatre droites, les milieux des trois diagonales appartiennent au lieu et déterminent cette droite (n° 73).

**301.** Théorème IV. *Étant données deux coniques dans un plan : 1° les points d'intersection des trois couples de sécantes communes déterminent un triangle dont chaque sommet a pour polaire, par rapport à chacune des coniques, le côté opposé; 2° les points d'intersection des quatre tangentes communes aux deux coniques sont situés deux à deux sur les côtés de ce triangle.*

Soient *a, b, c, d* (fig. 177) les quatre points communs aux deux coniques; les points de concours *m, n, p* des trois couples

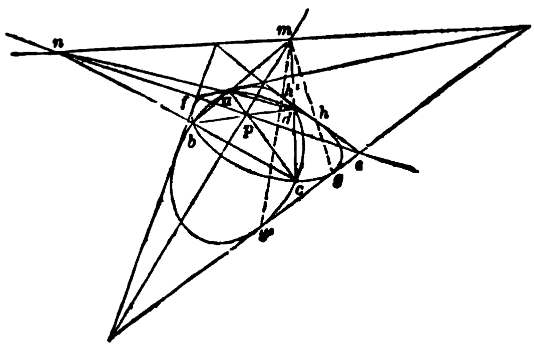



Fig. 177

de sécantes communes forment un triangle *mnp*, dont chaque sommet, d'après le théorème III, a pour polaire, par rapport à chacune des deux coniques, le côté opposé. Remarquons que ces trois points sont les seuls qui jouissent de la propriété d'avoir même polaire par rapport aux deux coniques. Soit, en effet, *m'* un point ayant même polaire par rapport aux deux coniques; la droite *m'a* coupe cette polaire en un certain point *q*, et chacune des coniques en un nouveau point qui est le conjugué harmonique de *a* par rapport aux deux points *m'* et *q*; ces deux nouveaux points devant coïncider, la droite *m'a* passe par l'un des points communs *b, c, d*, par exemple par le point *b*. Alors la droite *m'c* passera par le point *d*, et le point *m'* coïncidera avec le point *m*.

Imaginons maintenant que l'on transforme la figure précédente par la méthode des polaires réciproques. Aux deux coniques correspondent deux autres coniques; aux points *a, b, c, d*

communs aux deux premières des tangentes A', B', C', D' communes aux deux autres, ce qui montre que deux coniques admettent quatre tangentes communes.

Considérons l'une des tangentes communes aux deux coniques proposées ; soient *g* et *g'* les points de contact et *e* le point où elle rencontre la droite *np* ; les droites *mg*, *mg'* coupent les coniques en deux autres points *h* et *h'* ; le point *m*, ayant même polaire *np* par rapport aux deux coniques, les tangentes en *h* et *h'* passent par le point *e* ; la droite *np* étant aussi la polaire du point *m* par rapport aux deux angles *geh*, *g'eh'*, les deux droites *eh*, *eh'* coïncident, et la droite *ehh'* est une seconde tangente commune. Par la même raison, le point de rencontre *f* de l'une des autres tangentes communes avec la droite *np* appartient à la quatrième tangente. Ainsi les six points d'intersection des quatre tangentes communes sont situés deux à deux sur les côtés du triangle *mnp*.

Il résulte en outre de ce qui précède que les cordes de contact passent quatre à quatre par les points *m*, *n*, *p*.

**302.** Examinons en particulier le cas où la courbe directrice est un cercle de rayon *r* ; la polaire A' d'un point *a* est perpendiculaire à *oa* et à une distance du centre égale à $\frac{r^2}{oa}$. Les droites qui joignent le centre à deux points *a* et *b* font entre elles un angle *aob* égal à celui des polaires A' et B' de ces points (fig. 178).

Par le centre *o* menons des parallèles aux droites A' et B' ; des points *a* et *b* abaissons des perpendiculaires sur ces droites ; les triangles rectangles *oae*, *obf* sont semblables et donnent la proportion

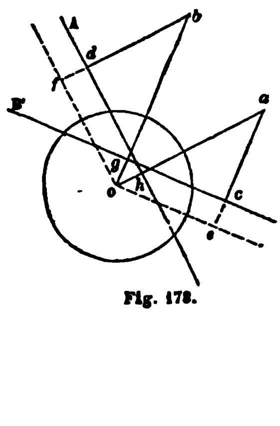



Fig. 178.

$$\frac{oa}{ob}=\frac{ae}{bf}=\frac{ac+ce}{bd+df}=\frac{ac+og}{bd+oh};$$

on en déduit $oa\,(bd+oh)=ob\,(ac+og)$ ; mais on a $oa\,.\,oh=ob\,.\,og=r^2$ ; il en résulte $oa\,.\,bd=ob\,.\,ac$, ou $\frac{oa}{ob}=\frac{ac}{bd}$. Ainsi les distances de deux points au centre sont proportionnelles aux distances de chacun d'eux à la polaire de l'autre.

Cherchons la courbe polaire réciproque d'un cercle de rayon $r'$ par rapport au cercle $o$. Soit C' la polaire du centre $c$ du cercle proposé (fig. 179); menons à ce cercle une tangente quelconque A et prenons le pôle $a'$ de cette droite; d'après la propriété précédente, on a $\frac{oa'}{oc} = \frac{a'd}{r'}$, ou $\frac{oa'}{a'd} = \frac{oc}{r'}$; le rapport des distances de chacun des points $a'$ du lieu au point $o$ et à la droite fixe C' est constant; donc ce lieu est une courbe du second degré, dont le point $o$ est l'un des foyers et la droite C' la directrice correspondante.

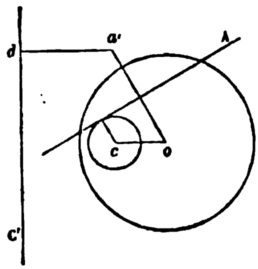


Fig. 179.

A l'aide de cette transformation, on peut déduire immédiatement des propriétés du cercle la plupart des propriétés focales des courbes du second degré. Ainsi, par exemple, deux tangentes A et B au cercle $c$ font des angles égaux avec la corde des contacts $ab$; aux droites A et B correspondent deux points $a'$ et $b'$ de la section conique; aux deux points $a$ et $b$ du cercle des tangentes A' et B' à cette section conique en $a'$ et $b'$; à la droite $ab$ ou M le point d'intersection $m'$ des droites A' et B'. Les rayons menés du foyer $o$ aux points $a'$, $b'$, $m'$ faisant entre eux des angles égaux à ceux de leurs polaires A, B, M, on en conclut que la droite $om'$ est bissectrice de l'angle $a'ob'$ (n° 255).

Le lieu du sommet $m$ d'un angle constant circonscrit au cercle est un cercle concentrique. Aux deux tangentes A et B menées du point $m$ au cercle $c$ correspondent deux points $a'$ et $b'$ de la conique, et au point $m$ la droite $a'b'$; l'angle $a'ob'$, étant égal à celui des droites A et B, est aussi constant; le point $m$ décrivant un cercle dont le centre est $c$, sa polaire $a'b'$ enveloppe une section conique, dont le point $o$ est l'un des foyers et la polaire du centre $c$ la directrice correspondante. Ainsi *la corde vue du foyer d'une section conique sous un angle constant enveloppe une section conique qui a même foyer et même directrice.* La corde $ab$ du cercle enveloppe un cercle concentrique; donc le point de concours des tangentes à la section conique en $a'$ et $b'$ décrit une section conique qui a aussi même foyer et même directrice.

## COURBES ENVELOPPES.

**303.** Dans ce qui précède, nous avons été amenés à considérer les courbes tangentes à des séries de droites; lorsqu'un point décrit une courbe, sa polaire reste tangente à une autre

courbe. On appelle, en général, *enveloppe* d'une ligne mobile une courbe à laquelle cette ligne reste constamment tangente; les diverses positions de la ligne mobile sont les *enveloppées*.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0$$

une équation, renfermant un paramètre variable $a$. A chaque valeur de $a$ correspond une ligne déterminée. Donnons au paramètre deux valeurs voisines $a$ et $a+h$; la ligne (1) et la ligne

$$(2) \qquad f(x, y, a+h) = 0$$

se coupent en un point M' (fig. 180), dont les coordonnées vérifient à la fois les équations (1) et (2). Le système de ces deux équations peut être remplacé par le suivant :

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = 0,$$

qui, lorsque $h$ tend vers zéro, se réduit à

$$(3) \qquad f(x, y, a) = 0 \quad , \quad f'_a(x, y, a) = 0.$$

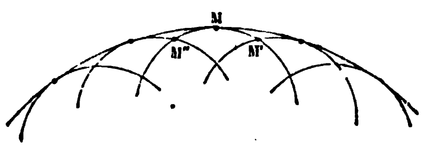



Fig. 180.

Ainsi, quand $h$ tend vers zéro, le point M' se deplace sur la ligne (1) et tend vers une position limite M; c'est ce point limite qui est représenté par le système (3). Chacune des lignes (1) contient un point limite; on obtient le lieu de ces points, que l'on désigne quelquefois sous le nom de lieu des *intersections successives* des lignes représentées par l'équation (1), en éliminant $a$ entre les équations (3).

Considérons de nouveau le système des équations (1) et (2), dans lesquelles nous regardons $a$ comme une variable et $h$ comme une constante; ce système représente le lieu des points suivant lesquels chaque ligne ($a$) est coupée par la ligne ($a+h$). Deux de ces points se trouvent sur la ligne ($a$), savoir : le point d'intersection M' des lignes ($a$) et ($a+h$), le point d'intersection M'' des lignes ($a-h$) et ($a$). Quand $h$ tend vers zéro, les deux points M' et M'' tendent vers la même position limite M, et le lieu devient tangent à la ligne ($a$) au point M. Ainsi *le lieu des*

*intersections successives des lignes représentées par l'équation* (1) *est tangent à chacune de ces lignes.*

Remarque. Lorsque $f(x, y, a)$ est un polynôme par rapport à $a$, éliminer $a$ entre les équations (3) c'est exprimer que l'équation en $a$

$$f(x,y,a)=0$$

*a une racine double.*

Par exemple, si $a$ entre au second degré dans $f(x, y, a)$ et si l'on a pour l'équation de la courbe mobile une équation de la forme

$$Ma^2+2Na+P=0$$

M, N, P étant des polynômes en $x$ et $y$, l'équation de l'enveloppe s'obtiendra en exprimant que l'équation en $a$ admet une racine double : elle sera donc

$$N^2-MP=0.$$

En suivant cette méthode on verra facilement que l'enveloppe des coniques ayant pour équation

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}+\frac{\beta^2}{1-\lambda}-\gamma^2-0$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignent des fonctions linéaires données de $x$ et $y$, et $\lambda$ un paramètre variable, se compose de quatre droites. (N° 282 *bis*.)

304. Supposons maintenant que la ligne mobile soit représentée par une équation

$$(4) \qquad f(x,y,a,b)=0,$$

contenant deux paramètres variables $a$ et $b$, liés par la relation

$$(5) \qquad \varphi(a,b)=0.$$

Si l'on appelle $b'$ la dérivée de $b$ considérée comme une fonction de $a$ donnée par l'équation (5), on a $\varphi'_a+\varphi'_b\,b'=0$; d'où $b'=-\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b}$. Mais, si l'on égale à zéro la dérivée par rapport à $a$ de la fonction $f(x, y, a, b)$, dans laquelle on regarde $b$ comme une fonction de $a$, on a $f'_a+f'_b\,b'=0$; on en déduit la relation

(6) $$\frac{\varphi'_a}{f'_a} = \frac{\varphi'_b}{f'_b},$$

et, pour trouver l'équation de l'enveloppe, on éliminera les deux paramètres $a$ et $b$ entre les trois équations (4), (5), (6).

**Exemple I.** Cherchons l'enveloppe des normales à une parabole. La normale à la parabole $y^2 - 2px = 0$, au point M (fig. 181) dont les coordonnées sont $x$ et $y$, a pour équations $p(Y-y) + y(X-x) = 0$; si l'on remplace $x$ par la quantité égale $\frac{y^2}{2p}$; cette équation devient

(7) $$pY + y(X-p) - \frac{y^3}{2p} = 0;$$

elle renferme un paramètre arbitraire $y$; il faut égaler à zéro la dérivée par rapport à $y$,

(8) $$X - p - \frac{3y^2}{2p} = 0,$$

et éliminer $y$ entre les équations (7) et (8). En remplaçant $y^2$ dans l'équation (7) par sa valeur tirée de l'équation (8), on a

$$y = -\frac{3pY}{2(X-p)};$$

portant cette valeur de $y$ dans l'équation (8), on obtient l'équation de l'enveloppe

(9) $$Y^2 = \frac{8(X-p)^3}{27p}.$$

Cette courbe a la forme indiquée dans la figure; elle présente un rebroussement en C; car la tangente en ce point, étant normale à la parabole au sommet A, coïncide avec l'axe AX. Quand le point M décrit la branche AB de la parabole, la normale roule sur la branche CD de l'enveloppe; et de même, quand le point M décrit la branche AB′ de la parabole, la normale roule sur la branche CD′ de l'enveloppe.

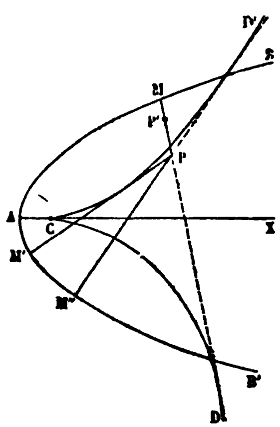


Fig. 181.

Si l'on veut mener des normales à la parabole par un point donné P, il suffira de regarder X et Y dans l'équation (7) comme les coordonnées du point P et l'ordonnée $y$ du pied M de la normale comme l'inconnue; on peut mener du point P trois normales à la parabole, ou une seule, suivant que cette équation du troisième degré en $y$ admet

trois racines réelles ou une seule. Cette question revient évidemment à mener des tangentes à l'enveloppe par le point P; ainsi l'enveloppe, qui est du troisième degré, est aussi de la troisième classe. Lorsque le point P est situé entre les deux branches de l'enveloppe, on peut mener de ce point trois tangentes à l'enveloppe, et, par conséquent, trois normales à la parabole; mais, lorsque le point est situé en P' à l'extérieur, on ne peut mener qu'une seule tangente à l'enveloppe, et, par conséquent, une seule normale à la parabole.

Exemple II. Cherchons encore l'enveloppe des normales à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

l'équation de la normale au point $(x, y)$

$$\frac{a^2 X}{x}-\frac{b^2 Y}{y}-(a^2-b^2)=0 \tag{10}$$

renferme deux paramètres variables $x$ et $y$, liés par la relation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0. \tag{11}$$

L'équation (6) du n° 304 devient

$$\frac{\dfrac{x}{a^2}}{-\dfrac{a^2 X}{x^2}}=\frac{\dfrac{y}{b^2}}{\dfrac{b^2 Y}{y^2}}=\frac{1}{b^2-a^2};$$

on a obtenu le troisième rapport en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs, après avoir multiplié les deux termes du premier par $x$, les deux termes du second par $y$, et tenant compte des équations (10) et (11); on en déduit

$$x^3=\frac{a^4 X}{c^2},\quad y^3=-\frac{b^4 Y}{c^2}:$$

portant ces valeurs dans l'équation (11), on obtient l'équation de l'enveloppe

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1. \tag{12}$$

Cette courbe présente quatre points de rebroussement (fig. 182). Quand le pied M de la normale décrit l'arc AB de l'ellipse, la normale roule sur l'arc CD de l'enveloppe. Si l'on veut mener des normales à l'ellipse par un point donné P, ayant pour coordonnées X et Y, les deux équations simultanées (10) et (11) donneront les coordonnées $x$ et $y$ du pied de chacune des normales; les pieds des normales sont les points d'intersection de l'ellipse proposée (11) et d'une hyperbole (10); il y a quatre solutions. Mais cette question revient à mener les

tangentes à l'enveloppe par le point P; on en conclut que l'enveloppe qui est du sixième degré est de la quatrième classe. Lorsque le point P est situé à l'intérieur de l'enveloppe, on peut mener de ce point quatre tangentes à l'enveloppe, et, par conséquent, quatre normales réelles à l'ellipse; mais lorsque le point est situé à l'extérieur, par exemple en P′, on ne peut plus mener que deux tangentes réelles à l'enveloppe, et, par conséquent, deux normales à l'ellipse; on retrouve ainsi les résultats obtenus au n° 290.

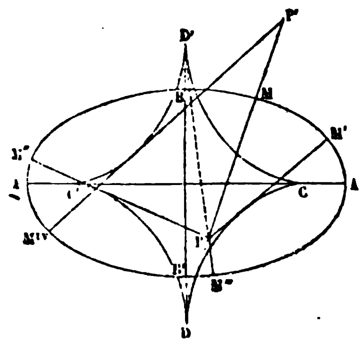


Fig. 182.

L'enveloppe des normales à l'hyperbole a pour équation

$$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \tag{13}$$

303. Lorsqu'un plan mobile se meut dans un plan fixe, il arrive souvent qu'une courbe CD du plan mobile reste tangente à une courbe AB du plan fixe; cette seconde courbe est l'enveloppe de la première. Soient CD et C′D′ (fig. 183) deux positions voisines de la courbe mobile, M′ un point d'intersection de ces deux courbes. Quand la courbe C′D′ se rapproche indéfiniment de CD, le point M′ tend vers une position limite M, qui est un point de l'enveloppe (n° 303). Désignons par $M_1$ le point de la courbe CD qui est venu en M′, quand cette courbe occupe la position C′D′. Nous avons vu (n° 31) que l'on peut amener la courbe mobile de la première position à la seconde en la faisant tourner autour d'un certain point $I_1$; la perpendiculaire $PI_1$, élevée sur le milieu de la corde $M_1M'$, passe par le point $I_1$. Mais les deux points $M_1$ et M′ ont pour limite commune le point M, et la droite $PI_1$ devient la normale commune à la courbe CD et à son enveloppe,

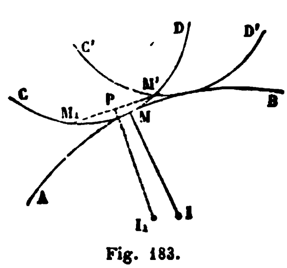


Fig. 183.

au point M; cette normale passe donc par le point I, position limite du point $I_1$. On en conclut que *les normales aux diverses courbes situées dans le plan mobile, aux points où elles touchent leurs enveloppes, pour une position du plan mobile, passent par un même point* I. Ce point est celui par lequel passent les normales aux courbes décrites par les points du plan mobile, pour cette même position du plan.

Lorsqu'une courbe du plan mobile est assujettie à rester tangente à une courbe donnée du plan fixe, on peut se servir de la normale commune aux deux courbes pour déterminer le point I. La podaire d'une courbe AB (fig. 31) par rapport au point O (n° 38) n'est autre chose que le lieu décrit par le sommet P d'un angle droit OPM situé dans un plan mobile, qui se meut de manière que l'un de ses côtés PM reste tangent à la courbe AB, tandis que l'autre passe par le point fixe O, c'est-à-dire reste tangent à un cercle de rayon nul dont le centre est O; on en conclut que le point I se trouve à l'intersection des perpendiculaires menées par les points O et M aux deux côtés OP et PM de l'angle droit; on retrouve ainsi la construction que nous avons donnée au n° 38.

## COORDONNÉES TANGENTIELLES.

**306.** On peut regarder une courbe soit comme le lieu d'un point, soit comme l'enveloppe d'une droite mobile. A ce dernier point de vue, nous représenterons la droite par une équation de la forme

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{14}$$

et nous dirons, par analogie, que les valeurs des deux paramètres $u$ et $v$, qui déterminent sa position, sont les coordonnées de la droite.

Si l'on donne une équation

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{15}$$

entre ces deux paramètres, et que l'on fasse varier l'un d'eux d'une manière continue, l'autre variera aussi en général d'une manière continue, et la droite se mouvra dans le plan, enveloppant une courbe. On peut concevoir que l'équation (15) représente la courbe par la suite de ses tangentes, à l'aide d'un nouveau système de coordonnées $u$ et $v$, auxquelles il convient de donner le nom de *coordonnées tangentielles*.

Pour avoir l'équation de cette courbe en coordonnées linéaires, il suffit, d'après ce que nous avons dit au n° 304, d'éliminer $u$ et $v$ entre les équations (14), (15) et

$$(16) \qquad \frac{x}{\varphi'_u} = \frac{y}{\varphi'_v}.$$

Si l'équation (15) est algébrique, l'équation en $x$ et $y$, à laquelle on arrivera, sera aussi algébrique. Rendons l'équation $\varphi(u, v) = 0$ homogène en remplaçant $u$ et $v$ par $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ et chassant les dénominateurs. L'équation $\varphi = 0$ pourra être remplacée par la suivante

$$u\varphi'_u + v\varphi'_v + \varphi'_w = 0$$

dans laquelle on fera, après les dérivations, $w = 1$. Donc en appelant $\lambda$ la valeur commune des rapports (16), il faudra éliminer $u$, $v$, $\lambda$ entre les quatre équations

$$x = \lambda\varphi'_u \quad , \quad y = \lambda\varphi'_v$$
$$ux + vy + 1 = 0$$
$$u\varphi'_u + v\varphi'_v + \varphi'_w = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par $u$, la deuxième par $v$ et ajoutons-les en tenant compte des deux dernières équations; nous aurons l'équation

$$1 = \lambda\varphi'_w$$

qui pourra remplacer l'une des deux dernières équations, par exemple la dernière. On aura donc à éliminer $u$, $v$, $\lambda$ entre les équations

$$(17) \qquad x = \lambda\varphi'_u \quad , \quad y = \lambda\varphi'_v \quad , \quad 1 = \lambda\varphi'_w$$
$$ux + vy + 1 = 0.$$

Le degré de l'équation (15), mise sous forme entière, indique

la classe de la courbe. En effet, si $x_0$ et $y_0$ sont les coordonnées d'un point quelconque du plan, chaque système de valeurs de $u$ et $v$, vérifiant les deux équations

$$ux_0 + vy_0 + 1 = 0 \quad , \quad \varphi(u,v) = 0,$$

donnera une tangente, réelle ou imaginaire, passant par le point considéré. Lorsque l'équation (15) est du second degré, la courbe, étant de la seconde classe, est aussi du second ordre. (N° 309.)

Une équation du premier degré

$$Au + Bv + C = 0,$$

en coordonnées tangentielles, représente un point, le point qui admet les coordonnées linéaires $x_0 = \frac{A}{C}$, $y_0 = \frac{B}{C}$; car cette équation, mise sous la forme

$$ux_0 + vy_0 + 1 = 0,$$

indique que la droite mobile passe constamment par le point fixe $(x_0, y_0)$; l'enveloppe se réduit donc à un point.

Les propriétés de l'équation du premier degré en coordonnées linéaires, que nous avons étudiées dans le livre II, se reproduisent ici, avec cette modification que les points sont remplacés par des droites et les droites par des points. Ainsi l'équation

$$v - v' = a(u - u'),$$

dans laquelle le paramètre $a$ est arbitraire (n° 64), est l'équation générale des points situés sur la droite $(u', v')$. L'équation (n° 66)

$$(18) \qquad v - v' = \frac{v'' - v'}{u'' - u'}(u - u')$$

représente le point d'intersection des deux droites $(u', v')$, $(u'', v'')$.

Considérons deux tangentes voisines de la courbe (15), et supposons que la seconde se rapproche de plus en plus de la première; leur point d'intersection, représenté par l'équation (18), aura pour limite le point de contact de la première

tangente; le point de contact est donc représenté par l'équation (n° 89)

$$v - v' = -\frac{\varphi'_{u'}}{\varphi'_{v'}}(u - u'),$$

ou

(19) $$(u - u')\varphi'_{u'} + (v - v')\varphi'_{v'} = 0.$$

En remplaçant $u$ et $v$ par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$, afin de rendre l'équation homogène (n° 291), on réduit cette équation et on la met sous la forme

(20) $$u\varphi'_{u'} + v\varphi'_{v'} + w\varphi'_{w'} = 0.$$

**307.** Il est bon de remarquer que la recherche de l'enveloppe d'une droite mobile peut être ramenée à la théorie des polaires réciproques. Car cette courbe enveloppe S est la courbe polaire réciproque de la courbe S' décrite par le pôle de la droite, relativement à une conique donnée. Si l'on prend comme courbe directrice le cercle imaginaire $x^2 + y^2 + 1 = 0$, et si l'on fait $x_1 = u$, $y_1 = v$, la droite $xx_1 + yy_1 + 1 = 0$, polaire du point $(x_1, y_1)$, coïncide avec la droite mobile (14); ainsi la courbe S' a pour équation $\varphi(x_1, y_1) = 0$ en coordonnées linéaires :

Exemple I. Trouver l'enveloppe d'une droite telle que les produits de ses distances à deux points fixes F et F' soient égaux à une quantité donnée. En prenant pour axe des $x$ la droite FF' et pour axe des $y$ une perpendiculaire sur le milieu de cette droite, appelant $2c$ la distance FF', $b^2$ le produit constant, et représentant la droite mobile par une équation de la forme $ux + vy + 1 = 0$, on a, entre les deux paramètres variables $u$ et $v$, la relation

$$(c^2 \pm b^2)u^2 \pm b^2v^2 - 1 = 0;$$

il faut prendre le signe + ou le signe −, suivant que la droite laisse les deux points d'un même côté ou passe entre les deux. La courbe S' ayant pour équation

$$(c^2 \pm b^2)x_1^2 \pm b^2y_1^2 - 1 = 2.$$

l'équation de la courbe cherchée S, ou de la polaire réciproque (n° 298), est

$$\frac{x^2}{(c^2 \pm b^2)} + \frac{y^2}{\pm b^2} - 1 = 0.$$

C'est une ellipse ou une hyperbole dont les points F et F' sont les

foyers. Cette propriété est la réciproque du théorème démontré au n° 259.

EXEMPLE II. Étant donné un quadrilatère *abcd*, trouver l'enveloppe d'une droite telle que le produit de ses distances à deux sommets opposés soit au produit de ses distances aux deux autres sommets dans un rapport constant. Appelons $x_1$ et $y_1$, $x_2$ et $y_2$, $x_3$ et $y_3$, $x_4$ et $y_4$ les coordonnées des quatre sommets, et représentons la droite mobile par l'équation $ux + vy + 1 = 0$; on aura entre les deux paramètres $u$ et $v$ la relation

$$(ux_1 + vy_1 + 1)(ux_3 + vy_3 + 1) - k^2(ux_2 + vy_2 + 1)(ux_4 + vy_4 + 1) = 0;$$

cette relation étant du second degré, on en conclut que l'enveloppe est une courbe de la seconde classe ou du second ordre. L'équation précédente est vérifiée quand la droite mobile coïncide avec l'un des côtés du quadrilatère, puisque dans chaque terme un facteur s'annule. Ainsi la courbe est inscrite dans le quadrilatère et on peut donner au rapport $k$ une valeur telle que la courbe soit tangente à une cinquième droite quelconque. Il en résulte cette propriété générale des sections coniques : *un quadrilatère étant circonscrit à une section conique, le produit des distances d'une tangente quelconque à deux sommets opposés du quadrilatère est au produit des distances de cette même tangente aux deux autres sommets dans un rapport constant.*

308. *Équation tangentielle d'une conique.* Soit une conique ayant pour équation

$$(21) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation tangentielle de cette courbe est la condition nécessaire et suffisante pour que la droite $ux + vy + 1 = 0$ lui soit tangente, c'est-à-dire (n° 126):

$$(22) \qquad \mathfrak{a}u^2 + 2\mathfrak{b}uv + \mathfrak{c}v^2 + 2\mathfrak{d}u + 2\mathfrak{e}v + \mathfrak{f} = 0$$

équation dont le terme constant $\mathfrak{f}$ est nul quand la conique est une parabole.

Lorsque la conique donnée (21) est formée de deux droites non confondues, on prévoit que la condition (22) doit exprimer que la droite $ux + vy + 1 = 0$ passe par le point de concours des deux droites. Effectivement, si l'on appelle $a$ et $b$ les coordonnées de ce point de concours, le premier membre de l'équation tangentielle (22) est un *carré parfait*, le carré de

$$au + bv + 1.$$

Pour le démontrer, il suffit de s'appuyer sur ce théorème que les coordonnées $a$ et $b$ vérifient les relations (chapitre XII),

$$\frac{a^2}{\mathbf{a}} = \frac{ab}{\mathbf{b}} = \frac{b^2}{\mathbf{c}} = \frac{a}{\mathbf{d}} = \frac{b}{\mathbf{e}} = \frac{1}{\mathbf{f}}.$$

L'équation (22) devient alors en remplaçant les coefficients $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,... par les valeurs proportionnelles $a^2$, $ab$,...

$$(au + bv + 1)^2;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le cas particulier où l'équation (21) représenterait deux droites parallèles on aurait

$$\mathbf{d} = 0 \quad , \quad \mathbf{e} = 0 \quad , \quad \mathbf{f} = 0$$

et

$$\mathbf{b}^2 - \mathbf{ac} = -F\Delta = 0;$$

l'équation (22) deviendrait alors

$$\mathbf{a}u^2 + 2\mathbf{b}uv + \mathbf{c}v^2 = 0$$

ou

$$(\mathbf{b}u + \mathbf{c}v)^2 = 0$$

c'est-à-dire encore un *carré parfait*. Il est facile de vérifier que la condition

$$\mathbf{b}u + \mathbf{c}v = 0$$

exprime que la droite $ux + vy + 1 = 0$ est parallèle aux deux droites représentées par l'équation (21) : on peut dire encore que cette condition exprime que la droite $ux + vy + 1 = 0$ passe par le point de concours des deux droites représentées par l'équation (21).

Lorsque l'équation (21) représente deux droites confondues, le premier membre de l'équation tangentielle (22) est identiquement nul : on a en effet dans ce cas

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d} = \mathbf{e} = \mathbf{f} = 0.$$

**309.** Nous venons de voir que l'équation tangentielle d'une conique est du second degré en $u$ et $v$. Réciproquement une équation du second degré entre $u$ et $v$

$$(23) \quad \varphi(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0$$

dans laquelle le discriminant $\Delta = ACF - \ldots$ est différent de zéro est l'équation tangentielle d'une conique. En effet pour trouver l'enveloppe de la droite

$$ux + vy + 1 = 0$$

dont les coefficients vérifient l'équation $\varphi(u, v) = 0$, il suffit d'éliminer $u$, $v$ et $\lambda$ entre les équations (17)

$$\begin{aligned} x &= \lambda(Au + Bv + D) \\ y &= \lambda(Bu + Cv + E) \\ 1 &= \lambda(Du + Ev + F) \\ 0 &= \lambda(ux + vy + 1) \end{aligned}$$

où l'on a multiplié la dernière des équations (17) par $\lambda$. Le résultat de l'élimination de $\lambda u$, $\lambda v$ et $\lambda$ entre ces équations du premier degré est la condition

$$\begin{vmatrix} A & B & D & x \\ B & C & E & y \\ D & E & F & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou (24) $$\mathbf{a}x^2 + 2\mathbf{b}xy + \mathbf{c}y^2 + 2\mathbf{d}x + 2\mathbf{e}y + \mathbf{f} = 0$$

équation d'une conique. On voit que l'on passe de l'équation (23) à (24) de la même façon que de l'équation (21) à l'équation (22). On vérifiera facilement que l'équation tangentielle de la conique (24) est identique à l'équation (23).

Nous avons supposé que le discriminant $\Delta$ de l'équation (23) est différent de zéro. Si ce discriminant est nul sans que tous ses mineurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.. le soient, la fonction $\varphi(u, v)$ se décomposera en un produit de deux facteurs du premier degré en $u$, $v$. Dans ce cas l'équation $\varphi(u, v) = 0$ représentera *deux points* qui pourront d'ailleurs être réels ou imaginaires et le premier membre de l'équation (24) sera un carré parfait, le carré du premier membre de l'équation de la droite joignant les deux points. C'est ce qu'on démontrera par un calcul identique à celui du numéro précédent.

Enfin si le discriminant $\Delta$ est nul ainsi que tous ses mineurs, l'équation (23) a pour premier membre un carré parfait : elle représente deux points confondus. L'équation (24) est nulle identiquement.

# CHAPITRE XI

## Propriétés générales des sections coniques.

### THÉORÈMES DE PASCAL ET DE BRIANCHON

**310.** Théorème I. *Lorsque trois sections coniques ont deux points communs, les trois droites qui joignent les autres points d'intersection des courbes deux à deux passent par un même point.*

Soit $S=0$ l'équation de l'une des sections coniques, $\alpha=0$ l'équation de la droite qui passe par les deux points communs, les équations des deux autres sections coniques seront de la forme $S-k\alpha\beta=0$, $S-k'\gamma\alpha=0$. Les trois droites, qui passent par les deux autres points d'intersection des courbes considérées deux à deux, sont $\beta=0$, $\gamma=0$, $k\beta-k'\gamma=0$; la troisième passe par le point d'intersection des deux premières.

**311.** Théorème II. *Un hexagone étant inscrit dans une section conique, les points de rencontre des côtés opposés sont en ligne droite.*

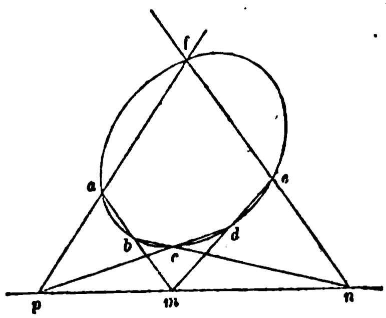


Fig. 184.

Ce théorème que l'on doit à Pascal, est une conséquence du théorème précédent. Soit *abcdef* (fig. 184) un hexagone inscrit dans une section conique; la courbe et les deux couples de droites *ab* et *cd*, *af* et *de*, peuvent être regardées comme trois sections coniques ayant deux points communs *a* et *d*. La droite *bc* joint les deux autres points d'intersection *b* et *c* de la courbe et des deux droites *ab* et *cd*; la droite *ef* joint les deux autres points d'intersection *e* et *f* de la courbe et des deux droites *af* et *de*; d'ailleurs les deux couples de droites se coupent en *m* et *p*; les trois droites *bc*, *ef*, *mp* passent par un même point *n*; donc les trois points

d'intersection *m*, *n*, *p* des côtés opposés de l'hexagone inscrit sont en ligne droite.

Ce théorème ne s'applique pas seulement à un hexagone convexe, mais encore à un hexagone fermé quelconque. On forme un hexagone inscrit en traçant six cordes consécutives, dans un sens ou dans l'autre, de manière à revenir finalement au point de départ. Si l'on numérote les côtés dans l'ordre suivant lequel on les a obtenus, les trois points d'intersection des côtés (1,4), (2,5), (3,6) sont en ligne droite (fig. 185).

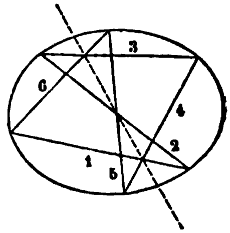


Fig. 185.

Corollaire I. Lorsqu'on définit une section conique par cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, le théorème précédent permet de construire autant de points de la courbe que l'on veut. Par le point *a* traçons une droite quelconque *af* et cherchons le point *f* où cette droite coupe la courbe (fig. 184); on marquera le point d'intersection *m* des droites *ab* et *de*, le point d'intersection *p* des droites *cd* et *af*; la droite *bc* ira rencontrer la droite *mp* en un point *n*; le point *f*, où la droite *ne* rencontre *af*, appartient à la courbe.

On peut aussi construire la tangente en l'un des points. Quand deux sommets de l'hexagone inscrit, par exemple *a* et *f*, se confondent, le côté intermédiaire *af* devient la tangente à la courbe au point *a*; si l'on applique le théorème de l'hexagone inscrit, en comptant cette tangente comme un côté, on a encore trois points en ligne droite. On marquera donc le point d'intersection *m* des côtés *ab* et *de* (fig. 186), le point d'intersection *n* des côtés *bc* et *ae*; la droite *cd* rencontrera la droite *mn* en un point *p*; la droite *ap* sera la tangente en *a*.

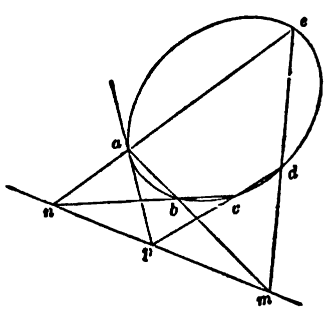


Fig. 186

Corollaire II. *Un quadrilatère* abcd *étant inscrit dans une*

*section conique, les points de rencontre des côtés opposés, et les points de rencontre des tangentes aux sommets opposés, sont en ligne droite.*

Si, avec les tangentes en $a$ et $c$, on complète l'hexagone inscrit, on aura trois points $m$, $n$, $p$ en ligne droite (fig. 187). En complétant l'hexagone avec les tangentes en $b$ et $d$, on aura de même trois points $m$, $n$, $q$ en ligne droite.

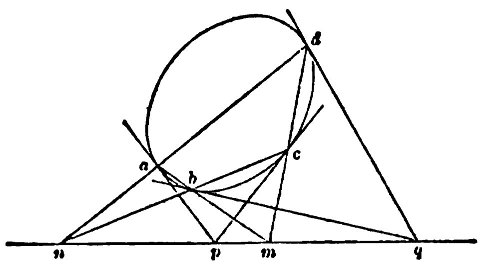


Fig. 187.

Donc les quatre points $m$, $n$, $p$, $q$ sont en ligne droite.

COROLLAIRE III. *Un triangle étant inscrit dans une section conique, les points d'intersection des côtés et des tangentes aux sommets opposés sont en ligne droite.*

**312.** REMARQUE. Nous avons vu que par cinq points $a, b, c, d, e$ tels que trois d'entre eux ne soient pas en ligne droite, passe une section conique et une seule. On peut obtenir les éléments de cette courbe de la manière suivante : on commence par déterminer les tangentes A, B, C, en trois des points donnés $a$, $b$, $c$. Dans toute courbe du second degré les tangentes aux extrémités d'une corde se coupent sur le diamètre conjugué à cette corde; par conséquent, la ligne qui joint le point de rencontre $p$ des droites A et B au point milieu $g$ de la droite $ab$ est le diamètre des cordes parallèles à $ab$; de même la ligne qui joint le point de rencontre $q$ des droites B et C au milieu $h$ de $bc$ est le diamètre des cordes parallèles à $bc$. Supposons d'abord que les deux diamètres $pg$, $qh$ se coupent en un point $o$; dans ce cas, la courbe est une courbe à centre, et le centre est le point $o$. La droite $op$ et la droite $ok$ parallèle à $ab$ forment un système de diamètres conjugués. Si l'on appelle $a'$ la longueur du demi-diamètre dirigé suivant $op$, on a $a' = \sqrt{op.\ og}$; on obtient de même la longueur $b'$ du demi-diamètre dirigé suivant $ok$. Nous avons expliqué

(nos 174 et 195) comment on détermine les axes, quand on connaît un système de diamètres conjugués $a'$ et $b'$.

Si les deux diamètres sont parallèles, la courbe est une parabole. Dans ce cas, on mène les diamètres qui passent en $a$ et $b$, puis des droites faisant avec les tangentes des angles égaux à ceux des diamètres avec les tangentes; ces deux droites se coupent au foyer de la parabole. En abaissant du foyer des perpendiculaires sur les tangentes A et B, et prolongeant chacune des perpendiculaires d'une longueur égale à elle-même, on a deux points de la directrice.

Lorsqu'on donne trois points et les tangentes en deux de ces points, on détermine la tangente au troisième point à l'aide de la propriété du triangle inscrit, puis on opère comme précédemment. La construction relative à la parabole peut évidemment être employée quand on connaît deux tangentes à la courbe et les points de contact.

**313.** Supposons enfin que l'on veuille trouver les éléments d'une parabole déterminée par quatre points $a$, $b$, $c$, $d$. Si l'on prend pour axes des coordonnées les deux droites $ab$, $cd$, les équations des paraboles passant par les points donnés sont (no 276)

$$\frac{x^2}{ab} \pm \frac{2xy}{\sqrt{abcd}} + \frac{y^2}{cd} + \ldots = 0.$$

Les coefficients angulaires des axes des paraboles étant $\pm\sqrt{\frac{cd}{ab}}$, on en conclut que ces axes sont parallèles aux diagonales d'un parallélogramme formé sur les axes des coordonnées et dont les côtés auraient pour longueurs les moyennes proportionnelles entre $a$ et $b$, $c$ et $d$. Connaissant la direction de l'axe, le théorème sur le pentagone inscrit donnera, en supposant que le point $e$ s'éloigne indéfiniment, c'est-à-dire que les droites $ae$ et $de$, par exemple, deviennent parallèles à l'axe (fig. 186). la tangente en l'un des points. Lorsqu'on aura déterminé deux tangentes, on sera ramené au cas précédent.

**314.** THÉORÈME V. *Un hexagone étant circonscrit à une section*

*conique, les trois droites qui joignent les sommets opposés passent par un même point.*

Ce théorème, trouvé par Brianchon, se déduit du précédent par la méthode des polaires réciproques. Soit *abcdef* (fig. 188) un hexagone circonscrit à une section conique; l'hexagone inscrit, qui a pour sommets les points de contact, est la figure corrélative de l'hexagone circonscrit, par rapport à la section conique proposée; car les sommets *a*, *b*, *c*,... de l'hexagone circonscrit sont les pôles des côtés A′, B′, C′,... de l'hexagone inscrit. La diagonale *ad* de l'hexagone circonscrit est la polaire du point d'intersection *m′* des côtés opposés A′ et D′ de l'hexagone inscrit; de même la diagonale *be* est la polaire du point d'intersection *n′* des côtés B′ et E′ et la diagonale *cf* la polaire du point d'intersection *p′* des côtés C′ et F′. Puisque les trois points *m′*, *n′*, *p′* sont en ligne droite, les trois droites *ad*, *be*, *cf* passent par un même point *o*, pôle de cette droite.

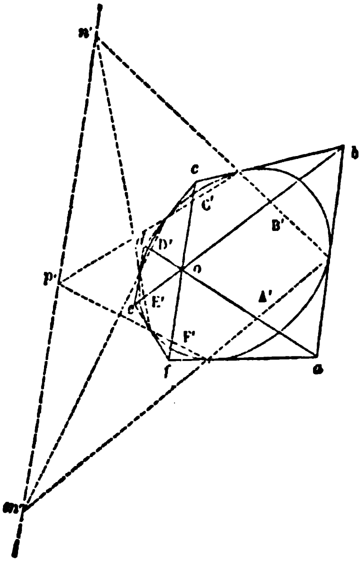



Fig. 188.

Nous ferons ici une remarque analogue à celle qui a été faite à propos du théorème de Pascal. Il n'est pas nécessaire que l'hexagone circonscrit soit convexe, il suffit qu'il soit fermé. Supposons qu'on ait tracé six tangentes à une section conique; pour former l'hexagone, partant du point d'intersection de deux tangentes, on s'avancera sur l'une d'elles jusqu'à la rencontre d'une autre tangente; puis sur cette seconde tangente, dans un sens ou dans l'autre, jusqu'à la rencontre d'une troisième tangente, et ainsi de suite, de manière à revenir au point de départ, après avoir marché sur toutes les tangentes sans discontinuité. La ligne brisée

ainsi formée est un hexagone circonscrit. Si l'on numérote les sommets dans l'ordre suivant lequel on les a obtenus, les trois diagonales qui joignent les sommets (1, 4), (2, 5), (3, 6) passent par un même point (fig. 189).

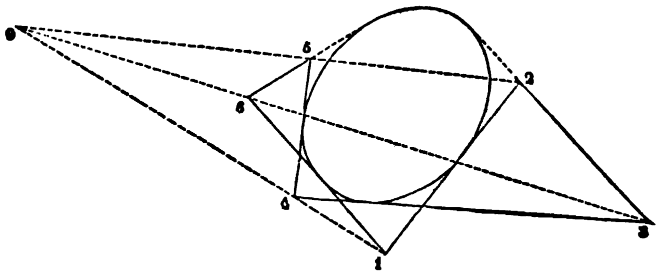



Fig. 189.

Corollaire. Quand on définit une section conique par cinq tangentes, on peut, à l'aide du théorème précédent, construire autant de tangentes que l'on veut. Soient les cinq tangentes *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef* (fig. 188); cherchons la seconde tangente qui passe par un point *a* pris arbitrairement sur l'une des tangentes données; on prendra le point d'intersection *o* des diagonales *ad* et *be;* on mènera la droite *co* et on joindra le point *a* au point *f* où la droite *co* rencontre la tangente *ef*.

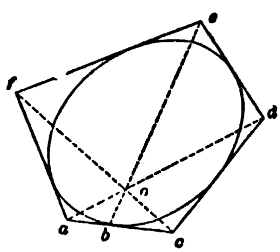



Fig. 190.

On peut aussi déterminer le point de contact de chacune des tangentes. Quand deux côtés de l'hexagone circonscrit, par exemple les côtés *ab* et *bc*, coïncident, le sommet intermédiaire *b* devient le point de contact; pour trouver ce point de contact, on joindra le sommet *e* au point d'intersection *o* des diagonales *ad* et *cf* (fig. 190).

Lorsqu'on a déterminé les points de contact de trois tangentes, on obtient les éléments de la courbe par le procédé que nous avons indiqué au n° 312.

On pourrait aussi obtenir immédiatement le centre à l'aide d'un théorème démontré au n° 300.

Du théorème de Brianchon, on déduit les corollaires suivants : *Un quadrilatère étant circonscrit à une section conique, les deux diagonales et les deux droites qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par un même point.*

*Un triangle étant circonscrit à une section conique, les droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés passent par un même point.* Il suffit de compléter l'hexagone circonscrit, dans le premier cas avec les points de contact de deux côtés opposés, dans le second cas avec les trois points de contact.

### SYSTÈMES HOMOGRAPHIQUES.

**218.** Lorsqu'on a sur deux droites données deux systèmes de points qui se correspondent chacun à chacun, de telle sorte que, si l'on désigne par $x$ et $x'$ les distances (affectées de signes convenables) de deux points correspondants à deux points fixes pris sur les droites, on ait la relation

$$(1) \qquad Axx' + Bx + Cx' + D = 0;$$

on dit que ces deux systèmes de points sont *homographiques*.

Cette équation renfermant trois paramètres arbitraires, on peut à trois points pris à volonté sur la première droite faire correspondre trois points pris à volonté sur la seconde, et le mode de division homographique se trouve ainsi déterminé.

Lorsque le point $m'$ de la seconde droite s'éloigne à l'infini, le point homologue $m$ de la première tend vers une position limite $i$ donnée par la formule $x = -\frac{C}{A}$. De même, lorsque le point $m$ de la première droite s'éloigne à l'infini, le point $m'$ de la seconde tend vers la position $j'$ donnée par la formule $x' = -\frac{B}{A}$. Si l'on compte les distances sur ces deux droites, à partir des points $j'$ et $i$, la relation se simplifie et devient

$$(2) \qquad Axx' + D = 0.$$

Un faisceau de droites passant par un même point $o$ (fig. 191) détermine sur deux sécantes quelconques deux systèmes de points homographiques; car, en appelant $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point $o$ par rapport aux deux sécantes, $\alpha$ et $\beta$ l'abscisse et l'ordonnée des points $m$ et $m'$ où l'une

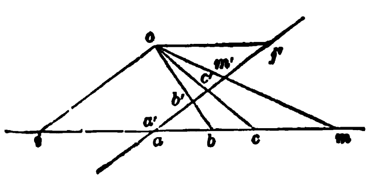


Fig. 191.

des droites du faisceau rencontre les deux sécantes, on a entre les variables $\alpha$ et $\beta$ la relation

$$\frac{x_1}{\alpha} + \frac{y_1}{\beta} = 1.$$

Réciproquement, lorsqu'on a sur deux droites deux systèmes de points homographiques, on peut placer les droites de manière que l'un des systèmes soit la *perspective* de l'autre; il suffit de déplacer l'une des droites de manière à faire coïncider deux points homologues $a$ et $a'$; les droites $bb'$, $cc'$, qui joignent deux couples de points homologues, se coupent en un point $o$; la droite $om$ qui joint le point $o$ à un point quelconque $m$ de la première droite passera par le point homologue $m'$ de la seconde. Des parallèles $oi$ et $oj'$ aux deux droites donneront les points $i$ et $j'$.

Deux systèmes de points homographiques à un troisième sont homographiques entre eux; car l'élimination de $x$ entre les deux équations

$$(Ax' + B)x + (Cx' + D) = 0,$$
$$(A_1x_1 + B_1)x + (C_1x_1 + D_1) = 0,$$

donne une équation de même forme entre $x'$ et $x_1$.

**316.** Considérons les deux faisceaux de droites que l'on obtient en joignant deux points fixes $o$ et $o'$ à deux systèmes de points homographiques; ces deux faisceaux déterminent sur des sécantes quelconques des systèmes de points homographiques; on dit, d'après cela, que les deux faisceaux de droites sont homographiques.

Concevons que, par un point fixe situé sur l'axe des $x$, et ayant pour abscisse $-1$, on mène des parallèles aux droites des deux faisceaux; ces parallèles détermineront sur l'axe des $y$ deux systèmes de points homographiques; l'ordonnée de chacun de ces points étant égale au coefficient angulaire de la droite correspondante, on en conclut que les coefficients angulaires $m$ et $m'$ des droites homologues sont liés par la relation

$$(3) \qquad Amm' + Bm + Cm' + D = 0.$$

Réciproquement, lorsque dans deux faisceaux les coefficients angulaires de deux droites homologues satisfont à une relation de cette forme, les deux faisceaux sont homographiques. Tels sont, par exemple, les deux faisceaux que l'on obtient en menant par deux points fixes $o$ et $o'$ des parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique.

Deux faisceaux homographiques à un troisième sont homographiques entre eux.

Deux systèmes de points homographiques se transforment dans la figure polaire réciproque en deux faisceaux de droites homographi-

ques. Soient P et Q les deux droites données, $p'$ et $q'$ leurs pôles par rapport à une courbe du second degré dont le centre est $o$ ; à un point $a$ de la première droite correspond une droite A' passant par son pôle $p'$ ; à un point $b$ de la seconde droite une droite B' passant par son pôle $q'$. Les droites $oa$, $ob$ forment deux faisceaux homographiques ; le faisceau des droites A' étant homographique de celui des droites $oa$, et le faisceau des droites B' de celui des droites $ob$, on en conclut que les deux faisceaux A' et B' sont homographiques.

Remarque. Dans les deux relations (1) et (3) nous avons supposé que les coefficients A, B, C, D ne vérifient pas la condition

$$AD - CB = 0.$$

Si cette condition était remplie, le premier membre de la relation (1), par exemple, se décomposerait en deux facteurs linéaires, l'un en $x$ l'autre en $x'$, et cette relation (1) prendrait la forme

$$A(x-\alpha)(x'-\alpha') = 0.$$

A une valeur attribuée à $x'$ répondrait toujours la valeur $x = \alpha$, et, pour $x' = \alpha'$, $x$ serait indéterminé.

**317.** Lorsqu'on a sur une même droite deux systèmes de points homographiques, il existe sur la droite deux points doubles, c'est-à-dire deux points tels que chacun d'eux, considéré comme appartenant à l'un des systèmes, coïncide avec son homologue dans l'autre système. En effet, si l'on compte les distances sur la droite, à partir d'un même point, et qu'on fasse $x' = x$, on a, en vertu de la relation (1), une équation du second degré

$$Ax^2 + (B + C)x + D = 0, \tag{4}$$

dont chaque racine donne un point double. Les deux points doubles sont réels ou imaginaires.

Supposons que l'on ait construit, comme nous l'avons expliqué, les deux points $i$ et $j'$ homologues de l'infini ; si l'on compte les distances à partir du point $c$, milieu de $ij'$, l'équation (1) devient

$$Axx' + B(x - x') + D = 0. \tag{5}$$

L'équation (4), qui donne les points doubles, se réduit à

$$Ax^2 + D = 0. \tag{6}$$

Appelons $c'$ le point du second système homologue du point $c$ du premier, l'équation (5) devant être vérifiée pour $x = 0$ et $x = cc'$, on a

$$cc' = \frac{D}{B};$$

d'ailleurs

$$cj' = -\frac{B}{A};$$

on en déduit

$$\frac{D}{A} = -cj' \times cc',$$

et l'équation (6) devient

(7) $$x^2 = cj' \times cc'.$$

Les points doubles sont réels, quand les deux longueurs $cj'$ et $cc'$ sont portées dans le même sens ; pour les construire, on décrira un cercle sur $c'j'$ comme diamètre (fig. 192) ; on mènera du point $c$ une tangente à ce cercle ; rabattant la tangente sur la droite, on obtiendra les deux points doubles $e$ et $f$, qui sont situés à égale distance de part et d'autre du point $c$.

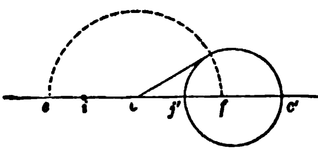


Fig. 192.

**318.** Deux faisceaux homographiques ayant même sommet admettent de même deux droites doubles, réelles ou imaginaires ; on obtiendra leurs équations en joignant le sommet aux deux points doubles de la division homographique déterminée par le faisceau sur une sécante quelconque.

Lorsqu'on fait tourner un angle constant autour de son sommet, les deux côtés forment deux faisceaux homographiques autour du même point, les diverses positions de l'un des côtés constituant le premier faisceau, celles de l'autre côté le second faisceau. Car, si l'on fait tourner le premier faisceau de l'angle constant autour du sommet, il coïncide avec le second. La relation entre les coefficients angulaires des droites homologues en coordonnées rectangulaires est $mm' + 1 + c(m - m') = 0$ ; les droites doubles sont imaginaires et ont pour équation $x^2 + y^2 = 0$ ; ce sont les asymptotes du cercle $x^2 + y^2 = r^2$.

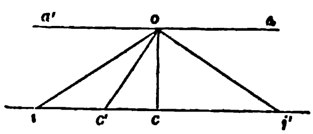


Fig. 193.

Ces deux faisceaux déterminent sur une droite quelconque deux systèmes de points homographiques, dont les points doubles sont imaginaires. Réciproquement, lorsque les points doubles de deux systèmes de points homographiques sur une même droite sont imaginaires, on peut obtenir ces deux systèmes de points par la rotation d'un angle constant autour de son sommet. Le mode de division est défini par les trois couples de points $(c, c')$, $(i, \infty)$, $(\infty, j')$, le point $c$ étant le milieu de $ij'$ ; la perpendiculaire $co$ à la droite rencontre le cercle décrit sur $c'j'$ comme diamètre en un point $o$ ; l'angle $c'oc$, en tournant autour du point $o$, donnera la division homographique proposée.

**319.** Involution. Considérons deux systèmes de points homographiques sur une même droite et supposons que deux points homolo-

gues $a$ et $a'$ soient réciproques, c'est-à-dire que, si au point $a$ du premier système correspond le point $a'$ dans le second, réciproquement au point $a'$ considéré comme appartenant au premier système correspond le point $a$ dans le second. Il faudra que l'équation (1) reste vérifiée quand on permute les valeurs particulières de $x$ et de $x'$ qui se rapportent à ces deux points, ce qui exige que l'on ait $B = C$; mais alors tous les points homologues sont réciproques deux à deux, et l'on dit que les points sont en *involution*.

L'équation

$$Axx' + B(x + x') + D = 0 \tag{7}$$

ne contenant que deux paramètres arbitraires, il suffit de deux couples de points *conjugués* $(a, a')$, $(b, b')$, pour définir l'involution. Les deux points $i$ et $j'$ coïncident, et si l'on compte les distances à partir de ce point $i$, l'équation (7) se réduit à

$$Axx' + D = 0; \tag{8}$$

on appelle ce point le *centre* de l'involution. Il y a deux points doubles $e$ et $f$, réels ou imaginaires, donnés par l'équation

$$Ax^2 + D = 0.$$

L'équation (8) devient ainsi $xx' = \overline{ie}^2$; on en conclut que les deux points doubles $e$ et $f$ sont conjugués harmoniques par rapport à deux points conjugués quelconques.

Les cercles menés par deux points fixes $p$ et $q$ déterminent sur une droite une involution (fig. 194). Soit $i$ le point où la droite $pq$ rencontre la droite donnée; si l'on appelle $x$ et $x'$ les distances de ce point aux deux points d'intersection de la sécante et de l'une des circonférences, on a $xx' = ip . iq$; le point $i$ est donc le centre de l'involution.

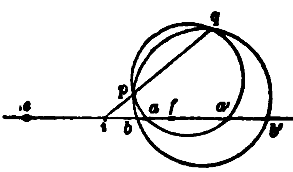


Fig. 194.

Les points doubles sont réels ou imaginaires, suivant que le point $i$ est situé en dehors des points $p$ et $q$, ou entre ces deux points. Dans le premier cas, on obtient les points doubles en menant du point $i$ une tangente à l'un des cercles et rabattant cette tangente.

Lorsqu'on définit l'involution sur une droite par deux couples de points conjugués $(a, a')$, $(b, b')$, on peut aisément construire deux points conjugués quelconques; par les deux points $a$ et $a'$ menons un cercle, par les deux points $b$ et $b'$ et un point arbitraire $p$ du premier menons un second cercle; ces deux cercles se coupent en un second point $q$; le cercle qui passe par les deux points $p$ et $q$ et un point $m$ de la droite déterminera le point conjugué $m'$.

Considérons de même deux faisceaux homographiques ayant même sommet et tels que deux droites homologues soient réciproques ; ces droites déterminent sur une sécante quelconque des points en involution ; toutes les droites homologues sont donc réciproques deux à deux, et l'on dit que les droites sont en involution. Il y a deux droites doubles réelles ou imaginaires ; mais il n'existe rien d'analogue au centre d'involution.

Nous avons dit (n° 318) que, lorsqu'un angle constant tourne autour de son sommet, les deux côtés forment deux faisceaux homographiques. Quand l'angle est droit, il y a réciprocité, et par conséquent involution ; les droites doubles, comme nous l'avons remarqué, sont les asymptotes d'un cercle.

Réciproquement, lorsque sur une droite les points doubles d'une involution sont imaginaires, on peut obtenir les couples de points conjugués par la rotation d'un angle droit autour de son sommet. L'involution est définie par les deux couples de points conjugués $(i, \infty)$, $(a, a')$ ; sur $aa'$ comme diamètre décrivons un cercle (fig. 195) ; au point $i$ élevons sur la droite une perpendiculaire qui coupera le cercle en deux points $p$ et $q$ ; un cercle passant par les deux points $p$ et $q$ déterminera deux points conjugués $m$ et $m'$, et l'angle $mpm'$ est droit.

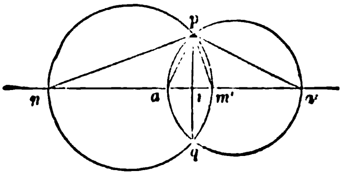


Fig. 195.

Les diamètres conjugués d'une conique sont en involution. Les droites doubles sont réelles dans le cas de l'hyperbole, imaginaires dans le cas de l'ellipse.

**320.** Théorème I. *Étant donnés deux faisceaux homographiques, le lieu du point d'intersection de deux droites homologues est une conique passant par les sommets des deux faisceaux.*

Cherchons combien de points du lieu sont situés sur une droite quelconque D ; les deux faisceaux homographiques $o$ et $o'$ (fig. 196) déterminent sur cette droite deux systèmes de points homographiques $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$, $(\gamma, \gamma')$,...... ; deux droites homologues $oe$, $o'e$, qui se coupent sur la droite D, donnent un point double $e$ ; comme il n'existe sur la droite D que deux points doubles $e$ et $f$, on en conclut que cette droite ne rencontre le lieu qu'en deux points, réels ou imaginaires ; ainsi le lieu est du second ordre.

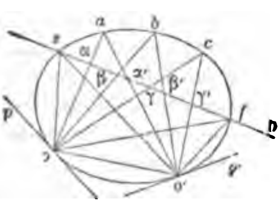


Fig. 196.

A la droite $o'o$ du second faisceau correspond une certaine droite $op$ du premier ; le point d'intersection vient en $o$, et la droite $op$ est tangente en ce point. De même, la courbe passe par le point $o'$ et

elle est tangente en ce point à la droite $o'q'$ du second faisceau homologue de la droite $oo'$ du premier.

Corollaire. Ceci nous permet de trouver les points où une droite donnée D coupe une conique définie par cinq points $o$, $o'$, $a$, $b$, $c$ ; si l'on joint deux des points $o$ et $o'$ aux trois autres, on a trois couples de droites $(oa, o'a)$, $(ob, o'b)$, $(oc, o'c)$, déterminant deux faisceaux homographiques $o$ et $o'$ ; le lieu du point d'intersection des droites homologues est la conique passant par les cinq points donnés ; les trois couples de points $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$, $(\gamma, \gamma')$ définissent la division homographique sur la droite D ; on trouvera les deux points doubles $e$ et $f$ par le procédé indiqué au nº 317.

Si la droite passe par l'un des points donnés, $o$ par exemple, il suffit de construire la droite homologue dans le second faisceau. De même, comme nous l'avons dit déjà, on obtiendra la tangente en $o$, en menant la droite $op$ du premier faisceau homologue de la droite $o'o$ du second. On déterminera ainsi autant de points et autant de tangentes que l'on voudra de la conique cherchée.

Remarque. Lorsque la droite $oo'$ qui passe par les sommets se correspond à elle-même dans les deux faisceaux, elle fait évidemment partie du lieu qui alors se compose de deux droites ; dans ce cas, le lieu du point d'intersection des droites homologues est, à proprement parler, une ligne droite.

321 Théorème II. *Étant donnés deux systèmes de points homographiques sur deux droites fixes* A *et* A', *la droite* aa', *qui joint deux points homologues quelconques, enveloppe une conique tangente aux deux droites fixes.*

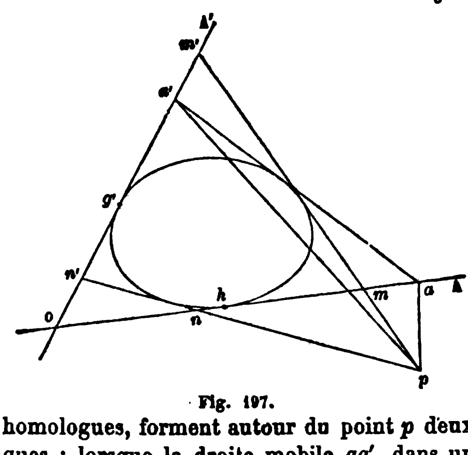


Fig. 197.

Cherchons combien de tangentes à l'enveloppe passent par un point arbitraire $p$ du plan (fig. 197) ; les droites $pa$, $pa'$, qui joignent le point $p$ à deux points homologues, forment autour du point $p$ deux faisceaux homographiques : lorsque la droite mobile $aa'$, dans une de ses positions $mm'$, passe par le point $p$, elle devient une droite double des deux faisceaux ; comme il n'existe que deux droites doubles $pm$, $pn$, on en conclut que par le point $p$ on ne peut mener que deux tangentes, réelles ou imaginaires, à la courbe enveloppe ; cette courbe est donc de la seconde classe, et par conséquent du second ordre.

Au point d'intersection $o$ des deux droites fixes A et A' considéré comme appartenant à la seconde droite, correspond sur la première un point $h$. La droite mobile vient en $oh$ et la courbe est tangente à la droite A au point $h$. De même, la courbe est tangente à la droite A' au point $g'$ de cette droite homologue du point $o$ de la droite A.

Corollaire. Ceci nous permet de mener par un point donné $p$ des tangentes à la conique définie par cinq tangentes ; si l'on joint au point $p$ les points où deux des tangentes A et A' sont coupées par les trois autres B, C, D, on a trois couples de droites déterminant deux faisceaux homographiques, dont les droites doubles sont les tangentes demandées.

Si le point $p$ est situé sur l'une des tangentes données, A par exemple, les points où les tangentes A et A' sont coupées par les trois autres B, C, D, définissent sur ces deux premières tangentes deux systèmes de points homographiques ; on cherchera sur la droite A' le point $p'$ homologue du point $p$ sur A ; la droite $pp'$ sera tangente à la conique.

Le point de contact de la tangente A est, comme nous l'avons dit, le point de cette droite homologue du point $o$ de A'.

Remarque. Lorsque le point d'intersection $o$ des deux droites fixes se correspond à lui-même sur les deux droites, dans la figure polaire réciproque la droite des sommets se correspondra à elle-même dans les deux faisceaux ; le lieu se réduisant dans ce cas à une droite, l'enveloppe se réduit à un point : donc toutes les droites, telles que $aa'$, passent par un même point.

322. Les deux théorèmes précédents donnent naissance à un grand nombre de propriétés remarquables. Nous en indiquerons quelques-unes.

Par exemple, si deux angles constants tournent autour de leurs sommets de manière que le point d'intersection de deux côtés décrive une droite fixe, les deux autres côtés formeront deux faisceaux homographiques, et, par conséquent, le lieu de leur point d'intersection sera une conique passant par les deux sommets fixes.

De même si, sur deux droites fixes, à partir des points où elles sont rencontrées par une sécante mobile menée par un point fixe, on porte, dans un sens déterminé, deux longueurs constantes, il est évident que les extrémités de ces longueurs formeront deux systèmes de points homographiques, et par conséquent que la droite qui les joint enveloppera une conique tangente aux deux droites fixes.

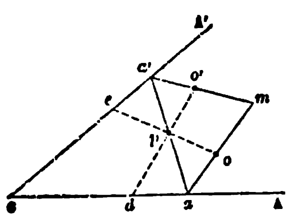


Fig. 198.

Considérons un triangle $maa'$, dont les trois côtés tournent autour de trois points fixes $o$, $o'$, $p$ (fig. 198), tandis que deux sommets $a$ et $a'$ glissent sur deux droites fixes A et A' ; les faisceaux $o$ et

*p* sont homographiques, de même *p* et *o'*; donc les faisceaux *o* et *o'* sont homographiques, et le point *m*, troisième sommet du triangle, décrit une conique passant par les deux points *o* et *o'*. Il est aisé de voir que le point d'intersection *c* des droites A et A' et les deux points *d* et *e*, où ces droites sont coupées par les droites *po'* et *po*, appartiennent au lieu; de cette manière, la conique est définie par cinq points.

Lorsque les trois points fixes *o*, *o'*, *p* sont en ligne droite, la droite *oo'* se correspond à elle-même dans les deux faisceaux, et le lieu du sommet *m* est une ligne droite; c'est le problème que nous avons traité au n° 105.

Considérons de même un triangle mobile *aba'* (fig. 199), dont les trois sommets glissent sur trois droites fixes A, A', B, tandis que deux côtés *ba*, *ba'* tournent autour de deux points fixes *o* et *o'*; le faisceau *o* détermine sur les droites A et B deux systèmes de points *a* et *b* homographiques; de même le faisceau *o'* détermine deux systèmes de points homographiques *b* et *a'*; donc les deux systèmes *a* et *a'* sont homographiques, et le troisième côté *aa'* du triangle enveloppe une conique tangente aux deux droites A et A'. On verra aisément que la droite *oo'* et les deux droites *o'c* et *od*, qui joignent les points *o* et *o'* aux points où la droite B coupe les droites A et A', touchent la conique; de cette manière la conique sera définie par cinq tangentes.

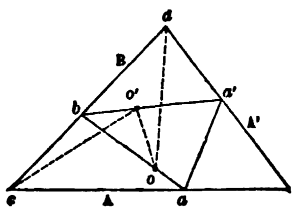


Fig. 199.

Lorsque les trois droites A, A', B passent par un même point, le point d'intersection des droites A et A' se correspond à lui-même, et l'enveloppe se réduit à un point; donc la droite *aa'* passe par un point fixe.

Ce mode de démonstration s'applique à des polygones d'un nombre quelconque de côtés. Ainsi, lorsque les *n* côtés d'un polygone tournent autour de *n* points fixes et que *n* — 1 sommets décrivent des droites, le dernier sommet décrit une conique. Lorsque les *n* sommets d'un polygone décrivent des droites, et que *n* — 1 côtés tournent autour de points fixes, le dernier côté enveloppe une conique.

Les théorèmes I et II permettent, comme nous l'avons vu, de construire une conique définie par cinq points ou cinq tangentes; mais les théorèmes de Pascal et de Brianchon donnent des constructions plus simples.

**324.** Théorème III. *Lorsque dans l'équation générale d'un faisceau de coniques assujetties à quatre conditions le paramètre arbitraire n'entre qu'au premier degré, ces coniques déterminent sur une droite quelconque des points en involution.*

Si l'on prend la droite pour axe des $x$, et si dans l'équation proposée on fait $y = 0$, on obtient une équation de la forme

$$(A + kA')x^2 + (B + kB')x + (C + kC') = 0,$$

$k$ étant le paramètre arbitraire. En appelant $x$ et $x'$ les deux racines, on a

$$\frac{x + x'}{-B - kB'} = \frac{xx'}{C + kC'} = \frac{1}{A + kA'},$$

d'où l'on déduit $$\frac{A'(x + x') + B'}{AB' - BA'} = \frac{-A'xx' + C'}{AC' - CA'}.$$

**325.** Théorème IV. *Les coniques qui passent par quatre points donnés déterminent sur une droite quelconque des points en involution.*

On sait (n° 277) que l'équation des coniques, qui passent par quatre points donnés $a$, $b$, $c$, $d$, renferme un paramètre arbitraire au premier degré; en vertu du théorème précédent, ces coniques déterminent sur une droite quelconque D des points en involution (fig. 200). Les deux couples de droites $(ac, bd)$, $(ab, cd)$ donnent deux couples de points conjugués $(\alpha, \alpha')$, $(\beta, \beta')$ définissant l'involution.

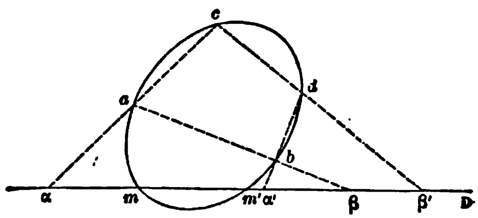


Fig. 200.

Corollaire. Les points doubles de l'involution sont les points de contact des coniques passant par les quatre points donnés et tangentes à la droite D; comme il y a deux points doubles, on en conclut qu'*il y a deux coniques, réelles ou imaginaires, passant par quatre points donnés et tangentes à une droite donnée.* On déterminera ces points par la construction indiquée au n° 319, et alors chacune des coniques sera définie par cinq points.

**326.** Théorème V. *Les tangentes menées d'un point fixe aux coniques tangentes à quatre droites données sont en involution.*

Ce théorème se déduit du précédent, connu sous le nom de théorème de Desargues, par la méthode des polaires réciproques. Aux coniques tangentes à quatre droites données correspondent, dans la figure polaire réciproque, des coniques passant par quatre points donnés; aux deux tangentes menées d'un point fixe $p$ à l'une des premières coniques, les deux points d'intersection de la droite P', polaire du point $p$, avec l'une des secondes coniques; ces points d'intersection sur la droite P' étant en involution, les faisceaux des tangentes partant du point $p'$ sont aussi en involution.

Les quatre droites données (fig. 201) forment un quadrilatère; la

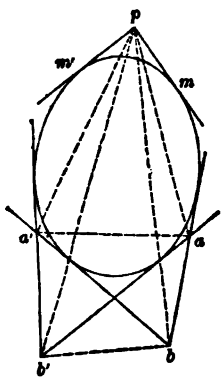



Fig. 201.

diagonale $aa'$ peut être considérée comme la limite d'une ellipse tangente aux quatre droites et dont le petit axe devient nul; les tangentes menées du point $p$ à cette ellipse réduite à son grand axe $aa'$ sont $pa$ et $pa'$. Il en est de même de la diagonale $bb'$. On a ainsi deux couples de droites conjuguées ($pa$, $pa'$), ($pb$, $pb'$) définissant l'involution.

Corollaire. Lorsque la conique passe par le point $p$, les deux tangentes $pm$, $pm'$ coïncident et forment une droite double; comme il y a deux droites doubles dans l'involution, on en conclut qu'*il y a deux coniques, réelles ou imaginaires, touchant quatre droites données et passant par un point donné*. En menant une sécante à travers le faisceau, et déterminant les points doubles sur la sécante, on obtiendra les droites doubles et chacune des deux coniques sera définie par cinq tangentes.

**327.** Théorème VI. *Les coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés déterminent sur une sécante quelconque une involution, dont l'un des points doubles est situé sur la corde des contacts.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème IV. Supposons que les points $a$ et $c$ coïncident, ainsi que les points $b$ et $d$ (fig. 200); les deux droites $ac$ et $bd$ seront tangentes en $a$ et en $b$; les deux droites $ab$ et $cd$ se confondant, les deux points conjugués $\beta$ et $\beta'$ se réunissent en l'un des points doubles de l'involution à laquelle appartiennent les couples de points ($m$, $m'$), ($\alpha$, $\alpha'$).

Corollaire. Ceci nous donne le moyen de construire une conique passant par trois points donnés $a$, $b$, $c$, et touchant deux droites données A et A' (fig. 202).

Sur la sécante $ab$ déterminons les deux points doubles $e$ et $f$ de l'in-

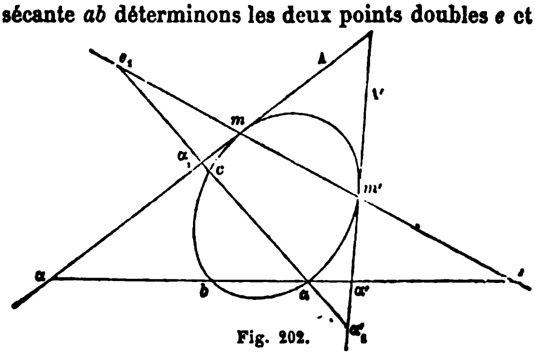



Fig. 202.

volution définie par les deux couples de points ($a$, $b$), ($\alpha$, $\alpha'$). Sur la sécante $ac$ déterminons de même les deux points doubles $e_1$ et $f_1$ de-

l'involution définie par les deux couples de points $(a, c)$, $(\alpha_1, \alpha'_1)$. La corde des contacts, devant passer par l'un des deux points $e$ et $f$ et par l'un des deux points $e_1$ et $f_1$, coïncidera avec l'une des quatre droites que l'on obtient en joignant ces points deux à deux de toutes les manières possibles. Je dis que l'une quelconque de ces quatre droites, par exemple $ee_1$, donnera une solution du problème : cette droite $ee_1$ rencontre les deux droites données A et A' en deux points $m$ et $m'$; on peut mener *une* conique passant par le point $a$, et tangente aux droites A et A' aux points $m$ et $m'$ (nº 280); cette conique, devant couper la sécante $\alpha\alpha'$ en un second point conjugué du point $a$ dans l'involution définie par le point double $e$ et le couple de points $(\alpha, \alpha')$, passera par le point $b$; on démontrera de même qu'elle passe par le point $c$. Ainsi il y a *quatre* coniques, réelles ou imaginaires, passant par trois points donnés et touchant deux droites données.

**328.** Théorème VII *Les tangentes menées d'un point fixe aux diverses coniques qui touchent deux droites données en deux points donnés, forment une involution dont une droite double passe par le point de rencontre des deux droites données.*

Ce théorème est un cas particulier du théorème V Supposons que les deux tangentes $ab$ et $ab'$ coïncident (fig. 201), ainsi que $a'b$ et $a'b'$ : les points $a$ et $a'$ deviennent les points de contact des tangentes $ab$ et $a'b'$; les deux points $b$ et $b'$ se confondant, les deux droites $pb$ et $pb'$ se réunissent sur l'une des droites doubles de l'involution à laquelle appartiennent les deux couples de droites $(pm, pm')$, $(pa, pa')$.

Corollaire. On en déduit le moyen de construire une conique passant par deux points donnés $a$ et $b$ et touchant trois droites données $mn$, $pm$ et $pn$ (fig. 203). Le point de rencontre $o$ des tangentes en $a$ et $b$, devant être situé sur l'une des deux droites doubles de l'involution définie par les deux couples de droites $(pa, pb)$, $(pm, pn)$, et sur l'une des deux droites doubles de l'involution définie par les deux couples de droites $(ma, mb)$, $(mn, mp)$, coïncidera avec l'un des quatre points d'intersection de ces droites doubles prises deux à deux. Je dis que l'un quelconque de ces quatre points, par exemple le point $o$, donnera une solution du problème; on peut décrire *une* conique tangente aux deux droites $oa$ et $ob$ aux points $a$ et $b$ et à la droite $pm$; la seconde tangente que l'on peut mener du point $p$ à cette conique, devant être conjuguée de la droite $pm$ dans l'involution définie par la droite double $po$ et le couple de droites $(pa, pb)$, coïncidera avec $pn$; on démontrera de même que la droite $mn$ est tangente à la conique. Ainsi, il y a *quatre* coniques, réelles ou imagi-

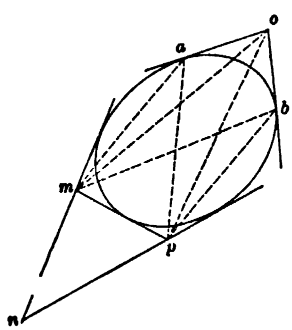


Fig. 203.

naires, passant par deux points donnés et touchant trois droites données.

329. REMARQUE. Nous avons dit (n° 283) que l'on peut regarder un foyer comme le point d'intersection de deux tangentes ayant pour coefficients angulaires $\pm i$, c'est-à-dire parallèles aux asymptotes d'un cercle; donner un foyer, c'est donc donner deux tangentes à la conique; ainsi, parmi les coniques qui ont un foyer donné, il y en a *une* tangente à trois droites données (n° 262), *deux* tangentes à deux droites données et passant par un point donné, *quatre* (dont deux réelles et deux imaginaires) tangentes à une droite donnée et passant par deux points donnés, et enfin *quatre* passant par trois points donnés (n° 260).

Nous avons appris à construire une conique satisfaisant à cinq conditions élémentaires, points de la courbe ou tangentes; quatre conditions suffisent pour la détermination d'une parabole, et l'on peut ramener la question à l'une des précédentes par une transformation à l'aide de la méthode des polaires réciproques. Nous savons en effet (n° 299) que, lorsque le centre $o$ de la courbe directrice est situé sur une conique, la courbe polaire réciproque est une parabole, et que, réciproquement, la courbe polaire réciproque d'une parabole est une conique passant par le centre $o$ de la courbe directrice. Dans la transformation, la condition que la courbe cherchée est une parabole est donc remplacée par le point $o$, les points par des droites, les droites par des points. La construction d'une parabole tangente à quatre droites données est ainsi ramenée à la construction d'une conique passant par cinq points donnés; il y a *une* solution et une seule. De même, il y a *deux* paraboles passant par quatre points donnés, ou passant par un point et touchant trois droites données; *quatre* paraboles passant par trois points et touchant une droite, ou passant par deux points et touchant deux droites données. En traçant la tangente en $o$ à la courbe polaire réciproque et menant le diamètre conjugué dans la courbe directrice, on aura la direction des diamètres de la parabole, ce qui permettra d'appliquer immédiatement aux données les théorèmes précédents.

M. Chasles a imaginé une méthode ingénieuse pour étudier les propriétés d'un système de coniques satisfaisant à quatre conditions données, et il a fait voir que ces propriétés dépendent de deux nombres entiers qu'il appelle les *caractéristiques* du système; ce sont les nombres des coniques du système qui passent par un point donné ou qui touchent une droite donnée. Par exemple, les deux caractéristiques du système des coniques qui passent par quatre points donnés sont 1 et 2; celles du système des coniques qui touchent quatre droites données sont 2 et 1, celles du système des coniques qui passent par trois points et qui touchent une droite sont 2 et 4, celles du système des coniques qui passent par un point et qui touchent trois droites sont 4 et 2; enfin celles du système des coniques qui passent par deux points et qui touchent deux droites sont 4 et 4.

### COORDONNÉES HOMOGÈNES.

**330.** Quand on étudie une courbe algébrique définie par son équation $F(x, y) = 0$, il y a souvent avantage à considérer la fonction entière et homogène obtenue en remplaçant dans $F(x, y)$ les coordonnées $x$ et $y$ par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ et multipliant le résultat par une puissance convenable de $z$. On en a des exemples quand on cherche l'équation de la tangente en un point de la courbe (n° 291) ou les coordonnées des points de contact des tangentes menées par un point quelconque du plan.

On appelle alors *coordonnées homogènes* d'un point trois nombres $x$, $y$, $z$ tels que les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ soient respectivement égaux à l'abscisse et à l'ordonnée de ce point. Ainsi un point qui a pour abscisse $\frac{3}{4}$ et pour ordonnée $\frac{1}{6}$ a pour coordonnées homogènes 9, 2, 12 ou $9n$, $2n$, $12n$, $n$ étant un nombre quelconque différent de zéro. Soit alors $f(x, y, z) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique rendue homogène par le procédé que nous venons de rappeler, on dira que cette équation est l'équation de la courbe en coordonnées homogènes.

*Points à l'infini. — Droite de l'infini.* D'après la définition précédente, pour un point quelconque du plan la troisième des coordonnées homogènes $z$ n'est jamais nulle. On considère cependant des systèmes de valeurs de $x$, $y$, $z$ dans lesquels la troisième variable $z$ est *nulle* et l'on dit qu'un pareil système $(x_1, y_1, 0)$ *correspond à un point à l'infini et que ce point est sur une courbe ayant pour équation en coordonnées homogènes* $f(x, y, z) = 0$ *si l'on a* $f(x_1, y_1, 0) = 0$.

En particulier, dire que le point à l'infini $(x_1, y_1, 0)$ est sur la droite $y = ax + bz$, signifie que l'on a la condition $y_1 = ax_1$. On peut remarquer, pour justifier cette expression de point à l'infini, que l'on se trouve conduit à considérer de tels systèmes de valeurs de $x$, $y$, $z$ quand on suppose qu'un point

s'éloigne indéfiniment sur une droite donnée. Ainsi dont les coordonnées homogènes sont

$$x = x_1 - \lambda x_2, \ y = y_1 - \lambda y_2, \ z = 1 - \lambda$$

et, par suite, les coordonnées cartésiennes

$$\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$$

est sur la droite dont l'équation homogène est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et dont le coefficient angulaire est $a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Si l'on suppose que $\lambda$ tende vers 1, le point s'éloigne indéfiniment et pour $\lambda = 1$ on aura pour $x$, $y$, $z$ les valeurs

$$x_1 - x_2 \quad , \quad y_1 - y_2 \quad , \quad 0$$

vérifiant la condition $y - ax = 0$.

Comme une équation homogène du premier degré en $x$, $y$, $z$ représente en général une droite, et que les coordonnées de tous les points à l'infini vérifient l'équation homogène du premier degré $z = 0$, on dit que tous les points à l'infini se trouvent sur une droite (droite de l'infini) ayant pour équation $z = 0$. On peut dire alors que deux droites parallèles

$$y = ax + bz \quad , \quad y = ax + b'z$$

ont un point à l'infini commun ou se coupent sur la droite de l'infini, pour rappeler que les équations de ces deux droites sont satisfaites pour un même système de valeurs de $x$, $y$, $z$

$$x = 1 \quad , \quad y = a \quad , \quad z = 0$$

dans lequel $z$ est nul. On peut dire de même que deux courbes

$$f(x, y, z) = 0 \ , \ \varphi(x, y, z) = 0$$

ont un point à l'infini $(x_1, y_1, 0)$ commun si l'on a

$$f(x_1, y_1, 0) = 0 \ , \ \varphi(x_1, y_1, 0) = 0.$$

Comme au numéro 270, on appelle point imaginaire un système de valeurs imaginaires de $x$, $y$, $z$, à condition qu'on ne puisse

pas rendre $x$, $y$, $z$ réels en les divisant par une même quantité imaginaire. Un point imaginaire à l'infini sera un point imaginaire dont la coordonnée $z$ est nulle.

EXEMPLE. L'équation générale d'un cercle est en coordonnées cartésiennes rectangulaires $x$ et $y$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 ,$$

donc en coordonnées homogènes

$$x^2 + y^2 + (ax + by + cz)z = 0 .$$

Cette équation est vérifiée par les deux systèmes

$$x = 1 , \ y = \sqrt{-1} , \ z = 0 \quad ; \quad x = 1 , \ y = -\sqrt{-1} , z = 0$$

et cela quels que soient $a,b,c$. On peut donc dire qu'un cercle quelconque passe par les points à l'infini, dont les coordonnées homogènes sont $(1, \sqrt{-1}, 0)$ $(1, -\sqrt{-1}, 0)$ : ces deux points s'appellent POINTS CIRCULAIRES A L'INFINI.

Réciproquement, toute courbe du second ordre qui passe par les points circulaires à l'infini est un cercle. Car si l'équation générale de second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

est vérifiée par les coordonnées de ces deux points, on a

$$A + 2B\sqrt{-1} - C = 0 \quad , \quad A - 2B\sqrt{-1} - C = 0$$

d'où en ajoutant et retranchant

$$A = C \quad , \quad B = 0 \quad ,$$

ce qui exprime que la conique est un cercle.

## FORMULES DE TRANSFORMATION

Supposons que l'on fasse un changement de coordonnées et que les formules de transformation pour les coordonnées cartésiennes soient

$$(1) \qquad \begin{aligned} X' &= a + mX + nY \\ Y' &= b + pX + qY; \end{aligned}$$

on prendra, pour les coordonnées homogènes, les formules

$$(2) \qquad \begin{aligned} x' &= az + mx + ny \\ y' &= bz + px + qy \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Si le point $(x, y, z)$ est à distance finie ($z$ différent de zéro)

ces formules sont en effet identiques aux formules (1) d'après la définition même des coordonnées homogènes. Si au contraire $z$ est nul, c'est-à-dire si le point $(x, y, z)$ est à l'infini, c'est *par définition* que l'on regardera les valeurs $x'$, $y'$, $z'$ données par les formules (2) comme les nouvelles coordonnées du même point; on remarquera que l'on a encore $z' = 0$.

### APPLICATIONS

Cherchons l'équation en coordonnées homogènes de la droite joignant les deux points $M_1$ et $M_2$ qui ont pour coordonnées $(x_1, y_1, z_1)$ $(x_2, y_2, z_2)$. Cette équation est

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0;$$

en effet l'équation que nous venons d'écrire représente une droite, et cette droite passe par les deux points, car l'équation est évidemment vérifiée par les coordonnées des deux points. On peut exprimer, comme il suit, les coordonnées d'un point quelconque de la droite en fonction d'un paramètre. Le déterminant (3) étant nul, il existe une même relation linéaire et homogène entre les éléments des trois colonnes

$$Ax + Bx_1 + Cx_2 = 0, \quad Ay + By_1 + Cy_2 = 0, \quad Az + Bz_1 + Cz_2 = 0.$$

Le coefficient A n'est pas nul, car s'il était nul les coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ seraient proportionnelles à $x_2$, $y_2$, $z_2$ et les deux points $M_1$, $M_2$ coïncideraient et ne détermineraient plus une droite. Le coefficient A étant différent de zéro, on peut résoudre les relations ci-dessus par rapport à $x$, $y$, $z$ et l'on a pour $x$, $y$, $z$ des expressions de la forme

$$x = \mu x_1 + \nu x_2, \quad y = \mu y_1 + \nu y_2, \quad z = \mu z_1 + \nu z_2;$$

réciproquement, quels que soient $\nu$ et $\mu$ le point défini par ces expressions appartient à la droite puisque ces expressions vérifient l'équation (3). Comme on peut diviser $x$, $y$, $z$ par une même quantité, on pourra les diviser par $\mu$ et en faisant $\frac{\nu}{\mu} = \lambda$ on aura

(4) $x = x_1 + \lambda x_2$ , $y = y_1 + \lambda y_2$ , $z = z_1 + \lambda z_2$

excepté pour le point $x_2, y_2, z_2$ qui correspond à $\mu = 0$.

*Interprétation de* $\lambda$. Si $z_1 = z_2 = 1$ on a

$$\frac{x}{z} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad , \quad \frac{y}{z} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

on retombe sur des formules déjà établies (n° 57) et on voit, en appelant M le point $(x, y, z)$, que

$$\lambda = -\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}.$$

Si $z_1$ et $z_2$ sont quelconques mais non nuls, on pourra diviser $x, y, z$ par $z_1$ et poser $\lambda \frac{z_2}{z_1} = \lambda'$; il vient

$$x = \frac{x_1}{z_1} + \lambda' \frac{x_2}{z_2} \quad , \quad y = \frac{y_1}{z_1} + \lambda' \frac{y_2}{z_2} \quad , \quad z = 1 + \lambda';$$

on retombe donc sur le cas précédent et $\lambda'$ est défini par

$$\lambda' = -\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}};$$

d'ailleurs $\lambda'$ ne diffère de $\lambda$ que par le facteur $\frac{z_2}{z_1}$ qui reste constant quand, laissant fixes les coordonnées $(x_1, y_1, z_1)$ $(x_2, y_2, z_2)$, on imagine que le point M se déplace par la droite. On en déduit que les deux points

$$(M) \quad \begin{aligned} x &= x_1 + \lambda x_2 \\ y &= y_1 + \lambda y_2 \\ z &= z_1 + \lambda z_2 \end{aligned} \qquad (M') \quad \begin{aligned} x' &= x_1 - \lambda x_2 \\ y' &= y_1 - \lambda y_2 \\ z' &= z_1 - \lambda z_2 \end{aligned}$$

sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points donnés. On vérifiera aisément que ce résultat subsiste si l'une des deux quantités $z_1$ ou $z_2$, par exemple $z_2$, tend vers zéro. Alors le point $M_2$ devient un point à l'infini et le point $M_1$ est le milieu du segment déterminé par les points M et M' : on peut donc encore dire que les points MM' sont conjugués harmoniques par rapport aux points $M_1$ et $M_2$. Si les deux points $M_1$ $M_2$ sont à l'infini, $z_1 = z_2 = 0$ on convient de dire

encore que les deux points M et M′ qui sont aussi à l'infini, sont conjugués harmoniques par rapport à $M_1$ et $M_2$.

*Problème.* Polaire d'un point $M_1$ $(x_1, y_1, z_1)$ par rapport à une conique

$$f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0.$$

Soit M $(x, y, z)$ un point de la polaire : les coordonnées d'un point quelconque de la droite $M_1M$ seront

$$x_1 + \lambda x \quad , \quad y_1 + \lambda y \quad , \quad z_1 + \lambda z$$

et les valeurs qu'il faut donner à $\lambda$ pour obtenir les coordonnées des points où la droite $M_1M$ coupe la conique, sont racines de l'équation du second degré

$$f(x_1 + \lambda x \quad , \quad y_1 + \lambda y \quad , \quad z_1 + \lambda z) = 0,$$
$$f(x_1, y_1, z_1) + \lambda(xf_{x_1} + yf_{y_1} + zf_{z_1}) + \lambda^2 f(x, y, z) = 0.$$

Soient $\lambda'$ et $\lambda''$ les racines de cette équation : les coordonnées des points M′, M″ où la droite $MM_1$ coupe la conique seront

$$(M') \quad x_1 + \lambda' x \quad , \quad y_1 + \lambda' y \quad , \quad z_1 + \lambda' z$$
$$(M'') \quad x_1 + \lambda'' x \quad , \quad y_1 + \lambda'' y \quad , \quad z_1 + \lambda'' z;$$

comme le point M est supposé un point de la polaire, les points M′ et M″ sont conjugués harmoniques par rapport à $M_1$ et M. Pour cela il faut et il suffit que

$$\lambda'' = -\lambda' \quad , \quad \lambda' + \lambda'' = 0$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0.$$

Cette équation étant satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque de la polaire est l'équation de la polaire. On peut l'écrire aussi

$$(5)' \qquad x_1 f_x + y_1 f_y + z_1 f_z = 0.$$

Si le point $M_1$ est à l'infini, $z_1 = 0$; la polaire de ce point est alors le lieu des milieux des cordes de coefficient angulaire $\frac{y_1}{x_1}$ c'est-à-dire le diamètre conjugué de la direction $xy_1 - yx_1 = 0$; l'équation de ce diamètre est donc

$$x_1 f_x + y_1 f_y = 0$$

comme on l'a trouvé précédemment.

*Coordonnées homogènes d'une droite.* On appelle coordonnées homogènes d'une droite ayant pour équation

$$ux + vy + wz = 0$$

les coefficients $u$, $v$, $w$ de cette équation. Ainsi, l'axe des $x$ a pour coordonnées $u = 0$, $v \gtrless 0$, $w = 0$; la droite de l'infini a pour coordonnées $u = 0$, $v = 0$, $w \gtrless 0$.

D'après cela une équation linéaire et homogène entre $u$, $v$, $w$

$$au + bv + cw = 0$$

exprime que la droite $(u, v, w)$ passe par le point dont les coordonnées homogènes sont $a$, $b$, $c$; c'est l'équation de ce point.

L'équation tangentielle d'une courbe est la condition que doivent remplir les coordonnées $u$, $v$, $w$ pour que la droite de coordonnées $u$, $v$, $w$ soit tangente à la courbe; cette équation tangentielle sera homogène en $u$, $v$, $w$. Ainsi, l'on a l'équation tangentielle d'un cercle dont le rayon est R et dont le centre a pour coordonnées $a$, $b$, $1$, en exprimant que la distance du centre à la droite $u$, $v$, $w$ est R; ce qui donne l'équation homogène

$$(ua + vb + w)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0.$$

L'équation tangentielle de la conique

$$f(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

est

$$\mathbf{a}u^2 + 2\mathbf{b}uv + \mathbf{c}v^2 + 2\mathbf{d}uw + 2\mathbf{e}vw + \mathbf{f}w^2 = 0.$$

Si $\mathbf{f} = 0$, la courbe est une parabole et l'équation tangentielle est vérifiée par les coordonnées $u = 0$, $v = 0$, $w \gtrless 0$ de la droite de l'infini : c'est ce que l'on exprime en disant qu'une parabole est tangente à la droite de l'infini.

Soient $(u_1, v_1, w_1)$, $(u_2, v_2, w_2)$ les coordonnées de deux droites distinctes; l'équation de leur point d'intersection sera

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées $u$, $v$, $w$ d'une droite quelconque D passant par ce point peuvent s'écrire

$$\text{(D)} \quad u = u_1 + \lambda u_2 \quad , \quad v = v_1 + \lambda v_2 \quad , \quad w = w_1 + \lambda w_2 ;$$

on démontrera ces formules comme les formules (4). Si l'on change $\lambda$ de signe, on obtient les coordonnées d'une deuxième droite

$$\text{(D')} \quad u' = u_1 - \lambda u_2 \quad , \quad v' = v_1 - \lambda v_2 \quad , \quad w' = w_1 - \lambda w_2$$

qui est conjuguée harmonique de la première par rapport aux droites données : en effet l'équation de la droite D est

$$ux + vy + wz = u_1 x + v_1 y + w_1 z + \lambda(u_2 x + v_2 y + w_2 z) = 0$$

et celle de D' est de même

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z - \lambda \ (u_2 x + v_2 y + w_2 z) = 0$$

ce qui démontre le théorème (n° 69).

EXERCICE. *Démontrer que le pôle de la droite* ($u_1$, $v_1$, $w_1$) *par rapport à la courbe de seconde classe qui a pour équation tangentielle* $\varphi(u, v, w) = 0$ *est donné par l'équation*

$$u \varphi'_{u_1} + v \varphi'_{v_1} + w \varphi'_{w_1} = 0$$

*ou*

$$u_1 \varphi'_u + v_1 \varphi'_v + w_1 \varphi'_w = 0.$$

## COORDONNÉES TRILINÉAIRES

**331.** *Définition.* Considérons les trois équations linéaires

$$(6) \qquad \begin{aligned} \alpha &= a x + b y + cz \\ \beta &= a'x + b'y + c'z \\ \gamma &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}$$

où le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Ces équations font correspondre à tout système de valeurs de $x$, $y$, $z$ un système *unique* de valeurs

de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et, réciproquement, à tout système de valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ un système unique de valeurs de $x$, $y$, $z$.

Si $x$, $y$, $z$ sont les coordonnées homogènes d'un point du plan, on voit ainsi qu'à tout système de valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ non nulles toutes trois, correspond un point M bien déterminé et à tout point M du plan correspond un système unique de valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, à condition de ne pas regarder comme différents des systèmes tels que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, et $\rho\alpha$, $\rho\beta$, $\rho\gamma$.

Les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ seront appelées coordonnées trilinéaires du point M par *rapport au triangle de référence* dont les côtés ont pour équations

$$ax + by + cz = 0 \quad , \quad a'x + b'y + c'z = 0,$$
$$a''x + b''y + c''z = 0.$$

*Interprétation géométrique.* Si l'on prend $z = 1$, les coordonnées trilinéaires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont égales aux distances du point M aux trois côtés du triangle de référence multipliées par des facteurs qui restent fixes au signe près quand le point M varie. En particulier, si l'on prend les équations

$$(7)\qquad \begin{aligned} \alpha &= -(x \cos a + y \sin a - p z)\\ \beta &= -(x \cos b + y \sin b - q z)\\ \gamma &= -(x \cos c + y \sin c - r z)\end{aligned}$$

et si l'on suppose l'origine des coordonnées cartésiennes à l'intérieur du triangle, on voit que, pour $z = 1$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont égaux aux distances du point M aux côtés affectées de signes convenables. Ce signe est $+$ pour un côté AB du triangle de référence quand le point consideré M et le sommet C opposé à AB sont situés d'un même côté de AB; il est $-$ dans le cas contraire.

Pour obtenir en coordonnées trilinéaires l'équation d'une courbe donnée en coordonnées homogènes $f(x, y, z) = 0$, on remplacera $x$, $y$, $z$ par les expressions obtenues en résolvant les équations (6) par rapport à $x$, $y$, $z$. Les valeurs obtenues pour $x$, $y$, $z$ étant linéaires et homogènes en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, la nouvelle équation $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ sera homogène en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et de même degré que $f$. Inversement si l'on donne une équation

en coordonnées trilinéaires $F(\alpha, \beta, \gamma) = o$, il suffira d'y remplacer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par les expressions (6) pour avoir l'équation de la courbe en coordonnées homogènes.

Soit par exemple

$$f(x,y,z) = ux + vy + wz = o$$

l'équation d'une droite en coordonnées homogènes; si l'on fait la substitution précédente, on aura, pour cette même droite l'équation

$$F = U\alpha + V\beta + W\gamma = o.$$

On repassera à l'équation $f$ en remplaçant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par leurs valeurs (6). On voit ainsi que

$$(8) \qquad \begin{aligned} u &= aU + a'V + a''W \\ v &= bU + b'V + b''W \\ w &= cU + c'V + c''W. \end{aligned}$$

Les coefficients U, V, W de l'équation F s'appellent coordonnées tangentielles de la droite dans le nouveau système : les équations (8) expriment les coordonnées tangentielles homogènes $(u, v, w)$ en fonction des nouvelles (U, V, W) et inversement. Elles permettront de transformer toute équation tangentielle homogène en $u, v, w$, $\varphi(u, v, w) = o$, en une autre de même degré $\Phi(U, V, W) = o$ et inversement.

*Équation de la droite de l'infini en coordonnées trilinéaires.* On a appelé coordonnées d'un point à l'infini un système de valeurs $(x, y, z)$ dans lequel $z$ est *nul*. Si l'on résout les formules (6) par rapport à $z$ et si l'on égale à zéro l'expression linéaire homogène en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ obtenue pour $z$, on a une condition que l'on appelle équation de la droite de l'infini. En particulier, des équations (7) on tire

$$zD = \alpha \sin(b - c) + \beta \sin(c - a) + \gamma \sin(a - b),$$

D étant un facteur constant : et l'on obtient pour l'équation de la droite de l'infini

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = o$$

où A, B, C sont les angles du triangle de référence.

*Équation de la droite passant par deux points.* Soient deux

points $M_1$ et $M_2$ ayant pour coordonnées trilinéaires $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, l'équation de la droite joignant ces deux points est

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées d'un point M de la droite s'exprimeront par les formules

$$(M) \quad \alpha = \alpha_1 + \lambda\alpha_2 \quad , \quad \beta = \beta_1 + \lambda\beta_2 \quad , \quad \gamma = \gamma_1 + \lambda\gamma_2$$

où $\lambda$ a la même signification que dans les formules (4). En effet, appelons $(x_1, y_1, z_1)$ $(x_2, y_2, z_2)$ $(x, y, z)$ les coordonnées homogènes des points $M_1$, $M_2$, M. On a d'après (6)

$$\alpha_1 = ax_1 + by_1 + cz_1 \quad \alpha_2 = ax_2 + by_2 + cz_2$$
$$\alpha = ax + by + cz;$$

comme $\quad x = x_1 + \lambda x_2, \ldots, \ldots,$

on a aussi $\alpha = \alpha_1 + \lambda\alpha_2$ et de même pour $\beta$ et $\gamma$. Il résulte de là que le point M′ de coordonnées

$$(M') \quad \alpha_1 - \lambda\alpha_2 \quad , \quad \beta_1 - \lambda\beta_2 \quad , \quad \gamma_1 - \lambda\gamma_2$$

est conjugué harmonique de M par rapport au segment $M_1M_2$.

On peut en conclure, par le même calcul que précédemment (éq. 5), que la polaire du point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ par rapport à une conique

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta = 0$$

a pour équation

$$\alpha_1 F'_\alpha + \beta_1 F'_\beta + \gamma_1 F'_\gamma = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha F'_{\alpha_1} + \beta F'_{\beta_1} + \gamma F'_{\gamma_1} = 0.$$

*Tangente en coordonnées trilinéaires.* Soit $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ l'équation d'une courbe et $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ un point pris sur la courbe ayant pour coordonnées homogènes $x_1$, $y_1$, $z_1$. En remplaçant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par leurs expressions (6) on aura l'équation de la courbe en coordonnées homogènes : par cette substitution $F(\alpha, \beta, \gamma)$ se transforme identiquement en $f(x, y, z)$ premier membre de l'équation de la courbe en coordonnées homogènes. L'équation de la tangente au point $x_1$, $y_1$, $z_1$, est

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0$$

or l'identité

$$f(x, y, z) = F(\alpha, \beta, \gamma)$$

donne, en vertu des équations (6),

$$f'_{x_1} = aF'_{\alpha_1} + a'F'_{\beta_1} + a''F'_{\gamma_1}$$
$$f'_{y_1} = bF'_{\alpha_1} + b'F'_{\beta_1} + b''F'_{\gamma_1}$$
$$f'_{z_1} = cF'_{\alpha_1} + c'F'_{\beta_1} + c''F'_{\gamma_1},$$

d'où

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = \alpha F'_{\alpha_1} + \beta F'_{\beta_1} + \gamma F'_{\gamma_1}.$$

L'équation de la tangente du point $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ est donc

$$\alpha F'_{\alpha_1} + \beta F'_{\beta_1} + \gamma F'_{\gamma_1} = 0.$$

Les coordonnées tangentielles de cette tangente sont données par les équations

$$\rho U = F'_{\alpha_1} \quad , \quad \rho V = F'_{\beta_1} \quad , \quad \rho W = F'_{\gamma_1}$$

$\rho$ étant une constante différente de zéro.

On démontrera de même que :

1°) L'équation du point d'intersection de deux droites $D_1$ et $D_2$ de coordonnées $(U_1, V_1, W_1)$ et $(U_2, V_2, W_2)$ est

$$\begin{vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0;$$

2°) Les coordonnées d'une droite quelconque D passant par ce point sont

$$(D) \quad U = U_1 + \lambda U_2 \quad , \quad V = V_1 + \lambda V_2 \quad , \quad W = W_1 + \lambda W_2;$$

3°) La droite D' dont les coordonnées sont

$$(D') \quad U_1 - \lambda U_2 \quad , \quad V_1 - \lambda V_2 \quad , \quad W_1 - \lambda W_2$$

est conjuguée harmonique de D par rapport aux deux droites $D_1$ et $D_2$;

4°) Si $U_1$ $V_1$ $W_1$ sont les coordonnées d'une tangente à la courbe qui a pour équation tangentielle $\Phi(U, V, W) = 0$, l'équation du point de contact est

$$U\Phi'_{U_1} + V\Phi'_{V_1} + W\Phi'_{W_1} = 0$$

et les coordonnées de ce point sont données pour les formules

$$\rho\alpha = \Phi'_{U_1}\quad,\quad \rho\beta = \Phi'_{V_1}\quad,\quad \rho\gamma = \Phi'_{W}.$$

Voici quelques applications bien simples des considérations précédentes.

EXEMPLE I. *Former l'équation générale des coniques conjuguées par rapport au triangle de référence.*

Soit

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta = 0$$

l'équation d'une telle conique. La polaire de chaque sommet du triangle de déférence par rapport à cette conique doit être le côté opposé. La polaire du point $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ étant

$$\alpha_1 F'_\alpha + \beta_1 F'_\beta + \gamma_1 F'_\gamma = 0,$$

celle du sommet du triangle qui a pour coordonnées $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 \gtrless 0$ est

$$\frac{1}{2}F'_\gamma = B'\alpha + B\beta + A''\gamma = 0$$

cette polaire devant coïncider avec le côté opposé $\gamma = 0$, il faut $B = B' = 0$. On trouvera de même $B'' = 0$ et l'on aura pour l'équation demandée

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 = 0.$$

L'équation tangentielle de ces mêmes coniques est

$$\frac{U^2}{A} + \frac{V^2}{A'} + \frac{W^2}{A''} = 0.$$

Il faut remarquer que, dans ces formules, on peut supposer que l'un des sommets ou l'un des côtés du triangle de référence est à l'infini.

*Équation générale des coniques inscrites dans le triangle de référence.* — La courbe la plus générale de seconde classe est représentée en coordonnées tangentielles par l'équation

$$AU^2 + A'V^2 + A''W^2 + 2BVW + 2B'WU + 2B''UV = 0;$$

en exprimant que cette courbe est tangente aux trois côtés du triangle de référence qui ont pour coordonnées respectives.

$$V = 0 \text{ et } W = 0,\quad W = 0 \text{ et } U = 0,\quad U = 0 \text{ et } V = 0,$$

on trouve $A = A' = A'' = 0$. L'équation tangentielle des coniques considérées est donc

$$BVW + B'WU + B''UV = 0.$$

Quant à l'équation en coordonnées trilinéaires elle est

$$\begin{vmatrix} 0 & B'' & B' & \alpha \\ B'' & 0 & B & \beta \\ B' & B & 0 & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

ou $$B^2\alpha^2 + B'^2\beta^2 + B''^2\gamma^2 - 2B'B''\beta\gamma - 2BB''\alpha\gamma - 2BB'\alpha\beta = 0.$$

*Équation générale des coniques inscrites dans un quadrilatere.* Soient, en coordonnées homogènes,

$$P = lx + l'y + l''z = 0,\ Q = mx + m'y + m''z = 0,\ R = nx + n'y + n''z = 0,$$
$$S = kx + k'y + k''z = 0$$

les équations des quatre côtés du quadrilatère. On pourra toujours trouver trois fonctions linéaires homogènes

$$\alpha = ax + a'y + a''z,\quad \beta = bx + b'y + b''z,\quad \gamma = cx + c'y + c''z$$

et quatre constantes $p$, $q$, $r$, $s$ de telle façon que l'on ait identiquement

$$(1)\qquad \begin{array}{ll} pP = \alpha + \beta + \gamma, & qQ = \alpha - \beta - \gamma, \\ rR = \alpha - \beta + \gamma & sS = \alpha + \beta - \gamma; \end{array}$$

l'identification des deux membres de ces identités fournira douze équations homogènes du premier degré entre les treize constantes inconnues

$$a, a', a'' \ ;\ b, b', b'' \ ,\ c, c', c'' \ ;\ p, q, r, s.$$

L'on peut simplifier le calcul comme il suit. L'on tire immédiatement des identités (1) la suivante.

$$(2)\qquad pP + qQ - rR - sS = 0$$

qui déterminera $p$, $q$, $r$, $s$ ou plutôt les rapports de ces quatre constantes à l'une d'elles. Les constantes $p$, $q$, $r$, $s$ étant ainsi déterminées, l'une des identités (1) est une conséquence des trois autres : l'on en tirera

$$\begin{aligned} 2\alpha &= pP + qQ = rR + sS \\ 2\beta &= pP - rR = sS - qQ \\ 2\gamma &= pP - sS = rR - qQ, \end{aligned}$$

les fonctions $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont donc connues; les deux expressions trouvées pour chacune de ces fonctions linéaires sont identiques en vertu de l'identité (2). Les trois droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ sont les diagonales du quadrilatère complet donné. En effet, l'équation de la droite $\alpha = 0$ peut s'écrire sous les deux formes

$$pP + qQ = 0 \quad,\quad rR + sS = 0;$$

la première montre que cette droite passe par le sommet du quadrilatère situé à l'intersection des côtés $P = 0$, $Q = 0$, et la seconde qu'elle passe par le sommet opposé $R = 0$, $S = 0$.

Ainsi, en prenant pour triangle de référence le triangle formé par les trois diagonales d'un quadrilatère complet, on pourra mettre les équations des côtés du quadrilatère sous la forme

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,\ \alpha + \beta - \gamma = 0,\ \alpha - \beta + \gamma = 0,\ \alpha - \beta - \gamma = 0.$$

Le sommet $P = 0\ Q = 0$ a pour coordonnées trilinéaires $\alpha = 0\ \beta + \gamma = 0$ et le sommet opposé $R = 0$, $S = 0$ a pour coordonnées trilinéaires

$\alpha=0$, $\beta=\gamma$. Le premier de ces points a pour équation tangentielle $V+W=0$ et le second $V-W=0$ : l'ensemble de ces deux sommets opposés est donc représenté par l'équation tangentielle $V^2-W^2=0$. De même l'ensemble des deux sommets opposés $P=0$, $S=0$ et $Q=0, R=0$ est représenté par l'équation tangentielle $U^2-V^2=0$. L'équation tangentielle générale des coniques incrites dans le quadrilatère est donc (N° 307, Ex. II)

$$V^2-W^2+\lambda(U^2-V^2)=0$$

ou

$$\lambda U^2+(1-\lambda)V^2-W^2=0.$$

L'équation de ces mêmes coniques en coordonnées trilinéaires est

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}+\frac{\beta^2}{1-\lambda}-\gamma^2=0.$$

Remarque. En faisant en particulier

$$\alpha=\frac{x}{c}, \quad \beta=\frac{y\sqrt{-1}}{c}, \quad \gamma=z=1, \quad \lambda c^2=\mu$$

on a l'équation

$$\frac{x^2}{\mu}+\frac{y^2}{\mu-c^2}-1=0$$

des coniques homofocales.

Exemple II. Considérons deux triangles polaires réciproques par rapport à une conique donnée; afin de simplifier prenons les côtés de l'un des triangles comme lignes de repère servant à la définition des nouvelles coordonnées, et soit

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{2}(A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\gamma\alpha+2B''\alpha\beta)=0$$

l'équation de la conique. La polaire d'un point quelconque $(\alpha', \beta', \gamma')$ a pour équation $\alpha' f'_\alpha+\beta' f'_\beta+\gamma' f'_\gamma=0$. En particulier, les polaires des trois sommets $(\beta'=0, \gamma'=0)$, $(\gamma'=0, \alpha'=0)$, $(\alpha'=0, \beta'=0)$ du triangle sont représentées par les équations

$f'_\alpha=A\alpha+B''\beta+B'\gamma=0$, $f'_\beta=B''\alpha+A'\beta+B\gamma=0$, $f'_\gamma=B'\alpha+B\beta+A''\gamma=0$.

Ces polaires sont les côtés du second triangle. Les coordonnées du point d'intersection des deux côtés correspondants $\alpha=0$, $f'_\alpha=0$ vérifient les équations $\alpha=0$, $B''\beta+B'\gamma=0$, ou $\alpha=0$, $\frac{\beta}{B'}+\frac{\gamma}{B''}=0$; ce point est situé sur la droite $\frac{\alpha}{B}+\frac{\beta}{B'}+\frac{\gamma}{B''}=0$, et il en est de même des deux autres. Ainsi *les trois points de rencontre des côtés correspondants de deux triangles polaires réciproques sont en ligne droite.*

Un sommet du second triangle est donné par les deux équations $f'_\alpha=0$, $f'_\beta=0$, la droite $Bf'_\alpha=B'f'_\beta$ passe par ce point; comme l'équa-

tion ne contient plus la lettre $\gamma$, cette droite passe évidemment par le sommet ($\alpha = 0$, $\beta = 0$) du premier triangle. Les droites qui joignent les sommets correspondants étant représentées par les équations $Bf'_\alpha = B'f'_\beta = B''f'_\gamma$, on en conclut que *ces trois droites passent par un même point.*

Exemple III. Un triangle *abc* est inscrit dans une conique; deux de ses côtés *ab* et *ac* tournent autour de deux points fixes *p* et *q* (fig. 205), trouver l'enveloppe du troisième côté *bc*. Soient $\gamma = 0$, l'équation de la droite *pq*, $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ celles des tangentes aux points *d* et *e* où cette droite rencontre la courbe; l'équation de la conique sera de la forme $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$. On peut regarder les points *p* et *q* comme les points où la droite $\gamma = 0$ est coupée par deux droites $\alpha + p\beta = 0$, $\alpha + q\beta = 0$,

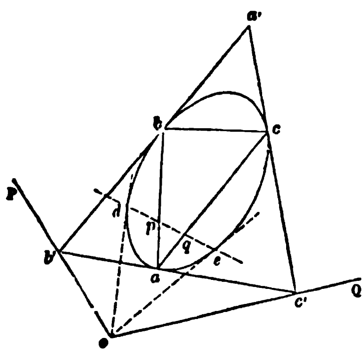


Fig. 205.

qui passent par le point d'intersection *o* des tangentes en *d* et *e*. Un point quelconque *a* de la courbe peut être déterminé par l'intersection de deux droites $\alpha - a\gamma = 0$, $\beta - \frac{\gamma}{a} = 0$ passant par les points *d* et *e*, *a* étant un paramètre arbitraire qui définit la position du point *a* sur la courbe. En attribuant à ce paramètre une autre valeur *b*, on obtient un autre point *b*. Une droite quelconque passant par le point *a* a une équation de la forme $\alpha - a\gamma + k\left(\beta - \frac{\gamma}{a}\right) = 0$; pour qu'elle passe par le point *b* qui est représenté par les deux équations $\alpha - b\gamma = 0$, $\beta - \frac{\gamma}{b} = 0$, il faut faire $k = ab$; ainsi la droite qui joint deux points quelconques *a* et *b* de la courbe a pour équation $\alpha + ab\beta - (a + b)\gamma = 0$.

Cela posé, soient *a*, *b*, *c* les valeurs du paramètre pour les trois sommets *a*, *b*, *c* du triangle; le côté *ab* passant par le point *p*, on a $ab = p$; le côté *ac* passant par le point *q*, on a de même $ac = q$; le côté *bc* a pour équation $\alpha + bc\beta - (b + c)\gamma = 0$; si l'on remplace *b* et *c* par leurs valeurs $\frac{p}{a}$ et $\frac{q}{a}$, l'équation devient

$$a^2\alpha + pq\beta - (p + q)a\gamma = 0.$$

Si entre cette équation et l'équation

$$2a\alpha - (p+q)\gamma = 0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée par rapport à $a$, on élimine le paramètre variable $a$, on a l'équation de l'enveloppe de la droite $bc$

$$\alpha\beta + \frac{(p+q)^2}{4pq}\gamma^2 = 0$$

Cette enveloppe est une conique qui touche la première aux points $d$ et $e$.

Les coordonnées tangentielles U, V, W de la droite mobile sont données par les équations:

$$\rho U = a^2, \quad \rho V = pq, \quad \rho W = -(p+q)a;$$

l'élimination de $a$ et $\rho$ donne pour l'équation tangentielle de l'enveloppe $UV(p+q)^2 - W^2pq = 0$.

Si l'on mène les tangentes à la conique proposée aux points $a, b, c$, on forme un triangle circonscrit $a'b'c'$, dont les deux sommets $b'$ et $c'$ glissent sur deux droites fixes P et Q, polaires des points $p$ et $q$; la courbe décrite par le sommet $a'$, pôle de la droite $bc$, est la polaire réciproque de l'enveloppe; c'est donc aussi une conique doublement tangente à la première suivant la ligne $de$.

## EXERCICES.

1. Les huit points de contact des tangentes communes à deux coniques données sont situés sur une même conique.

2. Un triangle est inscrit dans une conique, deux côtés passent par deux points fixes ou roulent sur deux coniques doublement tangentes à la première, l'enveloppe du troisième côté est une conique. — Théorème corrélatif.

3. Un polygone de $n$ côtés est inscrit dans une conique; $n-1$ côtés roulent sur des coniques doublement tangentes à la première; l'enveloppe du $n^e$ côté est une conique. — Théorème corrélatif.

4. Étant données deux coniques S et S', et deux tangentes à la conique S', les six droites qui joignent deux à deux les quatre points où ces tangentes coupent la conique S sont deux à deux tangentes à une même conique passant par les points d'intersection des coniques S et S'. — Théorème corrélatif.

5. Étant données trois coniques ayant quatre points communs, un triangle inscrit dans l'une d'elles a deux de ses côtés tangents respectivement aux deux autres, le troisième côté enveloppe une conique. — Théorème corrélatif.

6. Étant données $n$ coniques ayant quatre points communs, un

polygone de $n$ côtés inscrit dans l'une d'elles a $n-1$ de ses côtés tangents respectivement aux autres, le $n^e$ côté enveloppe une conique. — Théorème corrélatif.

7. Un polygone, dans une de ses positions, est inscrit à une conique et circonscrit à une autre conique; si l'on fait mouvoir les sommets sur la première conique, de manière que $n-1$ côté restent tangents à la seconde, le $n^e$ côté restera constamment tangent à cette seconde conique.

Dans les théorèmes 4, 5, 6 et 7, on peut remplacer les coniques qui ont quatre points communs par des coniques homothétiques ayant deux points communs, et en particulier par des cercles ayant deux à deux le même axe radical.

8. L'enveloppe des droites qui coupent deux coniques données suivant quatre points en proportion harmonique est une conique. — Théorème corrélatif.

Si les deux coniques ont pour équations en coordonnées trilinéaires $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$, $A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2=0$, la condition nécessaire et suffisante pour que la droite $u\alpha+v\beta+w\gamma=0$ coupe les deux coniques suivant quatre points en proportion harmonique est

$$(B+C)u^2+(C+A)v^2+(A+B)w^2=0.$$

Qu'arrive-t-il quand $A+B=0$ ? Appliquer au cas particulier où l'une des coniques étant un cercle, l'autre est une hyperbole équilatère concentrique.

9. On sait que les polaires d'un point $p$ par rapport à toutes les coniques ayant quatre points communs passent par un même point $q$; si le point $p$ décrit une droite, le point $q$ décrit une conique. — Théorème corrélatif.

10. Lorsque deux côtés d'un triangle inscrit dans une conique roulent sur deux courbes quelconques données, le troisième côté enveloppe une troisième courbe; démontrer que les droites qui joignent les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés passent par un même point. — Théorème corrélatif.

11. Étant donné un hexagone inscrit dans une conique, on prend les points d'intersection des côtés opposés, puis les points d'intersection de chacune des trois diagonales avec les deux côtés opposés : les neuf points ainsi obtenus sont situés sur trois droites passant par un même point.

12. Étant donnée une conique S, on mène une conique variable S′ qui coupe la première en deux points fixes et qui touche deux droites fixes dont le point de rencontre est situé sur la conique S; l'enveloppe de la droite qui passe par les deux autres points d'intersection des coniques S et S′ est une conique. — Théorème corrélatif.

13. Un quadrilatère étant circonscrit à une conique, si on mène une tangente quelconque à la conique, on sait que le rapport du produit des distances de cette tangente à deux sommets opposés du quadrilatère au produit des distances de cette même tangente à deux autres sommets opposés est constant; démontrer que ce rapport est égal au produit des distances des deux premiers sommets à l'un des foyers divisé par le produit des distances des deux autres sommets au même foyer.

14. Les six côtés de deux triangles quelconques inscrits dans une même conique sont tangents à une autre conique. — Théorème corrélatif.

15. Trois points sont dit conjugués par rapport à une conique, lorsque la polaire de l'un d'eux est la droite qui joint les deux autres. Démontrer que deux systèmes de trois points conjugués par rapport à une conique sont situés sur une autre conique. — Thorème corrélatif.

16. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une conique coïncide avec sa polaire réciproque par rapport au cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

17. L'équation tangentielle d'une conique en coordonnées rectangulaires étant

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f = 0,$$

démontrer que le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique, a pour équation

$$f(x^2 + y^2) - 2dx - 2ey + a + c = 0.$$

18. On considère une conique variable tangente à quatre droites fixes. Démontrer que le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette conique passe par deux points fixes, réels ou imaginaires.

19. On considère une conique variable tangente à trois droites fixes. Démontrer que le cercle lien des sommets des angles droits circonscrits à cette conique est orthogonal au cercle conjugué au triangle formé par les trois droites.

20. Soit une conique ayant pour équation $f(x,y) - (lx + my + n)^2 = 0$, $f(x,y)$ étant un polynôme du second degré en $x$ et $y$. Démontrer que l'équation tangentielle de cette conique est de la même forme

$$\varphi(u,v) - (\lambda u + \mu v + \nu)^2 = 0$$

$\varphi$ étant du second degré en $u$ et $v$. Appliquer au cas où

$$f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

21. Former l'équation tangentielle de la courbe engendrée par un

point d'une circonférence roulant dans l'intérieur d'une circonférence de rayon triple. (Hypocycloïde à trois rebroussements). En écrivant l'équation de la tangente à la courbe sous la forme

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = p$$

on montrera que $p$ est de la forme

$$p = a \cos (3\alpha + \alpha_0)$$

$a$ et $\alpha_0$ désignent des constantes.

22. Enveloppe des axes et des tangentes au sommet des paraboles inscrites dans un triangle.

23. Enveloppe des axes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.

24. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites ayant pour coordonnées $(u,v)$ $(u',v')$ se coupent sur la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

est

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u & u' \\ B & C & E & v & v' \\ D & E & F & 1 & 1 \\ u & v & 1 & 0 & 0 \\ u' & v' & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

# CHAPITRE XII

## Sécantes communes à deux coniques.

**332.** Nous avons formé précédemment (nº 286) une équation du troisième degré.

(1) $$\Delta + \Theta\lambda + \Theta'\lambda^2 + \Delta'\lambda^3 = 0,$$

donnant les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation

$$S + \lambda S' = 0$$

représente deux droites. Nous nous proposons de montrer comment l'on peut, de la nature des racines de l'équation (1) appelée équation en $\lambda$, déduire la nature des points communs aux deux coniques $S = 0$ $S' = 0$. Nous nous servirons pour cela d'une méthode indiquée par M. Darboux qui se trouve reproduite dans l'excellent *Traité de Géométrie analytique* de M. Pruvost. Cette méthode repose sur les lemmes suivants.

1). Si l'équation

$$S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

représente deux droites concourantes ou parallèles, les coordonnées homogènes $a, b, c$ du point de concours, situé à distance finie ou infinie, vérifient les conditions.

(2) $$\frac{a^2}{\mathbf{a}} = \frac{ab}{\mathbf{b}} = \frac{b^2}{\mathbf{c}} = \frac{ac}{\mathbf{d}} = \frac{bc}{\mathbf{e}} = \frac{c^2}{\mathbf{f}}.$$

En effet soient

$$P = ux + vy + wz = 0 \ , \ Q = u'x + v'y + w'z = 0,$$

les équations des deux droites : l'on aura identiquement

$$S = PQ;$$

d'où en prenant successivement les dérivées partielles des deux membres par rapport à $x, y, z$.

$$Ax + By + Dz = \frac{1}{2}(Pu' + Qu)$$

$$Bx + Cy + Ez = \frac{1}{2}(Pv' + Qv)$$

$$Dx + Ey + Fz = \frac{1}{2}(Pw' + Qw).$$

Les coordonnées homogènes $a, b, c$ du point de concours des deux droites annulent les premiers membres P et Q des équations des deux droites : elles vérifient donc les trois équations

$$\begin{aligned} Aa + Bb + Dc &= 0 \\ Ba + Cb + Ec &= 0 \\ Da + Eb + Fc &= 0 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit facilement

$$\frac{a}{\mathbf{a}} = \frac{b}{\mathbf{b}} = \frac{c}{\mathbf{d}}$$

$$\frac{a}{\mathbf{b}} = \frac{b}{\mathbf{c}} = \frac{c}{\mathbf{e}}$$

$$\frac{a}{\mathbf{d}} = \frac{b}{\mathbf{e}} = \frac{c}{\mathbf{f}};$$

en multipliant le premier groupe de ces relations par $a$, le deuxième par $b$, le troisième par $c$, on obtient les relations (2) à démontrer.

Conséquences. L'équation $S = 0$ représentant deux droites, le discriminant $\Delta$ est nul et l'équation (1) a une racine nulle. Si l'on a en outre $\Theta = 0$, cette racine nulle est double : et alors, le point de concours des droites $P = 0$, $Q = 0$ qui forment la conique S se trouve sur S'. En effet on a

$$\Theta = A'\mathbf{a} + 2B'\mathbf{h} + C'\mathbf{c} + 2D'\mathbf{d} + 2E'\mathbf{e} + F'\mathbf{f}.$$

D'après les relations (2), la condition $\Theta = 0$, dans laquelle on remplace $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, etc., par les quantités proportionnelles $a^2$, $2ab$, $b^2$, . . , devient

$$A'a^2 + 2B'ab + C'c^2 + 2D'ac + 2E'bc + F'c^2 = 0,$$

condition qui exprime que le point $(a, b, c)$ est sur la conique $S' = 0$.

2) Si, outre les conditions $\Delta = 0$, $\Theta = 0$, l'on a encore $\Theta' = 0$, l'une des deux droites dans lesquelles se décompose la conique $S = 0$ est tangente à S'. Dans ce cas l'équation (1) a une racine *triple nulle*.

L'identité

$$S = PQ = (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z)$$

donne

$$A = uu',\ 2B = uv' + vu',\ C = vv',$$
$$2D = uw' + wu',\ 2E = vw' + wv',\ F = ww';$$

et, puisque

$$\Theta' = Aa' + 2Bb' + Cc' + 2Dd' + 2Ee' + Ff',$$

la condition $\Theta' = 0$ devient

$$a'uu' + b'(uv' + vu') + c'vv' + d'(uw' + wu') + e'(vw' + wv') + f'ww' = 0;$$

elle exprime que le pôle de l'une des droites $P = 0$, $Q = 0$ par rapport à $S'$ se trouve sur l'autre (n° 296), c'est-à-dire que ces deux droites sont conjuguées par rapport à la conique $S' = 0$. Comme leur point d'intersection est situé sur cette même conique, l'une de ces droites lui est nécessairement tangente.

**333.** Nous venons d'examiner ce qui se passe quand la conique $S = 0$ est formée de deux droites; nous allons ramener le cas général à celui-là. Pour cela, supposons les coniques S et S' quelconques et appelons $\lambda_1$ une racine de l'équation (1). La conique

$$S + \lambda_1 S' = 0$$

sera décomposée en deux droites $P_1 = 0$ et $Q_1 = 0$. Posons

$$(3) \qquad S + \lambda_1 S' = S_1\ ,\ \alpha S + \beta S' = S'_1$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux constantes quelconques assujetties à la condition de ne pas annuler la quantité $(\beta - \alpha\lambda_1)$ déterminant des coefficients de S et S' dans les relations (3). Alors $S_1 = 0$ est l'équation du couple de sécantes communes aux coniques $S = 0$ $S' = 0$ qui correspond à la racine $\lambda = \lambda_1$, et $S'_1 = 0$ est l'équation d'une conique quelconque, distincte de $S_1 = 0$, passant par les points d'intersection des coniques données $S = 0$, $S' = 0$. Comme les identités (3) résolues par rapport à S et S' donnent

$$(\beta - \alpha\lambda_1) S = \beta S_1 - \lambda_1 S'_1$$
$$(\beta - \alpha\lambda_1) S' = -\alpha S_1 + S'_1\ ;$$

l'équation générale $S+\lambda S'=0$ peut s'écrire

$$S_1(\beta-\alpha\lambda)+S'_1(\lambda-\lambda_1)=0$$

ou

$$S_1+\mu S'_1=0,$$

en posant

$$(4) \qquad \mu=\frac{\lambda-\lambda_1}{\beta-\lambda\alpha}.$$

Ainsi, $\mu$ étant lié à $\lambda$ par la relation (4), les deux équations

$$S+\lambda S'=0 \quad , \quad S_1+\mu S'_1=0$$

représentent la *même conique*. Si l'on cherche les valeurs de $\mu$ pour lesquelles cette conique se réduit à deux droites, on obtient une équation du troisième degré en $\mu$.

$$(5) \qquad \Delta_1+\Theta_1\mu+\Theta'_1\mu^2+\Delta'_1\mu^3=0$$

dans laquelle $\Delta_1=0$ puisque $S_1$ est décomposée en deux droites. Il résulte de la relation (4) qu'à la racine $\lambda=\lambda_1$ de l'équation (1) correspond la racine $\mu=0$ de l'équation (5) avec le même degré de multiplicité.

Si la racine $\lambda_1$ est simple, la racine $\mu=0$ est simple aussi, $\Theta_1$ est donc différent de zéro et le point de concours des droites représentées par l'équation $S_1=0$ n'est pas sur la conique $S'_1$.

Si la racine $\lambda_1$ est double, la racine $\mu=0$ de l'équation (5) sera double, $\Theta_1$ sera nul et le point de concours des deux droites $S_1=0$ sera sur la conique $S'_1$. Il peut arriver, comme cas particulier, que tous les mineurs de $\Delta_1$ soient nuls, alors $\Theta_1$ est nul quelle que soit la conique $S'_1$, la conique $S_1=0$ se réduit à une droite double.

Enfin, si la racine $\lambda_1$ est triple, la racine $\mu=0$ de l'équation (5) sera triple également, $\Theta_1$ et $\Theta'_1$ seront nuls ; le point de concours des droites $S_1=0$ sera sur $S'_1$ et l'une de ces droites sera tangente à $S'_1$. Il peut arriver, comme cas particulier, que tous les mineurs de $\Delta_1$ soient nuls, alors la conique $S_1=0$ se réduit à une *droite double tangente* à $S'_1$.

Ceci posé appelons $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, les trois racines de l'équation (1) en $\lambda$.

1°) Si ces racines sont inégales, chaque couple de sécantes est formé de deux droites distinctes, dont le point de concours

n'est situé sur aucune des coniques données : ces coniques se coupent donc en *quatre points distincts.*

Pour voir combien de ces points sont réels, on a recours aux considérations suivantes :

*a*) Les trois racines $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, sont réelles et les couples de sécantes correspondant à deux d'entre elles sont réels : ces deux couples de droites réelles se coupent en *quatre points réels et distincts.* Les quatre points d'intersection des coniques sont donc réels et distincts. Il est évident que le troisième couple de sécantes est réel aussi puisqu'il passe par les points d'intersection des deux coniques qui sont réels.

*b*) Les racines $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sont réelles, mais un seul couple de sécantes est réel. Alors les quatre points d'intersection sont imaginaires. En effet un couple de sécantes imaginaires à coefficients réels n'a qu'un point réel, le point de concours des sécantes; ce point n'appartenant à aucune des coniques S ou S', les points d'intersection qui sont situés tous quatre sur ce couple imaginaire seront nécessairement imaginaires.

*c*) Une racine $\lambda_1$ est réelle, les deux autres $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont imaginaires. Deux des points d'intersection sont réels et deux imaginaires. En effet si $\lambda_2$ est imaginaire $\lambda_2 = p + iq$, le couple correspondant.

$$S + (p + iq) S' = o$$

est formé de deux *droites imaginaires*, mais *non imaginaires conjuguées*. D'abord ce couple est formé de deux droites imaginaires, car si une de ces droites était réelle, les coordonnées d'un point de cette droite devraient annuler $S + pS'$ d'une part et le coefficient S' de $i$, d'autre part; c'est-à-dire S et S'; les deux coniques auraient donc une droite commune, ce qui est contre l'hypothèse. Ensuite le couple considéré n'est pas formé de droites imaginaires conjuguées : car s'il en était ainsi, le point de concours de ces droites serait réel, et ses coordonnées annuleraient à la fois les trois dérivées partielles de $S + (p + iq) S'$ par rapport à $x. y, z$, c'est-à-dire les trois dérivées partielles de chacun des polynômes S et S'; les deux coniques $S = o$ $S' = o$ seraient deux couples de droites con-

courant au même point, ce qui est aussi contre l'hypothèse. Cela posé, le couple correspondant à la racine $\lambda_2$ sera formé de deux droites ayant pour équations

$$P + iQ = 0 \ , \ R + iS = 0,$$

et celui qui correspond à la racine conjuguée $\lambda_3$ des deux droites

$$P - iQ = 0 \ , \ R - iS = 0.$$

Ces deux couples et, par suite, les deux coniques se coupent donc en deux points réels situés l'un à l'intersection des droites $P = 0$, $Q = 0$; l'autre à l'intersection des droites $R = 0$, $S = 0$. Les deux autres points d'intersection sont imaginaires, car sur une droite imaginaire il n'y a qu'*un point réel.*

2°) Si l'équation en $\lambda$ a une racine double $\lambda_1$ et une racine simple $\lambda_3$, le point de concours $O_1$ des deux droites *supposées distinctes* du couple

$$S_1 = S + \lambda_1 S' = 0$$

correspondant à la racine double; se trouve sur les coniques S et S' et, plus généralement, sur toutes les coniques $\alpha S + \beta S' = 0$; le point de concours $O_3$ des droites du couple

$$S_3 = S + \lambda_3 S' = 0$$

ne se trouve au contraire sur aucune de ces coniques autre que $S_3$ lui-même. En particulier, le point $O_1$ se trouve sur le couple $S_3$, tandis que $O_3$ ne se trouve pas sur le couple $S_1$. Les points d'intersection des deux couples de droites $S_1 = 0$ $S_3 = 0$ et, par suite, ceux des deux coniques sont donc disposés de la façon suivante : deux de ces points sont confondus en $O_1$ sur celle des droites D du couple $S_3$ qui passe par ce point; les deux autres points A et B sont à l'intersection du couple $S_1$ avec la deuxième droite D' du couple $S_3$. Les deux coniques S et S' sont tangentes en $O_1$ à la droite D, et se coupent aux deux points A et B situés sur D'.

Comme le couple $S_1 = 0$ est formé de deux droites distinctes, leur point de concours $O_1$, c'est-à-dire le point de contact des deux coniques est réel : le couple $S_3$ contenant la tangente à

ces coniques au point $O_1$ est réel ; les points A et B seront réels ou imaginaires suivant que le couple $S_1$ est réel ou imaginaire.

Si le couple $S_1$ est formé d'une droite double, les points d'intersection des coniques sont confondus deux à deux aux points où la droite double rencontre les deux droites D et D′ du couple $S_2$ correspondant à la racine simple. Les deux coniques sont bitangentes : la droite double est la droite des contacts, et les deux droites D et D′ sont les tangentes aux points de contact ; ces points de contact sont réels ou imaginaires suivant que le couple $S_2$ est réel ou imaginaire.

3°) L'équation en $\lambda$ a une racine triple $\lambda_1$. Si le couple qui correspond à cette racine est formé de deux droites distinctes, leur point de concours O se trouve sur les deux coniques et l'une des droites de ce couple est tangente aux deux coniques en O. Les deux coniques se coupent donc en trois points confondus en O et en un autre point A : ces points O et A sont nécessairement réels. On dit, dans ce cas, que les deux coniques sont osculatrices en O.

Si le couple qui correspond à la racine triple $\lambda_1$ est une droite double, cette droite doit passer par les points communs aux deux coniques et être tangente aux deux coniques : elle touchera les deux coniques en un même point O. Les deux courbes se couperont donc en quatre points confondus avec O : on dit qu'elles sont surosculatrices.

Si le couple correspondant à la racine triple $\lambda_1$ est indéterminé, les deux coniques se confondent.

Remarque. Cherchons dans quels cas l'équation en $\lambda$ est indéterminée : il faudrait pour cela que toutes les coniques représentées par l'équation

$$S + \lambda S' = 0$$

fussent des systèmes de droites. On aurait alors à la fois

$$\Delta = \Theta = \Theta' = \Delta' = 0.$$

Les conditions $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$ montrent que les deux coniques doivent être des systèmes de droites. La condition $\Theta = 0$ signifie que le point de concours O des droites représentées

par $S=0$ est sur $S'=0$, et $\Theta'=0$ signifie de même que le point de concours O′ des droites $S'=0$ est sur $S=0$. Si les points O et O′ sont distincts, il résulte de là que la droite O O′ doit appartenir aux deux coniques; si O coïncide avec O′ les deux coniques sont des couples de droites, concourant au même point. Réciproquement, si l'une de ces conditions est remplie l'équation en $\lambda$ est indéterminée. On a, en effet $\Delta=\Theta=\Theta'=\Delta'=0$. On peut encore vérifier directement que, dans ces deux cas, l'équation

$$S+\lambda S'=0$$

représente des droites quel que soit $\lambda$. En effet si les coniques S et S′ sont des systèmes de droites ayant une droite commune, on a identiquement

$$S=PQ\ ,\ S'=PR$$

P, Q, R étant des fonctions linéaires de $x$, $y$, $z$, et l'équation $S+\lambda S'=0$ devient

$$P(Q+\lambda R)=0$$

elle représente deux droites.

Si S et S′ sont des systèmes de droites concourant au même point : on a

$$S=PQ\ ,\ S'=(aP+bQ)(a'P+b'Q);$$

$S+\lambda S'$ est alors un polynôme homogène du second degré en P et Q et est, par suite, quel que soit $\lambda$, décomposable en deux facteurs du premier degré

$$(\alpha P+\beta Q)(\alpha' P+\beta' Q).$$

Exemple. Soit une conique qui rapportée à des axes rectangulaires a pour équation

$$S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0$$

c'est-à-dire est tangente à l'origine à l'axe $Ox$; on demande le rayon du cercle osculateur à cette conique à l'origine.

Le cercle osculateur étant tangent à l'axe $Ox$, son équation sera

$$S' = x^2 + y^2 + 2Ry = 0.$$

L'équation $S + \lambda S' = 0$ sera donc

$$(A + \lambda)\, x^2 + 2Bxy + (C + \lambda)\, y^2 + 2\,(E + \lambda R)\, y = 0.$$

En égalant le discriminant de ce polynôme à zéro, on obtient l'équation en $\lambda$

$$(A+\lambda)(E+\lambda R)^2=0$$

qui admet, quel que soit R, la racine double $\lambda_1=-\frac{E}{R}$ et la racine simple $\lambda_3=-A$. Pour que les deux courbes soient osculatrices, il faut et il suffit que l'équation en $\lambda$ ait une racine triple, c'est-à-dire que $\lambda_1=\lambda_3$ ou

$$\frac{E}{R}=A \quad , \quad R=\frac{E}{A}.$$

L'ordonnée du centre du cercle osculateur est donc $-\frac{E}{A}$ et le rayon de ce cercle est la valeur absolue de $\frac{E}{A}$. Ce rayon est appelé rayon de courbure de la conique à l'origine.

Si nous supposons

$$R=\frac{E}{A},$$

le cercle est osculateur : pour qu'il soit surosculateur, il faut et il suffit que le couple de sécantes correspondant à la racine triple

$$\lambda=-A=-\frac{E}{R}$$

soit une droite double. Or, ce couple est

$$y^2(C-A)+2Bxy=0;$$

pour qu'il soit une droite double, il faut et il suffit $B=0$. Alors l'équation de la conique devient

$$Ax^2+Cy^2+2Ey=0$$

et l'origine est un sommet. C'est donc seulement aux sommets d'une conique que le cercle osculateur devient surosculateur.

THÉORÈME. *Les racines de l'équation en $\lambda$ restent les mêmes quand on rapporte les deux coniques* S *et* S′ *à d'autres axes coordonnés.*

En effet, supposons que l'on rapporte les deux coniques $S=0$, $S'=0$ à d'autres axes coordonnés $O_1x_1$, $O_1y_1$. Les formules du changement de coordonnées donneront

$$(6) \qquad \begin{aligned} x&=ax_1+by_1+cz_1\\ y&=a'x_1+b'y_1+c'z_1\\ z&=z_1 \end{aligned}$$

et, par la substitution de ces valeurs dans les équations des deux coniques, on aura

$$S = A_1 x_1^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1^2 + 2D_1 x_1 z_1 + 2E_1 y_1 z_1 + F_1 z_1^2 = 0$$
$$S' = A'_1 x_1^2 + \quad \ldots \quad + F'_1 z_1^2 = 0.$$

L'équation
$$S + \lambda S' = 0$$
deviendra donc
$$(A_1 + \lambda A'_1) x_1^2 + 2(B_1 + \lambda B'_1) x_1 y_1 + \ldots = 0.$$

Pour que la conique $S + \lambda S' = 0$ se décompose en deux droites, il faut et il suffit que le discriminant de ce polynôme en $x_1, y_1, z_1$ soit nul, ce qui donne pour déterminer $\lambda$ une nouvelle équation du troisième degré

$$(7) \qquad \Delta_1 + \Theta_1 \lambda + \Theta'_1 \lambda^2 + \Delta'_1 \lambda^3 = 0.$$

*Cette équation admet les mêmes racines que l'équation* (1). Cela résulte de ce que l'une et l'autre des équations (1) et (7) donnent les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation $S + \lambda S' = 0$ représente deux droites. Si l'équation (1) a ses trois racines distinctes, l'équation (7) aura les mêmes racines et par suite on aura

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Theta_1}{\Theta} = \frac{\Theta'_1}{\Theta'} = \frac{\Delta'_1}{\Delta'};$$

ces relations seront identiques si l'on y remplace les coefficients $A_1, A'_1, B_1, B'_1 \ldots F_1, F'_1$ par leurs expressions en fonction de $A, A', B, B', \ldots F, F'$; elles subsisteront donc encore quand l'*une des équations* (1) *ou* (7) *aura des racines multiples. Donc, dans tous les cas, ces deux équations ont les mêmes racines.*

## EXERCICES

1. Soit $M_1$ $(x_1, y_1)$ un point pris sur une conique ayant pour équation $f(x, y) = 0$. Démontrer

1° Que l'équation générale des coniques osculatrices à la conique $f = 0$ au point $M_1$ est
$$f(x, y) + [\lambda(x - x_1) + \mu(y - y_1)](xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + f'_{z_1}) = 0,$$
$\lambda$ et $\mu$ désignant deux paramètres variables.

2° Que l'équation générale des coniques surosculatrices à la conique $f = 0$ au même point est
$$f(x, y) + \lambda[xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + f'_{z_1}]^2 = 0,$$
$\lambda$ désignant un paramètre variable.

2. Les hyperboles équilatères qui sont osculatrices en un point $M_1$ à une conique donnée $f=0$ passent par un point fixe P. On demande

1° Le lieu du centre de ces hyperboles équilatères.

2° Le lieu du point P quand le point $M_1$ décrit la conique $f=0$.

3. Placer deux paraboles égales dont les axes sont rectangulaires, de façon qu'elles soient osculatrices.

4. Étant donnés une parabole et un cercle passant par le foyer, trouver où doit être le centre du cercle pour qu'il ait avec la parabole quatre points d'intersection réels, ou deux points réels et deux imaginaires ou quatre points imaginaires. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare ces différentes régions (École polytechnique, 1865).

5. Soient

$$\Sigma = au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0,$$
$$\Sigma' = a'u^2 + 2b'uv + c'v^2 + 2d'uw + 2e'vw + fw^2 = 0,$$

les équations tangentielles de deux coniques S et S'. On demande :

1° De former l'équation du troisième degré donnant les valeurs de $\mu$ pour lesquelles l'équation

$$\Sigma + \mu\Sigma' = 0$$

représente deux points.

2° D'indiquer de quelle façon les racines de cette équation en $\mu$ sont liées aux racines de l'équation en $\lambda$ relative aux deux coniques S et S'.

## RELATIONS ENTRE LES RACINES DE L'ÉQUATION EN $\lambda$.

Soient

$$S = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$
$$S' = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'xz + 2E'yz + F'z^2 = 0,$$

les équations de deux coniques que l'on a rendues homogènes en remplaçant $x$ et $y$ par $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ et multipliant par $z^2$. Les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation

$$S + \lambda S' = 0$$

représente deux droites, sont données par l'équation du troisième degré

$$(1) \qquad \Delta + \Theta\lambda + \Theta'\lambda^2 + \Delta'\lambda^3 = 0.$$

Nous avons vu précédemment que les racines de cette

équation restent les mêmes quand on rapporte les coniques S et S' à d'autres axes. Supposons, plus généralement, que l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma$ trois fonctions linéaires de $x, y, z$.

$$(2) \qquad \begin{aligned} \alpha &= ax + by + cz \\ \beta &= a'x + b'y + c'z \\ \gamma &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}$$

qui égalées à zéro représentent trois droites *non concourantes;* on pourra alors tirer de ces équations $x, y, z$ en fonction linéaire homogène de $\alpha, \beta, \gamma$

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= l\alpha + m\beta + n\gamma \\ y &= l'\alpha + m'\beta + n'\gamma \\ z &= l''\alpha + m''\beta + n''\gamma; \end{aligned}$$

en substituant ces valeurs dans les équations des deux coniques, on mettra ces équations sous la forme

$$\begin{aligned} S &= A_1\alpha^2 + 2B_1\alpha\beta + C_1\beta^2 + 2D_1\alpha\beta + 2E_1\beta\gamma + F_1\gamma^2 = 0 \\ S' &= A'_1\alpha^2 + 2B'_1\alpha\beta + C'_1\beta^2 + 2D'_1\alpha\gamma + 2E'_1\beta\gamma + F'_1\gamma^2 = 0 \end{aligned}$$

et l'équation $S + \lambda S' = 0$ deviendra

$$(A_1 + \lambda A'_1)\alpha^2 + 2(B_1 + \lambda B'_1)\alpha\beta + \ldots = 0.$$

Pour que la conique $S + \lambda S' = 0$ se décompose en deux droites, il faut et il suffit que ce nouveau polynôme homogène en $\alpha, \beta, \gamma$ se décompose en deux facteurs du premier degré, c'est-à-dire que son discriminant

$$(A_1 + \lambda A'_1)(C_1 + \lambda C'_1)(F_1 + \lambda F'_1) + \ldots.$$

soit nul. L'on a ainsi, pour déterminer $\lambda$ une nouvelle équation du troisième degré

$$(4) \qquad \Delta_1 + \Theta_1\lambda + \Theta'_1\lambda^2 + \Delta'_1\lambda^3 = 0.$$

*Cette équation admet encore les mêmes racines que l'équation* (1). Cela résulte évidemment de ce que l'une et l'autre des équations (1) et (4) donnent les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation $S + \lambda S' = 0$ représente deux droites. Si la première équation a trois racines distinctes, la seconde aura les mêmes racines. Donc

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Theta_1}{\Theta} = \frac{\Theta'_1}{\Theta'} = \frac{\Delta'_1}{\Delta'};$$

ces relations seront des identités si l'on y remplace les coefficients $A_1, A'_1, B_1, B'_1 \ldots$ par leurs expressions en fonction de $A, A', B, B', \ldots$ etc.; elles subsistent donc encore lorsque l'équation (1) a des racines multiples. Donc, dans tous les cas, les équations (1) et (4) ont *les mêmes racines.*

Voyons enfin comment varient les racines de l'équation en $\lambda$ quand on multiplie tous les coefficients de l'équation $S = 0$ par un facteur constant K et tous ceux de $S' = 0$ par un facteur constant K'. Alors les équations des deux coniques deviennent

$$KS = 0, \quad K'S' = 0$$

et l'équation générale des coniques passant par leurs points d'intersection devient

$$KS + \lambda' K'S' = 0,$$

équation qui est identique à $S + \lambda S' = 0$ si l'on pose $\lambda' = \frac{K}{K'}\lambda$.

Donc, pour avoir les valeurs de $\lambda'$ pour lesquelles l'équation $KS + \lambda' K'S' = 0$ représente deux droites, il suffira de prendre les trois racines de l'équation (1) en $\lambda$ et de les multiplier par le facteur $\frac{K}{K'}$.

En résumé, si l'on transforme les équations des deux coniques en y remplaçant $x, y, z$ par des expression telles que (3) (c'est-à-dire en les rapportant à un triangle de référence quelconque), et si l'on multiplie les équations des deux coniques par des facteurs constants, *les racines de l'équation en $\lambda$ restent les mêmes, ou sont multipliées par un même facteur.*

On en conclut que :

*Une relation homogène entre les racines de l'équation en $\lambda$ exprime une propriété des deux coniques indépendante du choix des axes coordonnés ou, plus généralement, du choix des fonctions linéaires $\alpha, \beta, \gamma$, c'est-à-dire du triangle de référence.* Car, si une pareille relation a lieu quand les axes ou les fonctions $\alpha, \beta, \gamma$ ont été choisis d'une certaine façon, elle subsistera pour tout autre système d'axes ou de fonctions linéaires $\alpha, \beta, \gamma$.

Par exemple, si l'on appelle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les trois racines de

l'équation en $\lambda$, la relation $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ ou, plus symétriquement,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 (\lambda_3 - \lambda_1)^2 = 0,$$

qui est *homogène* et du second degré en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ exprime que l'équation en $\lambda$ a une racine double; c'est-à-dire que *les deux coniques sont tangentes.*

Nous allons chercher la signification de quelques autres relations simples.

I. *La relation* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ *ou* $\Theta' = 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle inscrit dans la conique* S *et conjugué par rapport à* S'. *Lorsqu'il existe un de ces triangles, il en existe une infinité.*

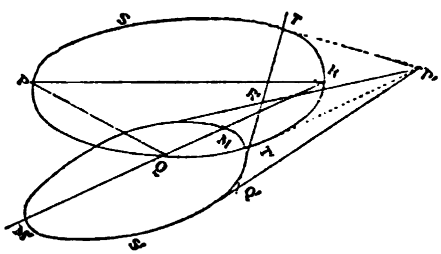


Fig. 2.

Pour le démontrer, supposons qu'il existe un triangle inscrit dans S et conjugué à S'. Alors en appelant

$$\alpha = 0 \;, \; \beta = 0 \;, \; \gamma = 0$$

les équations des côtés de ce triangle, l'équation de la conique S sera

$$S = 2B\alpha\beta + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma = 0,$$

et celle de S'

$$S' = A'\alpha^2 + C'\beta^2 + F'\gamma^2.$$

On voit immédiatement en égalant à zéro le discriminant du polynôme $S + \lambda S'$ que l'on a une équation en $\lambda$

$$2BDE - \lambda(A'E^2 + C'D^2 + F'B^2) + \lambda^3 A'C'F' = 0$$

dans laquelle le coefficient $\Theta'$ de $\lambda^2$ est nul. Donc la condition

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ est nécessaire. Inversement, si cette condition est remplie pour deux coniques S et S′ dont la seconde S′ n'est pas décomposée en droites, il existe une infinité de triangles inscrits dans S et conjugués à S′. En effet, prenons un point P sur la conique S et la polaire de ce point par rapport à S′ (fig. a) : cette polaire coupe la conique S′ en deux points M et M′ et la conique S au moins en un point Q ; soit R le conjugué harmonique du point Q par rapport aux deux points M et M′, nous allons montrer que ce point R appartient aussi à la conique S.

Le triangle PQR étant conjugué par rapport à la conique S′, l'équation de cette conique sera

$$S' = A'\alpha^2 + C'\beta^2 + F'\gamma^2 = 0$$

en appelant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des côtés QR, RP, PQ du triangle. Quant à la conique S, elle passe par le point P insersection des côtés $\beta = 0$, $\gamma = 0$, et le point Q intersection des côtés $\gamma = 0$, $\alpha = 0$; son équation sera donc de la forme

$$S = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma = 0.$$

En formant le discriminant du polynôme $S + \lambda S'$ on trouve pour coefficient de $\lambda^2$

$$\Theta' = AC'F'.$$

Comme ce coefficient doit être *nul* et que ni C′ ni F′ ne peuvent être nuls, car la conique S′ se réduirait à deux droites, on a $A = 0$, et la conique S est circonscrite au triangle PQR conjugué à S′; c'est ce que nous voulions établir.

II. *La même relation* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ *ou* $\Theta' = 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle circonscrit à la conique* S′ *et conjugué par rapport à* S. *Lorsqu'il existe un de ces triangles, il en existe une infinité.*

En effet, s'il existe un de ces triangles et si l'on appelle $\alpha, \beta, \gamma$ les premiers membres des équations des côtés de ce triangle, l'équation de S sera

$$S = A\alpha^2 + C\beta^2 + F\gamma^2$$

et celle de S′ (n° 282 *bis*)

$$S' = p^2\alpha^2 + q^2\beta^2 + r^2\gamma^2 - 2qr\beta\gamma - 2rp\gamma\alpha - 2pq\alpha\beta = 0.$$

En formant le coefficient $\Theta'$ de $\lambda^2$ dans le discriminant de $S + \lambda S'$ on verra immédiatement que ce coefficient est nul; la condition $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ est donc nécessaire. Inversement, supposons cette condition remplie; prenons une tangente quelconque TT', $\alpha = 0$, à la conique S' et son pôle P' par rapport à S; de ce pôle on peut mener deux tangentes P'T et P'T' à la conique S et une tangente au moins P'Q' à la conique S'. Appelons $\gamma = 0$ l'équation de cette dernière droite P'Q' et $\beta = 0$ l'équation de sa conjuguée P'R' par rapport au système des deux tangentes PT et P'T'. Alors le triangle formé par les trois droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ sera conjugué à S et deux de ses côtés $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ seront tangents à S'; nous allons montrer que le troisième côté $\beta = 0$ est aussi tangent à S'. Les équations des deux coniques pourront s'écrire :

$$S = A\alpha^2 + C\beta^2 + F\gamma^2 = 0$$
$$S' = p^2\alpha^2 + q^2\beta^2 + r^2\gamma^2 - 2qr\beta\gamma + 2D'\alpha\gamma - 2pq\alpha\beta = 0\,;$$

car le premier membre de l'équation de S' doit se réduire à un carré parfait pour $\alpha = 0$ et pour $\gamma = 0$. Le coefficient $\Theta'$ de $\lambda^2$ dans le discriminant de $S + \lambda S'$ est $C(p^2r^2 - D'^2)$, et ce coefficient doit être *nul*. On ne peut pas avoir $C = 0$ car si C était nul, la conique S serait réduite à deux droites; on ne peut pas avoir $D' = pr$, car pour cette valeur de D' on aurait

$$S' = (p\alpha - q\beta + r\gamma)^2$$

et la conique S' serait une droite double. Donc on a $D' = -pr$, et la conique S' est inscrite dans le triangle P'Q'R' conjugué à S.

Remarque. Lorsque la conique S est circonscrite à un triangle conjugué à S', on dit, pour abréger, que S *est harmoniquement circonscrite à* S'; alors, d'après ce qui précède, la conique S' est aussi inscrite dans un triangle conjugué à S et l'on dit que S' *est harmoniquement inscrite dans* S.

Exemple. Étant donné un triangle, il existe toujours un cercle réel ou imaginaire par rapport auquel le triangle est conjugué. En effet, en appelant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, les équations des côtés du triangle, l'équation générale des coniques conjuguées au triangle est

$$A\alpha^2 + C\beta^2 + F\gamma^2 = 0.$$

En exprimant que cette équation représente un cercle, on aura deux équations du premier degré déterminant les rapports des coefficients A, C, F, à l'un d'entre eux. Le cercle ainsi obtenu s'appelle cercle conjugué au triangle; il a pour centre le point de concours des hauteurs du triangle, car, si d'un point on abaisse une perpendiculaire sur sa polaire par rapport à un cercle, cette perpendiculaire passe par le centre du cercle.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

*Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la puissance du centre de la conique par rapport au cercle conjugué au triangle est égale à la somme algébrique des carrés des axes de la conique.*

En effet rapportons la conique à ses axes et soit

$$S' = A'x^2 + C'y^2 - A'C' = 0$$

l'équation de la conique, A' et C' désignant les carrés des longueurs des axes. Soit, d'autre part,

$$S = x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation du cercle conjugué au triangle. Alors la conique S' sera inscrite dans un triangle conjugué à S : donc si l'on forme le discriminant du polynôme $S + \lambda S'$, le coefficient $\Theta'$ de $\lambda^2$ doit être nul. Or ce coefficient est $A'\,C'\,(F - A' - C')$; comme A' et C' sont différents de zéro, on a

$$F = A' + C',$$

ce qui démontre le théorème.

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle inscrit dans une conique* S *et circonscrit à une conique* S' *est*

$$\Theta'^2 - 4\Theta\Delta' = 0$$

*ou* $$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_1 = 0$$

*ou* $$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} = 0;$$

*s'il existe un tel triangle, il en existe une infinité.*

Appelons $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ les équations des côtés d'un triangle inscrit dans S et circonscrit à S'. Les équations des deux coniques pourront s'écrire

$$S = 2B\alpha\beta + 2D\alpha\gamma + 2E\beta\gamma = 0,$$

$$S' = p^2\alpha^2 + q^2\beta^2 + r^2\gamma^2 - 2qr\beta\gamma - 2rp\gamma\alpha - 2pq\alpha\beta = 0.$$

Si l'on forme le discriminant de $S + \lambda S'$, on voit que les coefficients de $\lambda^3$, $\lambda^2$, $\lambda$ sont

$$\Delta' = -4p^2q^2r^2,$$
$$\Theta' = 4pqr(Ep + Dq + Br),$$
$$\Theta = -(Ep + Dq + Br)^2.$$

L'on a donc $\Theta'^2 - 4\Theta\Delta' = 0$, relation que l'on peut écrire d'après les relations entre les coefficients et les racines

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) = 0$$

ou (5) $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_3\lambda_1 = 0.$

Cette dernière relation étant homogène par rapport aux racines de l'équation en $\lambda$ aura lieu, comme nous l'avons vu, quelle que soit la façon dont on écrit les équations des deux coniques. On vérifiera facilement que cette relation est équivalente à l'une des suivantes

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} = 0.$$

Réciproquement, si cette relation (5) a lieu, il existe une infinité de triangles inscrits dans S et circonscrits à S'. On le démontrera en suivant une marche entièrement semblable à celle que nous avons employée pour les propositions I et II.

Exemple I. Considérons deux ellipses de même centre et de mêmes axes ayant pour équations

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad S' = -\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} + 1 = 0.$$

Les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles l'équation $S + \lambda S' = 0$ représente deux droites sont

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{a'^2}{a^2} \quad , \quad \lambda_3 = \frac{b'^2}{b^2} \quad ;$$

donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle inscrit dans S et circonscrit à S' est

$$1 \pm \frac{a'}{a} \pm \frac{b'}{b} = 0.$$

Exemple II. Soient encore les deux cercles ayant pour équations

$$S = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad , \quad S' = (x - d)^2 + y^2 - r^2 = 0 \quad ;$$

les coefficients de l'équation en $\lambda$ sont

$$\Delta' = r^2 \quad , \quad \Theta' = R^2 + 2r^2 - d^2 \quad , \quad \Theta = 2R^2 + r^2 - d^2 ;$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle inscrit dans S et circonscrit à S' est donc

$$(2r^2 + R^2 - d^2)^2 - 4r^2(2R^2 + r^2 - d^2) = 0$$

ou en réduisant

$$(d^2 - R^2)^2 - 4r^2R^2 = 0$$
$$d^2 - R^2 = \pm 2rR,$$

relation élémentaire bien connue entre les rayons et la distance des centres de deux cercles l'un circonscrit, l'autre inscrit ou ex-inscrit à un triangle.

## EXERCICES

1. Démontrer que le cercle conjugué à un triangle est réel quand le triangle a un angle obtus, imaginaire dans le cas contraire.

2. Le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle donné et telles que la somme des carrés de leurs axes est constante, est un cercle ayant pour centre le point de concours des hauteurs.

3. Lorsqu'un triangle est circonscrit à une parabole, le point de concours des hauteurs est sur la directrice.

4. Lorsqu'un triangle est inscrit dans une hyperbole équilatère, le point de concours des hauteurs est sur la courbe.

(Dans ces deux exercices, on considère le point de concours des hauteurs comme le centre du cercle conjugué au triangle).

5. Etant donnée une parabole

$$y^2 - 2px = 0$$

et un cercle

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle inscrit dans le cercle et circonscrit à la parabole? Qu'arrive t-il lorsque le cercle passe par le foyer de la parabole?

6. Les équations de deux coniques étant mises sous la forme

$$S = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = 0$$
$$S' = A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2 = 0,$$

quelles relations doit-il y avoir entre les coefficients

1° Pour que S soit harmoniquement circonscrite à S',

2° Pour que S soit circonscrite à un triangle circonscrit à S'.

7. Deux coniques S et S' sont tangentes entre elles en un point M; démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle inscrit dans S et circonscrit à S' est que le rayon de

courbure de S' au point M soit égal au quadruple de celui de S au même point.

*Cas particulier.* Si un cercle passant par le foyer d'une parabole est tangent à la parabole en un point M, le rayon de courbure de la parabole en M est quadruple de celui du cercle.

8. On considère un triangle ABC et le cercle circonscrit : il existe une conique tangente aux trois côtés du triangle et tangente au cercle circonscrit en un point donné M.

1° Trouver le centre du cercle osculateur à cette conique en M.

2° Trouver le lieu de ce centre quand le point M décrit le cercle circonscrit.

9. Quelle relation doit-il y avoir entre les racines de l'équation en $\lambda$ pour qu'il existe un quadrilatère inscrit dans la conique S et circonscrit à la conique S'?

S'il existe un de ces quadrilatères il en existe une infinité.

On appliquera en particulier la relation trouvée au cas où les coniques seraient deux cercles (Voyez n° 109).

10. Soit une ellipse E dont le grand axe et la distance focale sont respectivement égaux à $2a$ et à $2c$. D'un des foyers F de cette ellipse comme centre, on décrit une circonférence de cercle C ayant pour rayon $\sqrt{2(a^2+c^2)}$. D'un point quelconque $P_1$ de la circonférence C, on mène une tangente $P_1P_2$ à l'ellipse ; du point $P_2$ où elle rencontre de nouveau la circonférence C, on mène à l'ellipse une deuxième tangente $P_2P_3$, enfin du point $P_3$ où cette deuxième tangente rencontre la circonférence C, on mène à l'ellipse une troisième tangente $P_3P_4$ rencontrant la circonférence au point $P_4$. On demande de démontrer que la deuxième des tangentes à l'ellipse issues du point $P_4$ passe par le point initial $P_1$. (École Normale 1885).

## APPLICATION DES PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES HOMOGÈNES A LA THÉORIE DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

Soit

$$f(x,y,z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

un polynôme homogène du second degré en $x,y,z$. L'on sait que, si le discriminant $\Delta$ est différent de zéro, le polynôme $f$ est décomposable en une somme de trois carrés linéairement indépendants, si ce discriminant est nul sans que tous ses mineurs le soient, le polynôme est décomposable en une somme de deux carrés linéairement indépendants ; enfin si

tous les mineurs du discriminant sont nuls, le polynôme est un carré parfait ; les réciproques sont vraies.

1°) Supposons que le discriminant

$$\Delta = ACF - AE^2 - CD^2 - FB^2 + 2BDE$$

soit nul ainsi que tous ses mineurs **a, b, c, d, e, f**. Alors le polynôme $f$ est le carré d'une fonction linéaire

$$f(x,y,z) = a(lx + my + nz)^2$$

$a$ étant une constante positive ou négative; et en désignant la fonction $lx + my + nz$ par $\alpha$, on a identiquement $f'_x = 2al\alpha$, $f'_y = 2am\alpha$, $f'_z = 2an\alpha$. Dans ce cas, si l'on considère $x$, $y$ et $z$ comme les coordonnées homogènes d'un point, l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

représente deux droites confondues avec la droite $lx + my + nz = 0$ et les trois équations

$$f'_x = 0 \;,\; f'_y = 0 \;,\; f'_z = 0$$

représentent cette même droite ou sont des identités comme, par exemple, l'équation $f'_z = 0$ quand $n = 0$.

2°) Supposons le discriminant $\Delta$ nul sans que tous ses mineurs le soient. Alors le polynôme $f$ est décomposable en une somme de deux carrés linéairement indépendants

$$f(x, y, z) = a\alpha^2 + b\beta^2 \tag{1}$$

où $a$ et $b$ désignent des constantes et $\alpha$ et $\beta$ des fonctions linéaires homogènes de $x, y, z$

$$\alpha = lx + my + nz, \; \beta = l'x + m'y + n'z.$$

Dire que ces fonctions sont linéairement indépendantes, c'est dire qu'il n'existe pas deux facteurs constants $k$ et $k'$ non nuls tous deux et tels que $k\alpha + k'\beta$ soit nul identiquement. L'on peut mettre le polynôme $f$ sous la forme (1) d'une infinité de manières; nous allons montrer comment on peut les obtenir toutes. L'identité (1) peut s'écrire

$$f(x, y, z) = \left(\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{-b}\right)\left(\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{-b}\right)$$

ou

$$f(x, y, z) = PQ$$

P et Q désignant deux fonctions linéaires homogènes de $x, y, z$ linéairement indépendantes. Ces deux fonctions linéaires sont aisées à trouver; en effet, si les trois coefficients A, C, F ne sont pas nuls tous trois, le polynôme $f$ sera un trinôme du second degré par rapport à $x, y$, ou $z$ et on pourra décomposer ce trinôme en facteurs de premier degré qui seront P et Q; si A, C et F sont nuls, le discriminant se réduit à 2BDE et comme il est nul, un au moins des trois coefficients B, D, E est nul aussi, et alors une des trois variables $x, y$, ou $z$ se trouve en facteur; la décomposition est immédiate. Ayant ainsi mis le polynôme sous la forme PQ, on aura toutes les décompositions possibles en une somme de deux carrés, en remarquant que l'on a identiquement

$$(2)\qquad f(x, y, z) = PQ = \frac{1}{4\lambda\mu}[(\lambda P + \mu Q)^2 - (\lambda P - \mu Q)^2]$$

où $\lambda$ et $\mu$ désignent des coefficients constants différents de zéro. En faisant varier $\lambda$ et $\mu$ on a une infinité de décomposition de $f$ en deux carrés : on les a toutes, car si l'on imagine une décomposition quelconque

$$f = a_1\alpha_1^2 + b_1\beta_1^2 = (\alpha_1\sqrt{a_1} + \beta_1\sqrt{-b_1})(\alpha_1\sqrt{a_1} - \beta_1\sqrt{-b_1})$$

dans laquelle $\alpha_1, \beta_1$ sont des fonctions linéaires, $a_1$ et $b_1$ des constantes, on devra avoir identiquement

$$(\alpha_1\sqrt{a_1} + \beta_1\sqrt{-b_1})(\alpha_1\sqrt{a_1} - \beta_1\sqrt{-b_1}) = PQ,$$

d'où en désignant par $k$ une constante

$$\alpha_1\sqrt{a_1} + \beta_1\sqrt{-b_1} = kP$$

$$\alpha_1\sqrt{a_1} - \beta_1\sqrt{-b_1} = \frac{Q}{k},$$

$$\alpha_1\sqrt{a_1} = \frac{1}{2}\left(kP + \frac{Q}{k}\right), \quad \beta_1\sqrt{-b_1} = \frac{1}{2}\left(kP - \frac{Q}{k}\right)$$

et enfin

$$f = a_1\alpha_1^2 + b_1\beta_1^2 = \frac{1}{4}\left[\left(kP + \frac{Q}{k}\right)^2 - \left(kP - \frac{Q}{k}\right)^2\right];$$

expression qui rentre bien dans la formule (2) en supposant $\lambda = k, \mu = \frac{1}{k}$.

Les valeurs de $x, y, z$

$$x = x_1 \ , \ y = y_1 \ , \ z = z_1$$

qui annulent simultanément les fonctions linéaires P et Q et, par suite, les fonctions $\alpha$ et $\beta$ qui sont égales à $\lambda P + \mu Q$ et $\lambda P - \mu Q$, annulent les trois dérivées partielles $f'_x, f'_y, f'_z$.

Si l'on suppose les coefficients du polynôme $f$ réels, les facteurs P et Q peuvent être réels ou imaginaires. Pour obtenir, dans la décomposition (2), des carrés à coefficients réels, il faudra, si P et Q sont réels prendre $\lambda$ et $\mu$ réels; alors l'un des carrés qui figurent dans la formule (2) a un coefficient négatif l'autre un coefficient positif; si P et Q sont imaginaires, on pourra faire, puisque leur produit est réel,

$$P = p + iq \ , \ Q = h(p - iq)$$

$h$ désignant une constante réelle, $p$ et $q$ des fonctions linéaires réelles; on prendra alors $\lambda = h(\lambda' + i\mu')$, $\mu = \lambda' - \mu' i$ et l'on aura

$$f = \frac{h}{\lambda'^2 + \mu'^2}[(\lambda' p - \mu' q)^2 + (\lambda' q + \mu' p)^2]$$

où les deux carrés ont le même signe qui est celui de $h$.

L'interprétation géométrique de ces résultats est bien facile. En considérant $x, y, z$ comme les coordonnées homogènes d'un point, on voit que l'identité $f(x, y, z) = PQ$ montre que l'équation $f = 0$ représente deux droites distinctes, réelles ou imaginaires. Si $z_1$ est différent de zéro, les deux droites se coupent au point dont les coordonnées cartésiennes sont $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$; les droites

$$\alpha = \lambda P + \mu Q = 0 \ , \ \beta = \lambda P - \mu Q = 0$$

passent par ce point et sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites $P = 0$ et $Q = 0$. Si $z_1$ est nul sans que l'une des fonctions P et Q se réduise à la forme $nz$, les deux droites sont parallèles et ont pour coefficient angulaire commun $\frac{y_1}{x_1}$. Les droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$ sont parallèles à la même direction et sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites $P = 0$ $Q = 0$; l'on a identiquement, dans le cas actuel,

$$P = mQ + nz$$

$m$ et $n$ étant des constantes; si donc l'on fait $m\lambda = -\mu$, la droite $\alpha = 0$ devient la droite de l'infini et la conjuguée $\beta = 0$ devient la droite équidistante des droites parallèles $P = 0$, $Q = 0$

$$2m\,Q + nz = 0\,;$$

comme $f(x, y, z) = PQ = (mQ + nz)\,Q$ les deux équations

$$f'_x = Q'_x(2mQ + nz) = 0$$
$$f'_y = Q'_y(2mQ + nz) = 0$$

*représentent cette même droite*, à moins que l'une d'elles ne soit identique, ce qui arriverait par exemple, si la constante $Q'_y$ était nulle.

Enfin, si l'une des deux fonctions P ou Q, Q par exemple, était de la forme $nz$, la droite $Q = 0$ serait rejetée à l'infini, l'équation $f = 0$ représenterait une seule droite à distance finie $P = 0$,et les deux droites $\alpha = 0$ , $\beta = 0$ serait parallèles à cette droite unique et situées de part et d'autre à égale distance de cette droite.

3°) Supposons enfin le discriminant $\Delta$ différent de zéro. Dans ce cas, le polynôme $f(x, y, z)$ pourra être décomposé en trois carrés linéairement indépendants.

$$(3) \qquad f(x,y,z) = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$$

où $a,b,c$ désignent des *constantes différentes de zéro* et $\alpha,\beta,\gamma$ des fonctions linéaires.

$$\alpha = lx + my + nz,\ \beta = l'x + m'y + n'z,\ \gamma = ux + vy + wz$$

telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

*soit différent de zéro.*

Pour obtenir toutes les décompositions de $f$ en trois carrés sous la forme (3), remarquons que l'*on peut choisir arbitrairement l'une des trois fonction linéaires $\alpha,\beta,\gamma$, la fonction $\gamma$ par exemple,-à condition que les coefficients* u, v, w *de cette fonction* N'ANNULENT PAS *le polynôme.*

(4) $\varphi(u,v,w) = au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw$ .

En effet, $u,v,w$ étant choisis arbitrairement, considérons la différence

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda\gamma^2$$

où $\lambda$ est une constante : cette différence F est un polynôme homogène du second degré en $x,y,z$. Déterminons $\lambda$ de façon que le discriminant de $F(x,y,z)$ soit nul ; nous aurons l'équation

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} A - \lambda u^2 & B - \lambda uv & D - \lambda uw \\ B - \lambda uv & C - \lambda v^2 & E - \lambda vw \\ D - \lambda uw & E - \lambda vw & F - \lambda w^2 \end{vmatrix} = 0$$

dont le développement par rapport aux puissances de $\lambda$ s'obtient en faisant dans l'équation en $\lambda$ du n° 286

$$A' = -u^2 \ , \ B' = -uv \ , \ C' = -v^2 \ , \ D' = -uw \ ,$$
$$E' = -vw \ , \ F' = -w^2$$

et par suite $\Delta' = 0$ , $\Theta' = 0$ , $\Theta = -\varphi(u,v,w)$, $\varphi$ désignant le polynôme (4). L'équation (5) se réduit donc à l'équation du *premier degré*

$$\Delta - \lambda\varphi(u,v,w) = 0$$

qui détermine $\lambda$ quand $\varphi(u,v,w)$ n'est pas nul. Appelons $c$ la valeur de $\lambda$ tirée de cette équation :

$$c = \frac{\Delta}{\varphi(u,v,w)} \, .$$

Le discriminant de la fonction $F = f - c\gamma^2$ étant nul, cette fonction peut se décomposer en une somme de deux carrés ; elle n'est pas un carré parfait $a\alpha^2$, car s'il en était ainsi on aurait

$$f(x,y,z) = c\gamma^2 + a\alpha^2,$$

la fonction $f$ serait une somme de deux carrés et son discriminant $\Delta$ serait nul, ce qui est contre l'hypothèse. Le polynôme $F = f - c\gamma^2$ étant décomposable en une somme de deux carrés, on pourra lui appliquer ce qui a été dit dans le numéro précédent et trouver toutes les façons possibles de le mettre sous la forme $a\alpha^2 + b\beta^2$. A chacune de ces décompositions de

$F(x,y,z)$ en deux carrés, correspondra une décomposition de $f$ en trois carrés

$$f = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2,$$

$\gamma$ ayant été choisi arbitrairement.

Si l'on décompose F en deux facteurs

$$\text{(6)} \qquad F(x,y,z) = f - c\gamma^2 = PQ,$$

les valeurs $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ qui annulent P et Q annulent $\alpha$ et $\beta$, ainsi que les dérivées partielles $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$. Comme

$$\frac{1}{2}F'_x = \frac{1}{2}f'_x - cu\gamma\ ,\ \frac{1}{2}F'_y = \frac{1}{2}f'_y - cv\gamma\ ,\ \frac{1}{2}F'_z = \frac{1}{2}f'_z - cw\gamma\ ,$$

on a, en remplaçant $x,y,z$ par $x_1,y_1,z_1$, et désignant par $\gamma_1$ la quantité $ux_1 + vy_1 + wz_1$,

$$\text{(7)} \qquad \frac{1}{2}f'_{x_1} = cu\gamma_1\ ,\ \frac{1}{2}f'_{y_1} = cv\gamma_1\ ,\ \frac{1}{2}f'_{z_1} = cw\gamma_1\ ;$$

la constante $\gamma_1$ n'est pas nulle, car si elle l'était, $f'_{x_1}$, $f'_{y_1}$, $f'_{z_1}$ seraient nuls tous trois et le discriminant $\Delta$ serait nul. On a alors identiquement

$$\text{(8)} \qquad \frac{1}{2}(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1}) = c\gamma\gamma_1\ ,$$

et, en faisant, dans cette identité, $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, et appliquant le théorème des fonctions homogènes

$$f(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1) = c\gamma_1^2.$$

On en conclut

$$\frac{(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1})^2}{4\,f(x_1, y_1, z_1)} = c\gamma^2,$$

et, en remplaçant $c\gamma^2$ par cette expression dans l'indentité (6), on a, après avoir chassé le dénominateur $4\,f(x_1, y_1, z_1)$

$$\text{(9)}\ 4f(x,y,z)f(x_1,y_1,z_1) - (xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1})^2 = 4PQf(x_1,y_1,z_1).$$

Enfin, si dans la relation qui donne $c$

$$c\varphi(u,v,w) = \Delta,$$

on remplace, $u,v,w$ par leurs expression tirées des relations (7)

$$u = \frac{1}{2}\frac{f'_{x_1}}{c\gamma_1}, \quad v = \frac{1}{2}\frac{f'_{y_1}}{c\gamma_1}, \quad w = \frac{1}{2}\frac{f'_{z_1}}{c\gamma_1},$$

on a, puisque le polynôme $\varphi$ est homogène,

$$\frac{1}{c\gamma_1^2}\varphi\left(\frac{1}{2}f'_{x_1}, \frac{1}{2}f'_{y_1}, \frac{1}{2}f'_{z_1}\right) = \Delta$$

et, en remplaçant $c\gamma_1^2$ par sa valeur $f(x_1, y_1, z_1)$

$$(10) \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}f'_{x_1}, \frac{1}{2}f'_{y_1}, \frac{1}{2}f'_{z_1}\right) = \Delta f(x_1, y_1, z_1);$$

ce qui donne une identité remarquable.

*Interprétation géométrique.* En considérant $x$. $y$, $z$ comme les coordonnées homogènes d'un point, on voit que l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente une conique non réduite à deux droites, ellipse imaginaire ou réelle, hyperbole, parabole. L'identité

$$f(x, y, z) = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2$$

donne le premier membre de l'équation de cette conique décomposé en une somme de trois carrés. Si les trois coefficients $a, b, c$ sont de mêmes signes, la courbe est une ellipse imaginaire, sinon elle est une conique réelle : l'on sait d'ailleurs que, dans toutes les décompositions possibles de $f$ en trois carrés, le nombre des coefficients $a, b, c$ qui ont *un signe déterminé* est *invariable*. L'on peut prendre arbitrairement l'une des fonctions $\alpha, \beta, \gamma$, par exemple la fonction $\gamma = ux + vy + wz$, à condition que l'on n'ait pas $\varphi(u, v, w) = 0$, c'est-à-dire à condition que la droite $\gamma = 0$ ne soit pas tangente à la conique (n° 126). Supposons cette condition remplie ; on pourra écrire l'équation de la conique sous la forme

$$f(x, y, z) = c\gamma^2 + PQ = 0,$$

qui montre que $P = 0$ $Q = 0$ sont les équations des tangentes aux points où la droite $\gamma = 0$ coupe la conique. Nous avons appelé $x_1, y_1, z_1$, les valeurs de $x, y, z$ qui annulent P et Q, c'est-à-dire les coordonnées homogènes du point de concours des deux droites $P = 0$, $Q = 0$ ; la droite $\gamma = 0$ est la corde des contacts des tangentes issues de ce point ou la polaire de ce

point; d'après l'identité (8), l'équation de cette droite peut s'écrire ainsi

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + f'_{z_1} = 0 ;$$

ce qui est bien l'équation de la polaire du point de coordonnées $x_1, y_1, z_1$. D'après l'identité (9), l'équation $PQ = 0$, qui représente l'ensemble des tangentes menées du point de coordonnées $x_1, y_1, z_1$ à la conique, peut s'écrire

$$4 f(x, y, z) f(x_1, y_1, z_1) - (xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1})^2 = 0 .$$

Enfin l'identité (10) montre que la condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(f'_{x_1}, f'_{y_1}, f'_{z_1})$ soit nul est que $f(x_1, y_1, z_1)$ le soit et réciproquement; ce qui veut dire géométriquement que la condition nécessaire et suffisante pour que la polaire du point $x_1, y_1, z_1$ soit tangente à la courbe est que ce point soit sur la courbe.

Les droites $\alpha = 0, \beta = 0$ passent par le point de concours des tangentes $P = 0, Q = 0$ et sont conjuguées harmoniques par rapport à ces tangentes. Si $z_1$ est différent de zéro, les deux droites $P = 0$ $Q = 0$ concourent en un point situé à distance finie, ayant pour coordonnées cartésiennes $\frac{x_1}{z_1}$ , $\frac{y_1}{z_1}$. Si $z_1 = 0$, ces deux droites sont parallèles à la direction de coefficient angulaire $\frac{y_1}{x_1}$, ou l'une d'elles est à l'infini, ce qui arrive quand l'une des fonctions P ou Q se réduit à la forme $nz$; dans ce cas ($z_1 = 0$), la droite $\gamma = 0$ a pour équation

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y = 0 ,$$

elle coïncide avec le diamètre conjugué de la direction des deux droites $P = 0$ $Q = 0$, ou de celle des deux qui est à distance finie; on peut dire que $\gamma = 0$ est la polaire du point à l'infini $(x_1, y_1, 0)$.

Ainsi, quand l'équation est mise sous la forme

$$f(x, y, z) = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma f^2 = 0$$

la droite $\gamma = 0$ est la polaire du point de concours des deux autres droites $\alpha = 0$ , $\beta = 0$; comme la même chose a lieu pour les droites $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, on voit que le triangle formé

par les trois droites $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ est *un triangle conjugué par rapport à la conique.*

*Application à la réduction de l'équation du second degré.*

1. Supposons d'abord $\mathbf{f}$ différent de zéro; alors on peut prendre $\gamma=z$, c'est-à-dire $u=0$, $v=0$, $w=1$; et l'on trouve :

$$c=\frac{\Delta}{\varphi(0,0,1)}=\frac{\Delta}{\mathbf{f}}.$$

L'identité (6) donne, dans ce cas,

$$f(x,y,z)-\frac{\Delta}{\mathbf{f}}z^2=\mathrm{PQ}=a\alpha^2+b\beta^2.$$

Les coordonnées du point de concours des droites $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$ vérifient les équations

$$f'_{x_1}=0 \quad , \quad f'_{y_1}=0$$

ainsi qu'il résulte des relations (7) dans lesquelles on suppose $u=v=0$; ce point est le centre de la courbe. Les droites $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$ sont les asymptotes : leur équation homogène est donc

$$f(x,y,z)-\frac{\Delta}{\mathbf{f}}z^2=0$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$f(\mathrm{X},\mathrm{Y},1)-\frac{\Delta}{\mathbf{f}}=0.$$

Ces asymptotes $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$ peuvent être réelles ou imaginaires. Dans le premier cas la courbe est une hyperbole, les coefficients $a$ et $b$ sont de signes contraires; dans le second cas, elle est une ellipse, les coefficients $a$ et $b$ sont de mêmes signes. Les droites $\alpha=0$, $\beta=0$ dont les équations sont de la forme

$$\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q}=0 \quad , \quad \lambda\mathrm{P}-\mu\mathrm{Q}=0$$

sont conjuguées harmoniques par rapport aux asymptotes; ce sont deux diamètres conjugués; si l'on détermine le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ de façon que ces droites soient rectangulaires, elles coïncideront avec les axes. En prenant les droites $\alpha=0$, $\beta=0$ pour

axes de coordonnées cartésiennes, l'équation de la conique prendra la forme réduite

$$a'X'^2 + b'Y'^2 + \frac{\Delta}{\mathbf{f}} = 0$$

2. Supposons $\mathbf{f} = 0$. Alors le mode précédent de réduction n'est plus applicable car $\varphi(0, 0, 1) = 0$. Voici un second mode de réduction qui s'applique à tous les cas. On a vu qu'en appelant $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées homogènes d'un point quelconque non situé sur la conique, on a l'identité

$$4 f(x, y, z) f(x_1, y_1, z_1) = (xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1})^2 + PQ,$$

où $P = 0$, $Q = 0$ sont les équations des tangentes menées du point $(x_1, y_1, z_1)$ à la courbe. Prenons en particulier $z_1 = 0$ avec $f(x_1, y_1, 0) \gtrless 0$, et remarquons que

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z,$$

nous aurons

$$4f(x, y, z) f(x_1, y_1, 0) = (x_1 f'_x + y_1 f'_y)^2 + PQ;$$

les droites $P = 0$ $Q = 0$ se coupant au point à l'infini $(x_1, y_1, 0)$ sont parallèles entre elles, ou l'une d'elles est à l'infini. L'on aura, par exemple,

$$Q = mP + nz,$$

où $m$ est nul si $Q$ est à l'infini. Alors l'équation $f = 0$ s'écrit

$$(x_1 f'_x + y_1 f'_y)^2 + mP^2 + nPz = 0.$$

En y faisant $z = 1$, on aura l'équation de la courbe en coordonnées cartésiennes; puis, en prenant pour nouvel axe O'X' la droite $x_1 f'_x + y_1 f'_y = 0$ et pour axe O'Y' la droite $P = 0$, on mettra l'équation sous la forme réduite

$$Y'^2 + 2pX' + qX'^2 = 0;$$

dans le cas particulier où la droite $Q = 0$ est à l'infini, on a $m = 0$, donc $q = 0$, et l'on a la forme réduite spéciale

$$Y'^2 + 2pX' = 0$$

qui convient aux paraboles.

L'on pourra, en particulier, déterminer le rapport $\frac{y_1}{x_1}$ de façon que la droite

$$x_1 f'_x + y_1 f'_y = 0$$

soit perpendiculaire sur $P = 0$; la première droite sera alors un axe de la conique et la seconde la tangente au sommet.

# LIVRE IV

## THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES.

## CHAPITRE PREMIER

### Construction des courbes en coordonnées rectilignes.

**334.** La construction d'une courbe n'est autre chose que la représentation graphique de la marche d'une fonction réelle d'une seule variable, lorsqu'on fait varier d'une manière continue cette variable. Si l'on a calculé les valeurs de $y$ qui répondent à diverses valeurs de $x$, on connaît un certain nombre de points de la courbe à construire. Mais ces points ne peuvent suffire, même pour un tracé grossier de la courbe, car on peut les réunir de bien des manières différentes; et, d'ailleurs, il peut arriver qu'entre deux ordonnées, même très-rapprochées, la courbe ait des branches infinies. Il est donc indispensable de connaître préalablement, d'une manière générale, la marche de la fonction dont la courbe doit représenter les variations.

Lorsque l'équation est résolue par rapport à l'une des variables, $y$ par exemple, on considère chacune des déterminations de $y$ en particulier, et on examine entre quelles limites doit varier $x$ pour que $y$ reste réelle. Soient $x_0$ et $x_1$ deux limites; si la valeur de $y$ reste finie dans cet intervalle, elle donne une branche finie de courbe; si la valeur de $y$ devient infinie pour une ou plusieurs valeurs intermédiaires $a, b,\ldots$ de la variable, on a diverses branches infinies, asymptotes aux droites qui correspondent aux valeurs de $x$ qui rendent $y$ infinie; on subdivise alors l'intervalle de $x_0$ à $x_1$ en plusieurs autres : un premier de $x_0$ à $a$, etc., de manière que dans chacun d'eux l'ordonnée ne devienne pas infinie. On examinera ensuite comment varie $y$ dans chacun des intervalles, par exemple quand $x$ croît de $x_0$ à $a$. Quelquefois on aperçoit immédiatement, d'après l'expres-

sion de $y$, comment varie cette quantité ; mais le plus souvent il n'en est pas ainsi ; dans ce cas, on a recours à la dérivée. On sait, en effet, que la variable $x$ croissant à partir d'une certaine valeur, si la fonction reste finie, elle varie dans le même sens, tant que la dérivée conserve le même signe ; elle croît si la dérivée est positive ; elle décroît si la dérivée est négative. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les valeurs successives de $x$ comprises entre $x_0$ et $a$, pour lesquelles la dérivée change de signe. La variable $x$ croissant de $x_0$ à $\alpha$, la dérivée conserve le même signe, par exemple le signe $+$, et la fonction croît ; de $\alpha$ à $\beta$, la dérivée est négative et la fonction décroît, etc. Nous avons démontré que le coefficient angulaire de la tangente en un point quelconque de la courbe est égal à la valeur de la dérivée en ce point. Ainsi, le sens dans lequel varie l'ordonnée de la courbe est indiqué par le coefficient angulaire de la tangente.

Lorsque la dérivée change de signe, de positive devenant négative, l'ordonnée cesse de croître pour décroître ensuite ; elle acquiert donc une valeur *maximum*. Si, au contraire, la dérivée de négative devient positive, l'ordonnée cesse de décroître pour croître ensuite ; elle acquiert donc une valeur *minimum*. Il faut remarquer que ces mots *maximum* et *minimum* ne doivent pas être pris avec leur sens absolu ; ils indiquent seulement la comparaison d'une valeur particulière de l'ordonnée avec les ordonnées voisines.

En général, la dérivée, restant finie et continue, change de signe en devenant nulle, et, par conséquent, les tangentes aux points dont les ordonnées ont des valeurs *maxima* et *minima* sont parallèles à l'axe OX. Toute valeur de $x$ qui annule la dérivée ne donne pas nécessairement un maximum ou un minimum de l'ordonnée ; on devra examiner si la dérivée change effectivement de signe : mais, dans tous les cas, la tangente est parallèle à l'axe OX.

335. Exemple I. La strophoïde définie au n° 23 a pour équation

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Quand $x$ varie de o à $-a$, la valeur numérique de $y$ augmente constamment de o à l'infini ; on obtient de la sorte les deux branches

infinies ON, ON' asymptotes à la droite HH' (fig. 18). Quand $x$ varie de o à $a$, l'ordonnée $y$ part de o pour revenir à o, en conservant des valeurs finies; elle commence donc par croître pour décroître ensuite, et, par conséquent, elle passe par un maximum; mais on ne voit pas si dans l'intervalle la fonction n'éprouve pas plusieurs alternatives de croissance et de décroissance. La valeur positive de $y$ a pour dérivée

$$y' = \frac{-x^2 - ax + a^2}{\sqrt{(a+x)(a-x)}}.$$

Le numérateur s'annule pour deux valeurs de $x$, l'une $x_1$, positive et moindre que $a$, l'autre négative. Quand $x$ varie de o à $x_1$, la dérivée est positive, la fonction croît; de $x_1$ à $a$ la dérivée est négative, la fonction décroît; l'ordonnée est maximum pour la valeur

$$x_1 = a\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

égale au plus grand segment de la ligne $a$ divisée en moyenne et extrême raison.

**336.** On détermine souvent la tangente en certains points de la courbe, ou, ce qui est la même chose, certaines valeurs particulières de la dérivée, sans avoir recours à l'expression générale de cette dérivée. Considérons, par exemple, le point O de la strophoïde; joignons ce point à un point voisin M ayant pour coordonnées $x$ et $y$; le coefficient angulaire de la sécante OM est égal au rapport $\frac{y}{x}$; on aura le coefficient angulaire de la tangente au point O, en cherchant la limite de ce rapport lorsqu'on fait tendre $x$ vers zéro. Or, on a

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{a-x}{a+x}};$$

quand $x$ tend vers zéro, ce rapport a pour limite $\pm 1$. Les deux branches qui passent au point O ont pour tangentes en ce point les bissectrices des angles des axes. On obtiendrait la tangente au point A en considérant le rapport $\frac{y}{a-x}$; ce rapport augmentant indéfiniment lorsque $x$ tend vers $a$, la tangente au point A est parallèle à l'axe OY.

**337.** Exemple II. Proposons-nous d'étudier les courbes représentées par l'équation $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (on démontre que ces

courbes peuvent reproduire par la perspective toutes les courbes du troisième degré). On supposera le coefficient A positif, sans quoi on changerait le sens de l'axe des $x$. Il y a plusieurs cas à considérer : 1° le polynôme du troisième degré a ses trois racines réelles et inégales ; appelons $a$, $b$, $c$ ces racines rangées par ordre de grandeur croissante ; on a

$$y^2 = A(x-a)(x-b)(x-c).$$

L'ordonnée est imaginaire quand $x$ varie de $-\infty$ à $a$ ; réelle quand $x$ varie de $a$ à $b$ ; imaginaire quand $x$ varie de $b$ à $c$ ; réelle quand $x$ varie de $c$ à $+\infty$. La courbe se compose d'une boucle fermée et d'une branche infinie (fig. 206). 2° Lorsque les deux racines $a$ et $b$ deviennent égales, la boucle se réduit à un point $a$ (fig. 207). 3° Lorsque

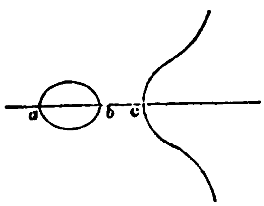



Fig. 206.

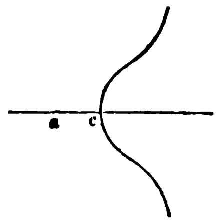



Fig. 207.

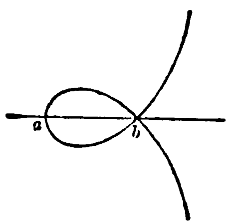



Fig. 208.

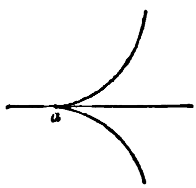



Fig. 209.

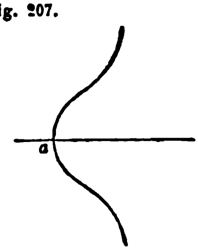



Fig. 210.

les deux racines $b$ et $c$ sont égales, la boucle se joint à la branche infinie en $b$ (fig. 208). 4° Lorsque les trois racines $a$, $b$, $c$ sont égales, la courbe présente un point de rebroussement en $a$ (fig. 209). 5° Enfin, si le polynôme du troisième degré n'a qu'une racine réelle $a$, la courbe a la forme indiquée dans la figure 210.

Le coefficient angulaire de la tangente est donné par la formule

$$y' = \frac{3Ax^2 + 2Bx + C}{2\sqrt{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}} = \frac{3Ax^2 + 2Bx + C}{2y}.$$

Dans le premier cas, le numérateur, qui est la dérivée du polynôme du troisième degré, s'annule pour une valeur $a'$ comprise entre $a$ et $b$, et pour une valeur $b'$ comprise entre $b$ et $c$ ; à la première correspond le maximum de l'ordonnée sur la boucle. Dans le troisième cas, le numérateur s'annule pour la racine double $b$ ; le dénominateur

s'annulant aussi, la formule se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ et ne détermine plus les tangentes au point double $b$; on les obtiendra en cherchant la limite $\sqrt{A(b-a)}$ du rapport $\frac{y}{x-b}$, quand $x$ tend vers $b$.

338. Lorsque l'équation, supposée algébrique, n'est pas résolue, soit parce que cette résolution n'est pas possible, soit parce que l'on juge inutile de l'effectuer, on peut quelquefois, en s'appuyant sur les théorèmes concernant les racines des équations, construire la courbe.

On aperçoit immédiatement certaines propriétés de la courbe à l'inspection de l'équation. 1° Lorsque l'équation ne renferme que des termes qui sont tous de degrés pairs, ou tous de degrés impairs, il est clair que, si elle est vérifiée par $x=\alpha$, $y=\beta$, elle sera aussi vérifiée par $x=-\alpha$, $y=-\beta$; or, les deux points $(\alpha, \beta)$, $(-\alpha, -\beta)$ sont placés symétriquement par rapport à l'origine; donc ce point est centre de la courbe. 2° Si l'équation ne contient que des puissances paires de l'une des variables, $y$ par exemple, les valeurs réelles de $y$, qui correspondent à une même valeur de $x$, sont deux à deux égales et de signes contraires; lorsque les axes sont rectangulaires, on en conclut que les points du lieu sont placés symétriquement par rapport à la droite OX, qui est un axe de la courbe. 3° Lorsque l'équation de la courbe ne change pas par le changement de $x$ en $y$ et de $y$ en $x$, si l'équation est vérifiée par $x=\alpha$, $y=\beta$, elle sera vérifiée également par $x=\beta$, $y=\alpha$; les deux points correspondants sont placés symétriquement par rapport à la bissectrice de l'angle YOX, qui est un axe de la courbe. On voit de même que, si l'équation ne change pas par le changement de $x$ en $-y$ et de $y$ en $-x$, la bissectrice de l'angle YOX' est un axe.

Soit $f(x, y)=0$ l'équation de la courbe; on sait que la dérivée $y'$ est donnée par la formule $y'=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$. L'expression de $y'$ contient à la fois les deux variables $x$ et $y$; elle donne le coefficient angulaire de la tangente en tout point dont on connaît les deux coordonnées, excepté aux points où les deux dérivées partielles s'annulent à la fois.

**339. Exemple III.** *Construire le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes* F, F′, *soit égal à un nombre donné.*

Prenons pour origine le milieu O de la droite FF′, cette droite pour axe des $x$, une perpendiculaire pour axe des $y$; appelons $2c$ la distance FF′, $a^2$ le produit constant, l'équation du lieu est

$$(1) \qquad y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0.$$

Cette équation ne renfermant que des puissances paires de chacune des variables, chacun des axes est un axe de symétrie de la courbe, et l'origine est un centre. En considérant $y^2$ comme l'inconnue. l'équation (1) est du second degré, le binôme $B^2 - 4AC$ se réduit ici à $4(4c^2x^2 + a^4)$, quantité essentiellement positive : les racines sont donc toujours réelles. Lorsque le dernier terme $(x^2 - c^2)^2 - a^4$ est positif, les valeurs de $y^2$ ont le même signe, et comme leur somme $-2(x^2 + c^2)$ est négative, les deux valeurs de $y^2$ sont négatives et les quatre valeurs de $y$ imaginaires. Pour que l'équation (1) ait des racines réelles, il faut donc que l'on ait

$$(x^2 - c^2)^2 - a^4 < 0, \quad \text{ou} \quad (x^2 - c^2 - a^2)(x^2 - c^2 + a^2) < 0,$$

et, par conséquent,

$$x^2 < a^2 + c^2 \quad \text{et} \quad x^2 > c^2 - a^2.$$

Alors une des valeurs de $y^2$ est positive, l'autre négative.

Prenons $OA = OA' = \sqrt{a^2 + c^2}$; la courbe est comprise entre les parallèles à l'axe des $y$ menées par les points A et A′. La seconde condition exige que l'on distingue plusieurs cas.

1° $a < c$. Prenons $OB = OB' = \sqrt{c^2 - a^2}$, et par les points B et B menons des parallèles à OY (fig. 211) : la courbe se compose de deux parties, comprises, l'une entre les parallèles menées par les points B et A, l'autre entre les parallèles menées par les points B′ et A′. Quand on donne à $x$ l'une des valeurs OB ou OA, l'une des valeurs de $y^2$ est nulle, l'autre négative; $x$ croissant de OB à OA,

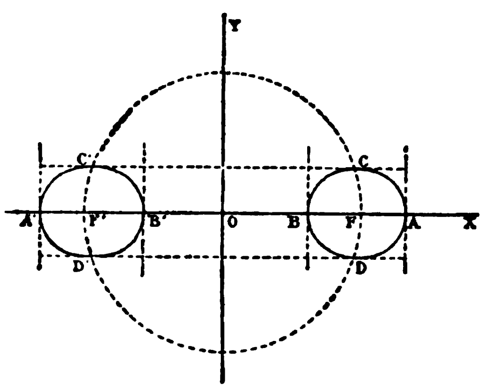



Fig. 211.

la valeur de $y^2$, qui d'abord est nulle, devient positive et s'annule de

nouveau; on obtient ainsi une courbe fermée BCAD. Les valeurs négatives de $x$ donnent une seconde courbe B'C'A'D, égale à la précédente.

Le coefficient angulaire de la tangente est déterminé par la formule

$$(2) \qquad y' = -\frac{x(x^2+y^2-c^2)}{y(x^2+y^2+c^2)}.$$

Aux points A et B, $y$ est nulle et $y'$ infinie, la tangente est parallèle à l'axe OY. Le numérateur de $y'$ devient nul, quand on a $x^2+y^2=c^2$. Du point O comme centre, avec OF pour rayon, décrivons un cercle. Ce cercle coupe la courbe en quatre points C, D, C', D', donnés par les formules

$$x^2 = \frac{4c^4-a^4}{4c^2} \qquad y^2 = \frac{a^4}{4c^2}.$$

Comme l'arc BC est intérieur au cercle, en l'un des points quelconques de cet arc, la fonction $x^2+y^2-c^2$ a une valeur négative et $y'$ est positive. Pour les points de l'arc CA, le facteur $x^2+y^2-c^2$ est positif et $y'$ négative. Ainsi, de B en C, l'ordonnée croît, et de C en A elle décroît; l'ordonnée du point C est maximum.

2° $a=c$. La seconde condition est satisfaite, quelle que soit $x$; $x$ peut varier de $-c\sqrt{2}$ à $c\sqrt{2}$. Quand $x$ varie de 0 à $c\sqrt{2}$, la valeur positive de $y^2$ part de zéro et redevient nulle: on a une courbe fermée OCADO (fig. 212) qui passe à l'origine : les valeurs négatives de $x$ donnent une courbe symétrique de la précédente par rapport à OY. Le cercle de rayon OF coupe la courbe en quatre points, dont les ordonnées ont une valeur numérique $\frac{c}{2}$ maximum; l'abscisse de ces points a pour valeur absolue $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Cette courbe se nomme *lemniscate*.

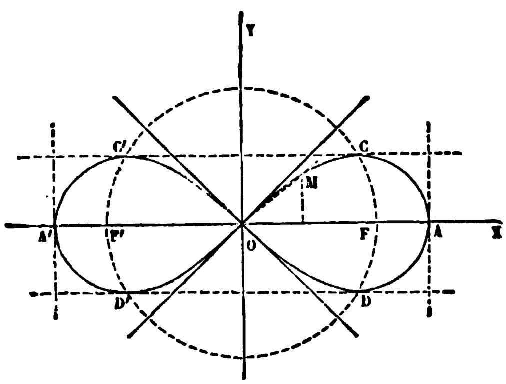


Fig. 212.

A l'origine, la valeur de $y'$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; il est fa-

cile de concevoir qu'il en est ainsi aux points multiples d'une courbe algébrique quelconque. En effet, la valeur de $y'$ est donnée par la formule

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Or, $f(x, y)$ étant un polynôme entier par rapport aux variables $x$ et $y$, les dérivées partielles $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ sont aussi des polynômes entiers par rapport aux mêmes variables. Si ces polynômes ne devenaient pas nuls, lorsqu'on y remplace $x$ et $y$ par les coordonnées du point multiple, $y'$ aurait en ce point une valeur unique, tandis qu'elle doit avoir autant de valeurs différentes qu'il y a de branches qui passent au point multiple. Dans le cas actuel, l'équation étant bicarrée peut être résolue par rapport à $y$ ; à chaque valeur de $y$ correspond une dérivée qui a une valeur déterminée, quand on y remplace $x$ par zéro. Cette valeur de la dérivée est, ainsi que nous l'avons remarqué au n° 336, la limite du rapport $\frac{y}{x}$, lorsque $x$ tend vers zéro. On peut obtenir la limite de ce rapport sans résoudre l'équation. Posons $\frac{y}{x} = t$, ou $y = tx$; en substituant dans l'équation (1), il vient

$$x^2t^4 + 2(x^2 + c^2)t^2 + x^2 - 2c^2 = 0.$$

Lorsque $x$ est très-petit, l'une des valeurs de $t^2$ est voisine de l'unité, l'autre est négative et très-grande en valeur absolue ; en se bornant aux valeurs réelles de $y$, on a $\lim \frac{y}{x} = \pm 1$. Les tangentes au point O sont les bissectrices des angles des axes.

3° $a > c$. La seconde condition est encore satisfaite, quelle que soit $x$; $x$ peut donc varier de

$$-\sqrt{c^2 + a^2} \text{ à } +\sqrt{c^2 + a^2}.$$

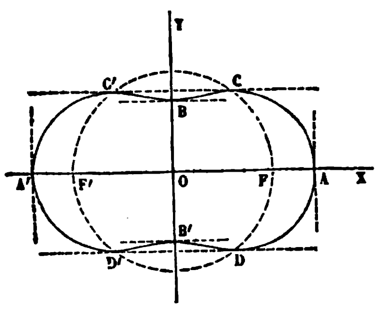


Fig. 213.

Pour $x = 0$, la valeur positive de $y^2$ est $a^2 - c^2$. Prenons sur l'axe des $y$

$$OB = OB' = \sqrt{a^2 - c^2},$$

la courbe passe aux points B et B'. Si l'on fait varier $x$ de 0 à $\sqrt{c^2 + a^2}$, $y^2$ part de $a^2 - c^2$ et devient nul ; le lieu est une courbe fermée qui a pour som-

mets les points A, A', B, B'. Pour que le cercle coupe la courbe, il faut que l'on ait $a < c\sqrt{2}$. Lorsque cette condition est satisfaite, l'ordonnée croît de B en C et diminue de C en A; l'ordonnée du point B est minimum, celle du point C maximum (fig. 213). Si, au contraire, on a $a > c\sqrt{2}$, le cercle est intérieur à la courbe, dont l'ordonnée diminue de B en A; l'ordonnée du point B est maximum. La figure 214 suppose que $a$ est égal à $c\sqrt{2}$.

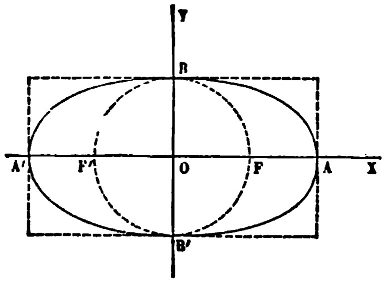


Fig. 214.

**340.** Exemple IV. *Construire la courbe*

$$2y^5 - 5xy^2 + x^5 = 0. \tag{1}$$

Cette équation, étant du cinquième degré par rapport à chacune des variables, ne peut être résolue par rapport à aucune d'elles; elle ne renferme que des termes de degrés impairs; donc l'origine est centre de la courbe. Examinons combien l'équation, dans laquelle on considère $y$ comme l'inconnue, a de racines réelles pour les diverses valeurs attribuées à $x$.

Supposons d'abord $x$ positive, l'équation (1) aura au plus deux racines réelles positives, puisque son premier membre n'a que deux variations. La dérivée du premier membre par rapport à $y$ est $10y(y^3 - x)$. Cette dérivée est négative depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \sqrt[3]{x}$, positive depuis cette valeur jusqu'à l'infini. Le premier membre, qui est positif pour $y = 0$, décroît, lorsque $y$ varie de 0 à $\sqrt[3]{x}$, et croît ensuite indéfiniment. L'équation a donc deux racines positives, ou elle n'en a pas, suivant que la valeur $y = \sqrt[3]{x}$ rend le premier membre négatif ou positif, c'est-à-dire suivant que l'on a $x^{10} < 27$, ou $x^{10} > 27$. Si l'on change $y$ en $-y$, le premier membre présente une variation et une seule; donc l'équation a une racine négative et une seule.

Pour $x = 0$, les cinq racines de l'équation (1) sont nulles; $x$ croissant de 0 à $\sqrt[10]{27}$, l'équation a deux racines positives et une racine négative; lorsque $x$ atteint la valeur $\sqrt[10]{27}$, les deux racines positives deviennent égales, puisqu'elles annulent la dérivée. Quand $x$ dépasse $\sqrt[10]{27}$, l'équation n'a plus qu'une racine réelle qui est négative. Les deux racines positives donnent une boucle OABO (fig. 215), comprise dans l'angle YOX, et la racine négative une branche infinie OC placée dans

l'angle Y'OX. Aux valeurs négatives de $x$ correspondent une boucle OA'B'O et une branche infinie OC', symétriques des précédentes par rapport au centre. La valeur maximum de l'abscisse pour la boucle OABO est $\sqrt[3]{27}$, elle correspond à un point A où la tangente est parallèle à OY, puisque les coordonnées de ce point annulent $f'_y(x,y)$. En considérant $y$ comme variable arbitraire, on trouve que le maximum de $y$ pour la même boucle est $\sqrt[3]{4}$; ce maximum donne un point B, où la tangente est parallèle à OX.

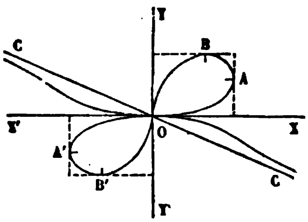


Fig. 215.

La méthode précédente de discussion est applicable toutes les fois que l'équation ne contient que trois termes; car on sait toujours déterminer le nombre des racines réelles d'une équation trinôme à une seule inconnue.

### EMPLOI D'UNE VARIABLE AUXILIAIRE.

**341.** Lorsqu'il est impossible de résoudre l'équation par rapport à l'une des variables $x$ ou $y$, on peut dans certains cas exprimer les deux coordonnées à l'aide d'une variable auxiliaire $t$; et, en suivant les variations simultanées de $x$ et $y$, lorsque $t$ varie entre les limites qui rendent ces quantités réelles, tracer la courbe.

Si l'on considère $y$ comme une fonction de $x$, et $x$ comme une fonction de $t$, on a, en prenant la dérivée de $y$ par rapport à $t$, d'après le théorème des fonctions de fonctions [1],

$$D_t y = D_x y \times D_t x;$$

on en déduit la formule

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x},$$

qui donne le coefficient angulaire de la tangente au point qui

1. Pour désigner la dérivée d'une fonction, on emploie fréquemment la lettre D, initiale du mot *dérivée*, et l'on indique la variable par rapport à laquelle on prend la dérivée en écrivant cette variable comme un indice à droite de la lettre D et un peu au-dessous. Ainsi $D_t x$ et $D_t y$ indiquent les dérivées des fonctions $x$ et $y$ par rapport à la variable $t$, $D_x y$ la dérivée de $y$ par rapport à $x$.

correspond à une valeur quelconque de $t$. Les valeurs de $t$ qui annulent $D_t y$ déterminent les points pour lesquels la tangente est parallèle à OX, et les valeurs qui annulent $D_t x$, les points pour lesquels la tangente est parallèle à OY.

**342.** Exemple V. *Construire la courbe* $y^4 - y^3x + x^3 - 2x^2y = 0$.

Si l'on pose $y = tx$, on a $x = \frac{2t-1}{t^3(t-1)}$, $y = tx = \frac{2t-1}{t^2(t-1)}$, et l'on construit la courbe en faisant varier $t$ de $-\infty$ à $+\infty$. Pour suivre les variations de $x$ et de $y$, prenons les dérivées

$$D_t x = -\frac{6t^2 - 8t + 3}{t^4(t-1)^2}, \quad D_t y = -\frac{4t^2 - 5t + 2}{t^3(t-1)^2}.$$

Les numérateurs, ne s'annulant pour aucune valeur réelle de $t$, ne changent pas de signe. Les valeurs de $x$ et de $y$ deviennent nulles pour $t = \frac{1}{2}$, infinies pour $t = 0$, ou $t = 1$. Si l'on fait varier $t$ de $-\infty$ à $0$, $x$ est négatif et décroît de $0$ à $-\infty$, $y$ est positif et croît de $0$ à l'infini; on obtient ainsi la branche infinie OA (fig. 216). La variable $t$ allant de $0$ à $\frac{1}{2}$, $x$ et $y$ deviennent positifs et décroissent de $\infty$ à $0$, ce qui donne la branche infinie BO. La variable $t$ allant de $\frac{1}{2}$ à $1$, $x$ et $y$ sont négatifs et décroissent de $0$ à $-\infty$, on a la branche infinie OC. Le coefficient angulaire de la tangente en O à la branche BOC est $\frac{1}{2}$. Enfin, si $t$ varie de $1$ à $\infty$, $x$ et $y$ deviennent positifs et décroissent de $\infty$ à $0$, on obtient la branche infinie DO.

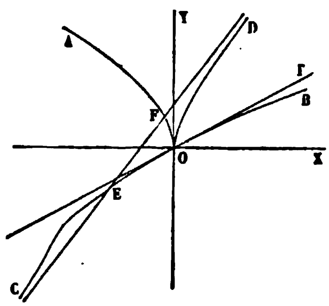


Fig. 216.

Lorsque l'équation entre $x$ et $y$ ne renferme que deux groupes de termes, l'un du degré $m$, l'autre du degré $m-1$, si l'on prend, comme nous venons de le faire, pour variable auxiliaire le rapport $\frac{y}{x} = t$, les coordonnées $x$ et $y$ sont des fonctions rationnelles de cette variable. Lorsque l'équation contient trois groupes de termes, le premier du degré $m$, le second du degré $m-1$, le troisième du degré $m-2$, en conservant la même variable auxiliaire, les coordonnées s'obtiennent par la résolution d'une équation du second degré, et on peut encore suivre leurs variations simultanées.

Exemple VI. *Construire la courbe* $x^3y^4 - xy - x - 2 = 0$.

Si l'on pose $xy = t$, on a $x = \frac{t+2}{t^4-1}$, $y = \frac{t^5-t}{t+2}$. Examinons comment varient $x$ et $y$, lorsqu'on fait varier la variable auxiliaire $t$ de $-\infty$ à $+\infty$. Pour cela prenons les dérivées des deux fonctions, on a

$$D_t x = -\frac{3t^4+8t^3+1}{(t^4-1)^2}, \quad D_t y = \frac{4t^5+10t^4-2}{(t+2)^2}$$

La valeur de $D_t x$ s'annule pour deux valeurs $a$ et $b$ de $t$ comprises, la première entre $-\frac{8}{3}$ et $-2$, la seconde entre $-1$ et $0$. La valeur $D_t y$ s'annule pour trois valeurs $c$, $d$, $e$ de $t$, comprises, la première entre $-\frac{5}{2}$ et $-2$, la seconde entre $-2$ et $0$, et la troisième entre $0$ et $1$. On reconnaît facilement, en outre, que l'on a $a < c$, $d < b$.

Cela posé, considérons la suite des quantités

$$-\infty, a, c, -2, -1, d, b, e, +1, \infty$$

rangées par ordre de grandeur. Si l'on fait varier $t$ de $-\infty$ à $a$, $x$ est négatif, part de $0$ et décroît; $y$ est positif, part de l'infini et décroît également; on a la branche AB asymptote à l'axe OY (fig. 217). La variable $t$ allant de $a$ à $c$, $x$ est négatif et croissant, $y$ positif et décroissant; branche BC. La variable $t$ allant de $c$ à $-2$, $x$ est négatif et croît jusqu'à $0$, $y$ est positif et croît jusqu'à l'infini; branche CI. La variable $t$ allant de $-2$ à $-1$, $x$ croît de $0$ à $\infty$, $y$ croît de $-\infty$ à $0$; double branche infinie DE, asymptote à OY' et à OX. La variable $t$ allant de $-1$ à $d$, $x$ part de $-\infty$ et croît, $y$ part de $0$ et croît; branche infinie FG, asymptote à OX'. La variable $t$ allant de $d$ à $b$, $x$ continue à croître, et $y$ décroît en restant positif; branche GH. La variable $t$ allant de $b$ à $e$, $x$ et $y$ décroissent; branche HK, qui coupe OX' en un point dont l'abscisse $-2$ correspond à $t=0$. La variable $t$ allant de $e$ à $+1$, $x$ décroît, $y$ augmente; branche infinie KL, asymptote à OX'. Enfin, $t$ variant de $+1$ à $+\infty$, $x$ décroît de $\infty$ à $0$, et $y$ croît de $0$ à $\infty$; double branche infinie MN, asymptote à OX et OY.

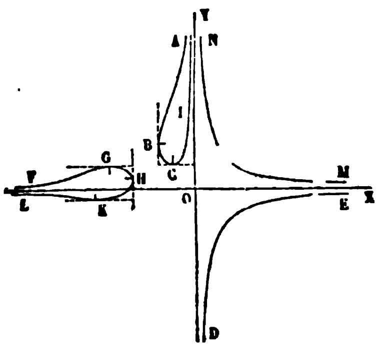


Fig. 217.

Les tangentes aux points C, G, K, qui correspondent aux valeurs $c$, $d$, $e$, de $t$ qui annulent $D_t y$, sont parallèles à OX; les tangentes aux points B et H sont parallèles à l'axe OY.

**343.** *Courbes tangentes, courbes orthogonales.* Soient $f(x, y)=0$, $\varphi(x, y)=0$ les équations de deux courbes. Appelons $x$ et $y$ les coordonnées d'un point d'intersection des deux courbes; pour qu'elles soient tangentes en ce point, il faut et il suffit que les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes en ce point *soient les mêmes :*

$$\frac{f'_x}{f'_y}=\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$$

ou

$$f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x = 0.$$

Les coordonnées $x$ et $y$ doivent donc vérifier les trois équations :

$$(1) \qquad f(x, y)=0, \quad \varphi(x, y)=0, \quad f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x = 0;$$

en éliminant $x$ et $y$ entre ces trois équations, c'est-à-dire en exprimant qu'elles ont *une solution commune*, on aura une équation de condition qui exprimera que les courbes sont tangentes en un point.

Si les courbes doivent être tangentes en $k$ points, il faut exprimer que les équations ci-dessus ont $k$ solutions communes.

Au point de vue géométrique, exprimer que ces équations (1) ont $k$ solutions communes revient à exprimer que la courbe

$$f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x = 0$$

passe par $k$ des points d'intersection des courbes données.

On voit de même que, si les courbes données $f=0$, $\varphi=0$ sont orthogonales en un point $(x, y)$, on doit avoir

$$(2) \qquad f(x, y)=0 \quad , \quad \varphi(x, y)=0 \quad , \quad f'_x \varphi'_x + f'_y \varphi'_y = 0.$$

En éliminant $x$ et $y$ entre ces relations on aura une condition exprimant que les deux courbes sont orthogonales *en un de leurs* points d'intersection. Pour exprimer qu'elles sont orthogonales en $k$ de leurs points d'intersection, il faut exprimer que les équations (2) ont $k$ solutions communes.

Au point de vue géométrique cela revient à exprimer que la courbe

$$f'_x \varphi'_x + f'_y \varphi'_y = 0$$

passe par $k$ des points communs aux proposées.

EXEMPLE. Soient deux coniques $f=0$ , $\varphi=0$; pour exprimer qu'elles sont orthogonales en leurs quatre points d'intersection, il faut exprimer que la courbe

$$f_x \varphi'_x + f_y \varphi'_y = 0$$

qui est aussi une conique, passe par les quatre points communs aux deux coniques données, c'est-à-dire que son équation peut être identifiée avec une équation de la forme $f+\lambda\varphi=0$.

Ainsi l'on vérifiera facilement que, quelles que soient les constantes $\alpha$ et $\beta$, les deux coniques

$$2x^2+y^2-\alpha=0 \quad y^2-2\beta x=0,$$

sont orthogonales en tous leurs points d'intersection.

Il en est de même pour les coniques

$$2xy-\alpha=0 \quad , \quad x^2-y^2-\beta=0.$$

EXERCICES. — 1° *Former l'équation générale des coniques qui coupent à angle droit en quatre points la conique fixe* $Ax^2+By^2-1=0$.

Ces coniques se partagent en plusieurs groupes; dans l'un d'eux se trouvent les coniques homofocales à la conique fixe.

2° *Soient* $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, *les équations de deux courbes algébriques de degrés* m *et* n *en coordonnées rectangulaires, calculer les angles sous lesquels se coupent ces courbes.*

Soient $x$ et $y$ les coordonnées d'un des points d'intersection; les tangentes en ce point aux deux courbes se coupent sous un angle $\theta$ dont la tangente trigonométrique est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{f'x\varphi'y-f'y\varphi'x}{f'x\varphi'y+f'y\varphi'y}.$$

En éliminant $x$ et $y$ entre cette équation et les équations des deux courbes, on aura une équation de degré $mn$ donnant les tangentes des angles $\theta$ sous lesquels se coupent les deux courbes.

Comme application, on formera l'équation du second degré donnant les tangentes $t$ des angles sous lesquels la droite $ux+vy+w=0$ coupe l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

On trouvera :

$$t^2(a^2v^2w^2+b^2u^2w^2-c^4u^2v^2)+(a^2u^2+b^2v^2-w^2)(2tc^2uv-a^2u^2-b^2v^2)=0.$$

# CHAPITRE II

## Convexité et concavité.

**344.** Soit AB un arc de courbe correspondant à une détermination de $y$, et aux valeurs de $x$ comprises entre $a$ et $b$; nous supposons que dans cet intervalle la dérivée seconde $y''$ de $y$ par rapport à $x$ conserve le même signe, par exemple, reste positive. Menons la tangente RS en un point quelconque M de cet arc, ayant pour abscisse $x_0$; désignons par $y'_0$ la valeur de la dérivée en ce point, ou le coefficient angulaire de la tangente, et par Y l'ordonnée d'un point quelconque de cette droite, ordonnée définie par l'équation $Y - y_0 = y'_0 (x - x_0)$; la différence $y - Y$ s'annule pour $x = x_0$, et il en est de même de sa dérivée $y' - Y'$ ou $y' - y'_0$ (fig. 218). Quand l'abscisse $x$ croît de $a$ à $b$, la dérivée $y''$ de la différence $y' - y'_0$ étant positive, la fonction $y' - y'_0$ va en croissant; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle est négative de $a$ à $x_0$, positive de $x_0$ à $b$. Considérons maintenant la fonction $y - Y$, qui admet pour dérivée $y' - y'_0$; quand $x$ varie de $a$ à $x_0$, la dérivée étant négative, la fonction décroît; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle était positive auparavant; $x$ variant de $x_0$ à $b$, la dérivée est positive et la fonction croît; comme elle s'annule pour $x = x_0$, elle est aussi positive de $x_0$ à $b$. Il en résulte que la différence $y - Y$ reste positive dans l'intervalle de $a$ à $b$. On conclut de là que l'arc de courbe AB est situé tout entier d'un même côté de chacune de ses tangentes, on dit que cet arc est *convexe*. Il en serait de même si la dérivée seconde restait négative; mais la différence $y - Y$ étant négative, l'arc serait situé tout entier de l'autre côté de la tangente. Il est facile de distinguer ces deux côtés; par le point M menons une parrallèle $MY_1$ à l'axe OY, et dans la direction des $y$ positifs; dans le premier

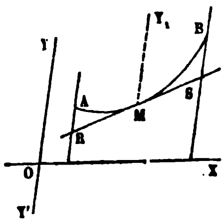


Fig. 218.

cas, l'arc est situé du même côté de la tangente que la demi-droite $MY_1$ : dans le second cas, il est de l'autre côté. Dans le premier cas, on dit que l'arc AB tourne sa *concavité* dans la direction $MY_1$ ; dans le second cas, dans la direction opposée.

On sait que le signe de $y''$ indique le sens de la variation de $y'$ quand $x$ croît. Si donc on imagine que le point M parcoure l'arc AB, le coefficient angulaire ira en croissant, si $y''$ est positive, et, au contraire, en décroissant, si $y''$ est négative.

**345.** On appelle points d'*inflexion* les points où la concavité change de sens, c'est-à-dire les points où la dérivée seconde change de signe. La dérivée seconde pourra changer de signe en passant par *zéro* ou par l'*infini*. En général, la quantité $y''$, étant finie et continue, change de signe en passant par zéro. Supposons que $y''$ change de signe pour $x = x_0$ en passant par zéro, on verra facilement que la dérivée première $y' - y'_0$ ne change pas de signe, mais que la fonction $y - Y$ change de signe; de sorte qu'en ce point la courbe passe d'un côté à l'autre de la tangente. Si pour $x = x_0$, $y''$ change de signe en passant par l'infini, $y'$ devenant infini et $y$ restant fini, le point $x = x_0$ , $y = y_0$ est un point d'inflexion où la tangente est parallèle à l'axe $Oy$.

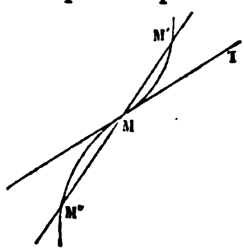


Fig. 219.

Si par le point d'inflexion M (fig. 219) on mène une sécante voisine de la tangente MT, cette sécante coupera la courbe en deux points M' et M'' voisins de M; la tangente MT est la limite d'une sécante passant par trois points voisins M'', M, M', quand les deux points M'' et M' tendent vers le point M.

**346.** EXEMPLE I. *Sinussoïde.* Construire la courbe $y = \sin x$. Quand $x$ croît de o à $\pi$, l'ordonnée est positive; elle part de o pour revenir à o, ce qui donne l'arc OAC (fig. 220) symétrique par rapport à l'ordonnée qui correspond à $x = \frac{\pi}{2}$. Quand $x$ croît de $\pi$ à $2\pi$, $y$ devient négatif, et l'on obtient l'arc CBO', égal au premier. De $2\pi$ a $4\pi$, l'ordonnée reprend les mêmes valeurs que de o à $2\pi$, de même de $4\pi$ à

$6\pi$, etc. Ainsi la courbe se compose d'une infinité d'ondulations égales.

Le coefficient angulaire de la tangente est $y' = \cos x$; à l'origine, $y' = 1$, la tangente est bissectrice de l'angle YOX. Au point C, $y' = -1$,

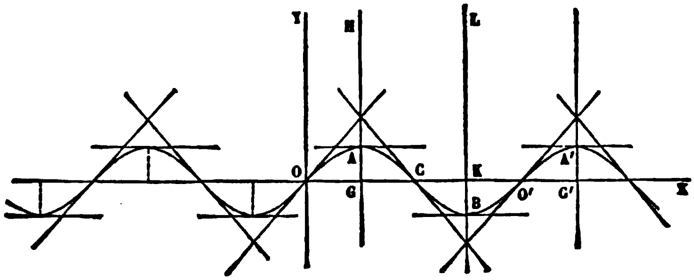



Fig. 220.

la tangente est parallèle à l'autre bissectrice. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, la dérivée s'annule et de positive devient négative; l'ordonnée du point A est maximum. Pour $x = 3\frac{\pi}{2}$, la dérivée s'annule également, de négative devenant positive; l'ordonnée du point B est minimum.

Quand $x$ varie de o à $\pi$, la dérivée seconde $y'' = -\sin x$ est négative et la courbe tourne sa concavité vers les $y$ négatifs; de $\pi$ à $2\pi$, la dérivée seconde est positive et la courbe tourne sa concavité vers les $y$ positifs; le point C est un point d'inflexion.

Il est à remarquer que cette courbe a une infinité de centres, situés à égale distance les uns des autres sur l'axe X'X, les points O, C, O',..... dont les abscisses sont les multiples de $\pi$. Chacun d'eux est un point d'inflexion.

**347.** Exemple II. *Construire la courbe* $(y - x^2)^2 - x^5 = o$, ou $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$.

Les valeurs de $y$ ne sont réelles que lorsque $x$ est positif. Prenons d'abord le signe + devant le radical; la fonction $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ augmente de o à l'infini, quand $x$ varie de o à $\infty$. La dérivée $y' = 2x + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ part de zéro et augmente aussi constamment; on a donc une branche infinie OD tangente en O à l'axe OX et qui tourne sa concavité vers les $y$ positifs (fig. 221). Prenons maintenant le signe — devant le radical; la valeur de $y$ est positive de o à 1, et négative au delà. Portons sur OX une longueur OA égale à l'unité, la courbe passe en A. La dérivée

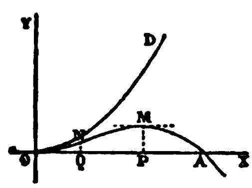



Fig. 221.

$y' = 2x - \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$, nulle au point O, est positive, tant que $x$ reste moindre que $\frac{16}{25}$, et négative quand $x$ dépasse ce nombre; l'ordonnée MP, qui correspond à $\frac{16}{25}$, est maximum, et la tangente en M est parallèle à OX. La dérivée seconde $2 - \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$ reste positive depuis o jusqu'à $\frac{64}{225}$, elle est négative au delà; le point N, qui correspond à l'abscisse $\frac{64}{225}$, est un point d'inflexion; de O en N, la concavité est tournée vers les $y$ positifs; au delà, elle est tournée vers les $y$ négatifs.

Les deux branches de la courbe sont tangentes au point O à la droite OX, sans être la continuation l'une de l'autre; les points qui offrent cette particularité se nomment *points de rebroussement*. Dans cette courbe, les deux branches sont du même côté de la tangente. En considérant la courbe $(y - x^2)^2 - x^3 = 0$, on aurait deux branches situées de part et d'autre de la tangente; la cissoïde présente à son sommet A (fig. 16) un rebroussement de cette sorte.

**248.** Exemple III. Soit la courbe $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. On suppose que $a$ désigne une longueur donnée; alors l'équation est homogène et définit une courbe, à laquelle on a donné le nom de *chaînette*, parce que c'est la courbe que forme un fil flexible pesant, dont les extrémités sont attachées à deux points fixes

L'équation donne des valeurs de $y$ égales pour deux valeurs de $x$ égales et de signes contraires, la droite OY est un axe de la courbe. Quand $x$ varie de o à $\infty$, le terme $e^{\frac{x}{a}}$ augmente, mais le terme $e^{-\frac{x}{a}}$ diminue; pour savoir comment varie $y$, prenons la dérivée; on a

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

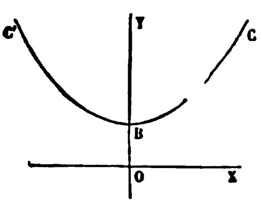



Fig. 222.

Cette dérivée est positive pour toutes les valeurs positives de $x$; donc, quand $x$ croît de o à $\infty$, la valeur de $y$ augmente constamment de $a$ à $\infty$, ce qui donne une branche infinie BC (fig. 222); on obtient la branche BC' symétrique par rapport a OY en donnant à $x$ des valeurs négatives.

La dérivée seconde restant positive quand $x$ varie de $-\infty$ $+\infty$, la courbe tourne sa *concavité* vers les $y$ positifs.

**249.** Exemple IV. *Construire la courbe* $y = e^{\frac{1}{x}}$. Quand $x$ a une valeur positive très-petite, $y$ est positive et très-grande ; $x$ croissant de $0$ à $+\infty$, $y$ décroît constamment de $\infty$ à $1$, ce qui donne une branche AC (fig. 223) asymptote d'une part à OY, d'autre part à la droite G'G menée parallèlement à OX et à une distance de cette droite égale à l'unité. Quand on donne à $x$ une valeur négative très-petite numériquement, $y$ est positive et très-petite ; $x$ variant de $0$ à $-\infty$, $y$ croît constamment de $0$ à $1$ ; on a ainsi une branche OD partant de l'origine et asymptote à la droite GG'.

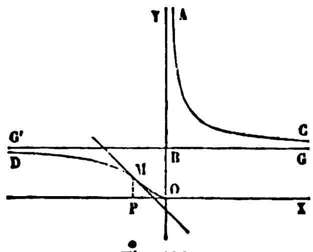


Fig. 223.

Cette courbe présente une particularité que nous n'avons pas encore rencontrée : la branche DO s'arrête brusquement au point O ; on donne aux points de cette espèce le nom de *points d'arrêt*.

Pour avoir le sens de la concavité, prenons d'abord la dérivée première $y' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. Lorsque $x$ varie de $0$ à $\infty$, les deux facteurs $\frac{1}{x^2}$ et $e^{\frac{1}{x}}$ diminuent ; à cause du signe $-$, $y'$ augmente ; la concavité de la branche AC est tournée vers les $y$ positifs ; $x$ variant de $-\infty$ à $0$, le facteur $\frac{1}{x^2}$ augmente, le facteur $e^{\frac{1}{x}}$ diminue ; on ne voit pas immédiatement comment varie $y'$ ; la dérivée seconde va nous l'apprendre. On a $y'' = \frac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. Quand $x$ varie de $-\infty$ à $-\frac{1}{2}$, la dérivée seconde est négative ; prenons OP égale à $\frac{1}{2}$ et soit M le point correspondant de la courbe ; l'arc DM a sa concavité dirigée vers les $y$ négatifs ; $x$ croissant de $-\frac{1}{2}$ à $0$, $y''$ est positive, l'arc MO tourne sa concavité vers les $y$ positifs et le point M est un point d'inflexion.

Exemple V.

Soit
$$y = e^{\sqrt[3]{x}}$$
On trouve facilement
$$y'' = e^{\sqrt[3]{x}}\,\frac{\sqrt[3]{x}-2}{9x^{\frac{5}{3}}};$$
la dérivée seconde change de signe deux fois, une fois en devenant infinie pour $x = 0$ et une fois en s'annulant pour $\sqrt[3]{x} = 2$, $x = 8$. La courbe a donc deux points d'inflexion.

**380.** Considérons les cas où l'équation de la courbe

(1) $$f(x, y) = 0$$

n'est résolue par rapport à aucune des variables $x$ et $y$; la dérivée $y'$ est donnée par l'équation

(2) $$f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, y' = 0.$$

Puisque $y$ et $y'$ sont deux fonctions de $x$, le premier membre de l'équation (2) est une fonction *composée* relativement à la variable indépendante $x$; cette fonction a pour dérivée

$$f''_{x^2} + 2f''_{xy}y' + f''_{y^2}y'^2 + f'_y y'';$$

comme elle est constamment nulle, sa dérivée est aussi nulle, et l'on a l'équation

(3) $$f''_{x^2} + 2f''_{xy}y' + f''_{y^2}y'^2 + f'_y y'' = 0,$$

qui donne la valeur de $y''$. Si l'on remplace dans cette équation $y'$ par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient

$$y'' = -\frac{f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy}f'_x f'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

C'est à l'aide de cette formule que l'on détermine le sens de la concavité, ainsi que les points d'inflexion.

**381.** Appliquons cette formule à la courbe définie n° 339. L'équation de cette courbe peut se mettre sous la forme

(1) $$f(x, y) = \frac{1}{4}[(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 - a^4] = 0.$$

On en déduit

$$f'_x = x(x^2 + y^2 - c^2), \quad f'_y = y(x^2 + y^2 + c^2),$$
$$f''_{x^2} = (x^2 + y^2 - c^2) + 2x^2, \quad f''_{xy} = 2xy, \quad f''_{y^2} = (x^2 + y^2 + c^2) + 2y^2.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule précédente, on obtient, après avoir réduit en tenant compte de l'équation (1),

$$y'' = \frac{a^4[3c^2(y^2 - x^2) - (a^4 - c^4)]}{y^3(x^2 + y^2 + c^2)^3}.$$

Pour chaque portion de la courbe comprise dans l'un des angles des axes des coordonnées, le dénominateur conserve le même signe; la valeur de $y''$ ne peut changer de signe que lorsque le numérateur passe par zéro. Les coordonnées des points d'inflexion doivent donc vérifier à la fois l'équation (1) et l'équation

(2) $$y^2 - x^2 - \frac{a^4 - c^4}{3c^2} = 0;$$

on en déduit

$$(5) \qquad y^2 + x^2 = \sqrt{\frac{a^4 - c^4}{3}}.$$

Dans le premier cas, lorsque $a$ est plus petit que $c$, les valeurs de $x$ et de $y$ données par les équations (2) et (3) étant imaginaires, le numérateur de $y''$ a le même signe pour tous les points de l'arc BCA; on vérifie aisément qu'il est négatif près des points B et A; la concavité de cet arc est dirigée vers les $y$ négatifs (fig. 211). Dans le second cas, $a = c$, le numérateur devient nul au point O seulement; il est négatif de O en A, et la concavité de l'arc OCA est dirigée vers les $y$ négatifs (fig. 212); l'arc A'D'OCA présente au point O un point d'inflexion. Dans le troisième cas, on a $a > c$; pour que les valeurs de $x$ et de $y$ soient réelles, on doit avoir en même temps $a < c\sqrt{2}$. Lorsque $a$ est plus grand que $c\sqrt{2}$, le numérateur est négatif en tous les points de l'arc BA, et la concavité tournée vers les $y$ négatifs (fig. 214); si $a$ est plus petit que $c\sqrt{2}$, le numérateur s'annule pour un certain point G (fig. 213) situé entre B et C; de B en G, il a le même signe qu'au point B : il est positif et la concavité est tournée vers les $y$ positifs; de G en A, le numérateur a le même signe qu'au point A : il est négatif et la concavité dirigée du côté des $y$ négatifs. Le point G est un point d'inflexion.

### REMARQUES SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES.

**352.** Soit $f(x, y) = 0$ une équation algébrique et entière du degré $m$ par rapport à $x$ et $y$ et du degré $n$ par rapport à $y$; à chaque valeur de $x$ correspondent $n$ valeurs de $y$ qui, en général, sont différentes les unes des autres; on démontre que, quand $x$ varie d'une manière continue, chacune de ces valeurs varie aussi d'une manière continue; nous admettrons ce théorème comme nous l'avons fait jusqu'à présent. Lorsque l'équation est irréductible, elle n'admet des racines multiples que pour un nombre limité de valeurs de $x$; parmi ces valeurs de $x$, considérons seulement celles qui sont réelles et supposons-les rangées par ordre de grandeur. Soient $a, b, c$ trois valeurs consécutives; quand $x$ variera de $a$ à $b$, le nombre des valeurs réelles de $y$ restera le même; car si, dans l'intervalle, une racine imaginaire devenait réelle, la racine conjuguée deviendrait aussi réelle, et, au moment de la transition, les deux racines seraient égales; on obtient ainsi, dans l'intervalle considéré, un certain nombre de branches

réelles distinctes et n'ayant aucun point commun. Quand $x$ passe par la valeur $b$, il peut arriver que deux racines réelles deviennent imaginaires ou inversement; au point qui correspond à la valeur $b$ et à la racine double réelle, commencent ou finissent dans ce cas deux branches de courbes.

Parmi les valeurs réelles de $y$ qui correspondent à une même valeur $x_0$ de $x$, considérons-en une $y_0$ qui soit racine simple; si l'on fait varier $x$ de $x_0 - h$ à $x_0 + h$, $h$ étant suffisamment petite, cette valeur de $y$ restera réelle sans devenir égale à une autre et donnera naissance à une branche réelle. Ainsi, *lorsque, pour une valeur* $x_0$ *attribuée à* $x$, *l'équation admet une racine simple réelle* $y_0$, *par le point dont les coordonnées sont* $x_0$ *et* $y_0$ *passe une branche réelle, et une seule.*

Considérons maintenant une valeur $x = b$ à laquelle corresponde une valeur multiple $y_1$ d'ordre $p$; marquons le point M dont les coordonnées sont $x=b$, $y=y_1$; parmi les $p$ valeurs de $y$ qui deviennent égales à $y_1$ pour $x=b$, il y en a un certain nombre qui sont réelles, quand $x$ varie de $a$ à $b$, et un certain nombre qui sont imaginaires; le nombre de ces dernières étant pair, le nombre des racines réelles est $p - 2q$ ($q$ pouvant être nul). De même, quand $x$ varie de $b$ à $c$, le nombre des valeurs réelles de $y$ qui partent de la valeur $y_1$ pour $x=b$ est $p-2q'$; de sorte que le nombre total des branches de courbe, qui partent du point M, dans un sens ou dans l'autre est le nombre pair $2p-2q-2q'$.

353. Déterminons actuellement les tangentes au point M; transportons en ce point l'origine des coordonnées, et posons ensuite $y=tx$; nous aurons une équation $\varphi(x, t) = 0$, qui donnera les coefficients angulaires $t$ des sécantes menées du point M aux points où la courbe est coupée par une parallèle à l'axe des $y$. Supposons que pour $x = 0$ on ait une racine réelle $t=t_1$; cette racine déterminera une droite, et, en répétant les mêmes raisonnements que dans le paragraphe précédent, on reconnaît que le nombre total des branches réelles, partant du point M, et tangentes aux deux directions de la droite, est pair.

Il résulte de ce qui précède qu'une courbe algébrique ne

peut pas présenter de point d'arrêt (n° 349). Elle ne peut pas présenter non plus de point saillant ou anguleux; on nomme point anguleux un point d'où partent deux branches tangentes à deux droites différentes.

**354**. Quand on transporte l'origine au point M dont les coordonnées sont $x_0$ et $y_0$, l'équation devient

$$(1)\quad (xf'_{x_0}+yf'_{y_0})+\frac{1}{2}(x^2f''_{x_0^2}+2xyf''_{x_0y_0}+y^2f''_{y_0^2})+\ldots=0,$$

et l'équation

$$(2)\quad x(f'_{x_0}+tf'_{y_0})+\frac{x^2}{2}(f''_{x_0^2}+2tf''_{x_0y_0}+t^2f''_{y_0^2})+\ldots=0$$

donne les points où une droite quelconque $y=tx$ menée par le point M rencontre la courbe. Lorsque l'une des dérivées premières au moins est différente de zéro, la racine $x=0$ étant racine simple, on dit que le point M est un *point simple* de la courbe. Pour la valeur particulière $t_1$ de $t$ qui annule le premier terme, une seconde racine est égale à zéro, et la droite devient tangente à la branche de courbe. Le contact est du premier ordre, lorsque pour $t=t_1$ le coefficient de $x^2$ est différent de zéro; il est de l'ordre $p$ lorsque le premier coefficient différent de zéro est celui de $x^{p+1}$; parmi les $m-1$ autres points d'intersection de la droite et de la courbe, $p$ se confondent avec le point M.

Supposons que les deux dérivées partielles du premier ordre soient nulles, sans que les trois dérivées secondes le soient; la racine $x=0$ étant racine double de l'équation (2), une droite quelconque menée par le point M coupe la courbe en deux points confondus en M, et l'on dit que ce point est un *point double*. Si l'on divise tous les termes par $x^2$, l'équation (2) se réduit à

$$(3)\quad \frac{1}{2}(f''_{x_0^2}+2tf''_{x_0y_0}+t^2f''_{y_0^2})+\frac{x}{2.3}(f'''_{x_0^3}+3tf'''_{x_0^2y_0}+\ldots)+\ldots=0.$$

Lorsque l'équation du second degré

$$(4)\quad f''_{x_0^2}+2tf''_{x_0y_0}+t^2f''_{y_0^2}=0$$

a ses deux racines $t_1$ et $t_2$ réelles et inégales, pour une valeur de $x$ très petite en valeur absolue, l'équation (3) admet deux

racines simples voisines, l'une de $t_1$, l'autre de $t_2$; à ces deux valeurs réelles de $t$ correspondent deux branches de courbe tangentes aux droites $y = t_1 x$, $y = t_2 x$ (fig. 208). Lorsque l'équation (4) a ses deux racines imaginaires, les deux valeurs de $t$ qui en sont voisines sont aussi imaginaires, et le point M est un point isolé (fig. 207). Quand l'équation (4) a ses deux racines égales à $t_1$, plusieurs cas peuvent se présenter; si les deux valeurs de $t$ voisines de $t_1$ sont imaginaires pour les valeurs positives et négatives de $x$, le point M est un point isolé; si elles sont réelles pour les valeurs positives de $x$ et imaginaires pour les valeurs négatives ou inversement, on a un point de rebroussement (fig. 209 et 221); enfin, si elles sont réelles pour les valeurs positives et aussi pour les valeurs négatives de $x$, on a deux branches passant au point M, de part et d'autre, et tangentes à la même droite.

*Remarquons que l'on obtient l'équation qui donne les diverses tangentes au point multiple, en égalant à zéro le groupe des termes du degré le moins élevé dans l'équation* (1).

**354 *bis*.** Nous allons définir un cas dans lequel il est facile de trouver la forme d'une courbe algébrique dans le voisinage de l'un de ses points.

Ce point étant pris pour origine, on suppose que l'équation en $x$ obtenue en faisant $y = 0$ dans l'équation de la courbe admet zéro pour racine simple. Soit

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x)y + \quad \ldots \quad \varphi_n(x)y^n + \quad \ldots \quad = 0$$

l'équation de la courbe mise sous forme entière et ordonnée par rapport aux puissances croissantes de $y$. Par hypothèse $\varphi_0(x)$ admet $x$ comme facteur simple; $x$ peut aussi se trouver en facteur dans quelques-uns des coefficients suivants. Soit $\varphi_n(x)$ le premier coefficient qui ne s'annule pas pour $x = 0$, nous pouvons écrire l'équation

$$x\{\psi_0(x) + y\psi_1(x) \ldots + y^{n-1}\psi_{n-1}(x)\} + y^n\{\varphi_n(x) + y\varphi_{n+1}(x) + \ldots\} = 0.$$

Si on suppose $x$ très petit et si l'on considère une des

valeurs très petites de $y$, le signe de chacune des parenthèses est le signe de son premier terme, et même chacun de ces termes $\psi_0(x)$, $\varphi_n(x)$ peut être remplacé par la valeur qu'il prend pour $x = 0$.

En définitive, pour trouver la forme de la courbe dans le voisinage de l'origine, l'équation étant ordonnée par rapport aux puissances croissantes de $y$, il suffit de considérer le terme indépendant de $y$ qui admet $x$ comme facteur simple et le premier des termes suivants dont le coefficient ne s'annule pas pour $x = 0$. On est ramené ainsi à une équation binôme

$$Ax + By^n = 0$$

et l'on peut même, dans chacun des coefficients A et B, négliger la partie qui s'annule pour $x = 0$.

**355.** L'on peut aussi, pour trouver l'équation de la tangente à une courbe algébrique et les points d'inflexion de cette courbe, employer la méthode suivante qui a l'avantage de s'appliquer aux courbes dont l'équation est donnée en coordonnées trilinéaires.

Soit une courbe d'ordre $m$ ayant pour équation en coordonnées homogènes $f(x, y, z) = 0$. Prenons sur la courbe un point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et dans le plan un second point $M(x, y, z)$. Cherchons les points où la droite $M_1M$ qui joint ces deux points coupe la courbe. Les coordonnées homogènes d'un point de cette droite sont (page 348).

$$(5) \qquad x_1 + \lambda x \quad , \quad y_1 + \lambda y \quad , \quad z_1 + \lambda z;$$

pour que ce point appartienne à la courbe, il faut et il suffit que $\lambda$ vérifie l'équation

$$f(x_1 + \lambda x \quad , \quad y_1 + \lambda y \quad , \quad z_1 + \lambda z) = 0$$

ou

$$(6) \qquad f(x_1, y_1, z_1) + \lambda (xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1}) + \frac{\lambda^2}{1.2}(x^2 f''^2_{x_1} + y^2 f''^2_{y_1} + \ldots) + \ldots = 0.$$

En mettant successivement toutes les racines de cette équation en $\lambda$ dans les expressions (5), on aura les coordonnées de tous les points d'intersection. Le point $(x_1, y_1, z_1)$ étant sur la courbe, on a $f(x_1, y_1, z_1) = 0$; l'équation (6)

admet donc une racine nulle $\lambda = 0$ qui, portée dans les expressions (5), donne précisément le point $(x_1, y_1, z_1)$. Pour que la droite $M_1M$ soit tangente à la courbe en $M_1$, il faut qu'il y ait deux points d'intersection confondus en $M_1$, c'est-à-dire que l'équation (6) admette la racine double $\lambda^2 = 0$ : ce qui exige

$$(7) \qquad xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0.$$

Si les coordonnées du point M vérifient cette équation, la droite $M_1M$ est tangente en $M_1$ : l'équation (7) dans laquelle on considère $x, y, z$ comme des coordonnées courantes est donc l'équation de la tangente au point $M_1$.

Dans ce qui précède nous avons supposé que les trois dérivées $f'_{x_1}$, $f'_{y_1}$, $f'_{z_1}$ ne sont pas nulles en même temps. Si ces trois dérivées étaient nulles, le coefficient de $\lambda$ dans l'équation (6) serait nul, quelle que soit la position du point M : toute droite passant par le point $M_1$ couperait la courbe *en deux points au moins confondus* avec $M_1$. On dit alors que le point $M_1$ est un *point singulier*. Les points singuliers sont donc caractérisés par cette propriété que leurs coordonnées annulent les trois dérivées partielles de $f$ par rapport à $x$, $y$ et $z$ et, par suite, $f$, en vertu du théorème des fonctions homogènes.

Supposons que le point $M_1$ ne soit pas un point singulier et cherchons la condition pour qu'il soit un point d'inflexion. Pour cela il faut et il suffit que la tangente en $M_1$ coupe la courbe non pas en *deux* mais en *trois* points confondus avec $M_1$ : en d'autres termes, si l'on prend le point M sur la tangente (7) il faut que le coefficient de $\lambda^2$ s'annule, c'est-à dire que l'on ait

$$(8) \qquad \varphi(x,y,z) = x^2 f''^{2}_{x_1} + y^2 f''^{2}_{y_1} + z^2 f''^{2}_{z_1} + 2yz f''_{y_1 z_1} + 2zx f''_{x_1 z_1} + 2xy f''_{x_1 y_1} = 0.$$

Si l'on considère $x$, $y$, $z$ comme des coordonnées courantes, cette équation (8) représente une conique : et comme tout système de valeurs $(x, y, z)$ vérifiant la condition (7) doit vérifier en même temps la condition (8), cette conique doit se

décomposer en deux droites dont l'une est la tangente. Donc, si $M_1$ est un point d'inflexion, le discriminant de la fonction du second degré $\varphi(x, y, z)$ doit être nul

$$H = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1y_1} & f''_{x_1z_1} \\ f''_{x_1y_1} & f''_{y_1^2} & f''_{y_1z_1} \\ f''_{x_1z_1} & f''_{y_1z_1} & f''_{z_1^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, si en un point $M_1$ *non singulier* cette fonction H est nulle, ce point est un point d'inflexion. En effet, remarquons que la conique $\varphi(x, y, z) = 0$ passe par le point $(x_1, y_1, z_1)$ et y est tangente à la courbe. Elle passe par le point, car d'après le théorème des fonctions homogènes

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = x_1^2 f''_{x_1^2} + \ldots = m(m-1) f(x_1, y_1, z_1) = 0;$$

ensuite, on obtient facilement d'après l'expression de $\varphi$,

$$x_1\varphi'_x + y_1\varphi'_y + z_1\varphi'_z = 2(m-1)\;(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1}),$$

identité qui montre que la tangente à la conique au point $M_1$ se confond avec la tangente à la courbe en ce point. Donc, si la conique $\varphi$ se décompose en deux droites, l'une des droites doit passer en $M_1$ et y être tangente à la courbe : en d'autres termes le polynôme $\varphi(x, y, z)$ est décomposable en deux facteurs dont l'un est le premier membre (7) de l'équation de la tangente. On en conclut que le point $M_1$ est bien un point d'inflexion.

Le déterminant H s'annule aussi lorsque le point $M_1$ est un point singulier; en effet, dans ce cas, les trois dérivées partielles du polynôme $\varphi(x, y, z)$, $\varphi'_x$, $\varphi'_y$, $\varphi'_z$ s'annulent pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, comme il résulte de ce que $f'_{x_1}$, $f'_{y_1}$, $f'_{z_1}$ s'annulent en un point singulier; le discriminant H de $\varphi$ est donc nul.

Le déterminant H s'appelle le *Hessien*; si l'on considère $x_1, y_1, z_1$ comme coordonnées courantes, l'équation $H = 0$ représente une courbe d'ordre $3(m-2)$ appelée *Hessienne* qui passe par les points d'inflexion et les points singuliers de la courbe $f = 0$. Nous venons de voir que, réciproquement, tout point commun aux deux courbes $f = 0$, $H = 0$, s'il n'est pas un point singulier de $f = 0$, en est un point d'inflexion. On en

conclut que, si la courbe $f=0$ n'a pas de *points singuliers*, elle a $3m(m-2)$ points d'inflexion réels ou imaginaires. Si la courbe $f=0$ a des points singuliers, le nombre de ses points d'inflexion est diminué.

Ainsi une courbe du troisième ordre sans point singulier a neuf points d'inflexion; si elle a un point double elle n'a plus que trois points d'inflexion; si elle a un point de rebroussement elle n'en a plus qu'un.

Exemple. La courbe du troisième ordre qui a pour équation en coordonnées cartésiennes

$$X^3 + Y^3 + 1 = 0$$

ou en coordonnées homogènes

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

n'a pas de points singuliers : car les trois dérivées partielles

$$f_x = 3x^2 \quad , \quad f_y = 3y^2 \quad , \quad f_z = 3z^2$$

ne s'annulent pour aucun système de valeurs de $x$, $y$, $z$, non nulles toutes trois. La Hessienne est ici

$$H = 6^3 xyz = 0$$

ou $xyz=0$; elle se décompose donc en trois droites $x=0$, $y=0$, $z=0$, qui sont les axes coordonnés et la droite de l'infini. Les neufs points d'intersection de la Hessienne avec la courbe seront des points d'inflexion. On a ainsi, pour les coordonnées de ces neuf points, en appelant $\omega$ une racine cubique imaginaire de l'unité,

$$x=0 \quad \text{avec} \quad \frac{y}{z} = -1, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{z} = -\omega, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{z} = -\omega^2$$

$$y=0 \quad \text{avec} \quad \frac{x}{z} = -1, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{z} = -\omega, \quad \text{ou} \quad \frac{x}{z} = -\omega^2$$

$$z=0 \quad \text{avec} \quad \frac{y}{x} = -1, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = -\omega, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = -\omega^2.$$

Les trois derniers points sont à l'infini. Les trois points

$$x=0 \ \ \frac{y}{z} = -1 \quad , \quad y=0 \ \ \frac{x}{z} = -1 \quad , \quad z=0 \ \ \frac{y}{x} = -1$$

sont seuls réèls. Ils sont en ligne droite sur la droite $x+y+z=0$.

*Classe de la courbe.* La classe d'une courbe $f(x, y, z)=0$ est le nombre des tangentes qu'on peut mener à cette courbe par un point du plan. Soit $M_2(x_2, y_2, z_2)$ un point donné : en exprimant que la tangente au point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ passe par $M_2$ on a la condition

$$(9) \qquad x_2 f'_{x_1} + y_2 f'_{y_1} + z_2 f'_{z_1} = 0$$

qui, jointe à $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, détermine les points de contact des tangentes issues du point $M_2$. Tout point $M_1$ non singulier dont les coordonnées vérifient ces équations est un point tel que la tangente en ce point passe par $M_2$; l'équation (9) est d'ailleurs vérifiée par les coordonnées de tous les points singuliers, puisque ces coordonnées annulent $f'_{x_1}$, $f'_{y_1}$, $f'_{z_1}$. Si l'on considère $x_1$, $y_1$, $z_1$ comme coordonnées courantes, l'équation (9) représente une courbe d'ordre $(m-1)$ appelée *la première polaire du point* $M_2$ *par rapport à la courbe.* Tout point commun à cette courbe et à la courbe donnée $f=0$ est un point singulier ou un point de contact d'une tangente issue du point $M_2$. Ces deux courbes ont $m(m-1)$ points communs; si la courbe proposée n'a pas de points singuliers, ces points communs sont tous des points de contact de tangentes issues du point $M_2$. Donc, *une courbe d'ordre* m *sans points singuliers est de classe* m (m — 1).

Si la courbe a des points singuliers, le nombre des tangentes issues du point $M_2$ est égal à $m(m-1)$ moins le nombre de points d'intersection de la polaire (9) et de la courbe qui sont confondus avec les points singuliers.

En supposant que les seuls points singuliers de la courbe soient des points doubles ou de rebroussement et désignant par $d$ le nombre des points doubles, $r$ celui des points de rebroussement, $i$ celui des points d'inflexion et $c$ la classe de la courbe, on démontre les formules suivantes dues à Plücker.

$$c = m(m-1) - 2d - 3r$$
$$i = 3m(m-2) - 6d - 8r.$$

Exemple. Une courbe du troisième ordre sans point singulier est de la sixième classe.

Prenons une courbe du troisième ordre avec un point double, par exemple la courbe ayant pour équation en coordonnées cartésiennes

$$Y^2 + X^2(X - a) = 0. \tag{10}$$

Les tangentes à l'origine sont données par l'équation

$$Y^2 - aX^2 = 0;$$

si donc $a$ est différent de zéro, l'origine est un point double à tangentes distinctes (réelles ou imaginaires suivant le signe de $a$); si $a$ est

nul, l'origine est un point de rebroussement et la tangente en ce point est l'axe OX. L'équation de la courbe rendue homogène est

$$f(x, y, z) = y^2 z + x^2 (x - az) = 0$$

d'où

$$f'_x = 3x^2 - 2axz \quad , \quad f'_y = 2yz \quad , \quad f'_z = y^2 - ax^2.$$

La première polaire d'un point $M'(x', y', z')$ a pour équation

(11) $$x'(3x^2 - 2axz) + 2y'yz + z'(y^2 - ax^2) = 0;$$

cette polaire est une conique passant par le point double situé à l'origine $x = 0$, $y = 0$ et ayant pour tangente en ce point la droite

(12) $$axx' + yy' = 0.$$

Si $a$ est différent de zéro, l'origine est un point double à tangentes distinctes et la tangente (12) varie suivant la position du point M'. La conique polaire (11) coupe donc la courbe du troisième ordre en six points dont deux sont confondus avec le point double. Il ne reste donc que quatre de ces points d'intersection qui ne soient pas confondus avec le point singulier, et l'on ne peut mener du point M' que quatre tangentes. La courbe est donc alors de quatrième classe.

Si $a$ est nul, l'origine est un point de rebroussement; la conique polaire (11) passe par ce point et la tangente à la conique en ce point a pour équation $y = 0$ comme la tangente à la courbe. La conique polaire est donc tangente à la courbe au point de rebroussement : elle la coupe en trois points confondus avec ce point singulier et en trois autres points qui sont seuls des points de contact de tangentes issues du point M'. La courbe est donc alors de troisième classe.

On pourra, comme exercice, former l'équation tangentielle de la courbe (10), c'est-à-dire la condition pour que la droite

$$uX + vY + w = 0$$

soit tangente à cette courbe; on vérifiera que cette équation est du quatrième degré en $u, v, w$ et se réduit au troisième degré quand $a = 0$.

**356.** *Courbes en coordonnées trilinéaires.* — Soit $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ l'équation en coordonnées trilinéaires d'une courbe d'ordre $m$. Prenons, sur cette courbe, un point $M_1$ ayant pour coordonnées trilinéaires $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ et, dans le plan, un point $M(\alpha, \beta, \gamma)$. Cherchons les points où la droite $M_1M$ qui joint ces deux points coupe la courbe. Les coordonnées trilinéaires d'un point de cette droite sont (N° 331)

$$\alpha_1 + \lambda\alpha \quad , \quad \beta_1 + \lambda\beta \quad , \quad \gamma_1 + \lambda\gamma;$$

pour que ce point appartienne à la courbe, il faut et il suffit que $\lambda$ vérifie l'équation

$$F(\alpha_1+\lambda\alpha,\ \beta_1+\lambda\beta,\ \gamma_1+\lambda\gamma)=0$$

ou

$$F(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)+\lambda(\alpha F'_{\alpha_1}+\beta F'_{\beta_1}+\gamma F'_{\gamma_1})+\frac{\lambda^2}{1.2}(\alpha^2 F''_{\alpha_1^2}+\beta^2 F''_{\beta_1^2}+\ldots)\ldots=0.$$

De cette équation, qui est entièrement semblable à l'équation (6), on déduit des conséquences identiques à celles que l'on a déduites de l'équation (6). On trouve ainsi que :

1° Si les trois dérivées partielles $F'_{\alpha_1}$, $F'_{\beta_1}$, $F'_{\gamma_1}$ ne sont pas nulles, la tangente au point $M_1$ a pour équation

$$\alpha F'_{\alpha_1}+\beta F'_{\beta_1}+\gamma F'_{\gamma_1}=0;$$

2° Si les trois dérivées partielles $F'_{\alpha_1}$, $F'_{\beta_1}$, $F'_{\gamma_1}$ sont nulles, le point $M_1$ est un point *singulier*;

3° Pour que le point $M_1$ soit un point d'inflexion il faut que le Hessien

$$H=\begin{vmatrix} F''_{\alpha_1^2} & F''_{\alpha_1\beta_1} & F''_{\alpha_1\gamma_1} \\ F''_{\alpha_1\beta_1} & F''_{\beta_1^2} & F''_{\beta_1\gamma_1} \\ F''_{\alpha_1\gamma_1} & F''_{\beta_1\gamma_1} & F''_{\gamma_1^2} \end{vmatrix}$$

soit nul; et réciproquement, si, en un point $M_1$ *non singulier* le Hessien est nul, ce point est un point d'inflexion.

Exemple. Considérons l'équation du troisième degré

$$F(\alpha, \beta, \gamma)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+6k\alpha\beta\gamma=0;$$

on démontre que l'équation de toute courbe du troisième ordre sans point singulier peut se ramener à cette forme par un choix convenable du triangle de référence.

L'on a actuellement

$$H=6^3\begin{vmatrix} \alpha & k\gamma & k\beta \\ k\gamma & \beta & k\alpha \\ k\beta & k\alpha & \gamma \end{vmatrix}$$

ou en développant

$$H=6^3\left[-k^2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+(1+2k^3)\,\alpha\beta\gamma\right].$$

Les points d'inflexion seront les points d'intersection, au nombre de neuf, de la courbe proposée $F=0$ avec la Hessienne $H=0$. Les équatons $F=0$ et $H=0$ sont des équations homogènes du premier degré

par rapport aux deux expressions $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$, $\alpha\beta\gamma$ : le déterminant des coefficients de ces deux expressions est $1+8k^3$; si donc $1+8k^3$ n'est pas nul, on tire des équations $F=0$, $H=0$ les deux suivantes

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=0\ ,\ \alpha\beta\gamma=0$$

qui donnent, pour les neuf points d'inflexion, les coordonnées

$$\begin{array}{llll} \alpha=0 & \text{avec}\ \beta+\gamma=0, & \text{ou}\ \beta+\omega\gamma=0, & \text{ou}\ \beta+\omega^2\gamma=0 \\ \beta=0 & \text{avec}\ \gamma+\alpha=0, & \text{ou}\ \gamma+\omega\alpha=0, & \text{ou}\ \gamma+\omega^2\alpha=0 \\ \gamma=0 & \text{avec}\ \alpha+\beta=0, & \text{ou}\ \alpha+\omega\beta=0, & \text{ou}\ \alpha+\omega^2\beta=0 \end{array}$$

$\omega$ désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. Ces neuf points sont les mêmes quel que soit $k$. On voit facilement que la droite qui joint deux de ces points en contient un troisième.

Si $1+8k^3=0$, les équations $F=0$ et $H=0$ représentent la même courbe; alors la Hessienne coïncide avec la courbe proposée : tous les points de cette courbe sont des points d'inflexion, ce qui ne peut arriver que si elle est décomposée en trois droites. Effectivement l'équation $k^3=-\frac{1}{8}$ donne pour $k$ trois valeurs

$$-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{\omega}{2}\ ,\ -\frac{\omega^2}{2}.$$

Pour $k=-\frac{1}{2}$, la courbe $F=0$ devient

$$F=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\ (\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)\ (\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=0,$$

elle est donc décomposée en trois droites; il en est de même si l'on prend $k=-\frac{\omega}{2}$ ou $k=-\frac{\omega^2}{2}$, comme on le voit en changeant, dans l'identité ci-dessus, $\alpha$ en $\omega\alpha$ ou en $\omega^2\alpha$.

# CHAPITRE III

## Asymptotes.

357. Lorsqu'une courbe a une branche infinie MN (fig. 224), il peut arriver que la distance MH d'un point M de cette courbe à une droite CD tende vers zéro, lorsque le point M s'éloigne indéfiniment; dans ce cas, la droite CD est dite *asymptote* de la branche de courbe.

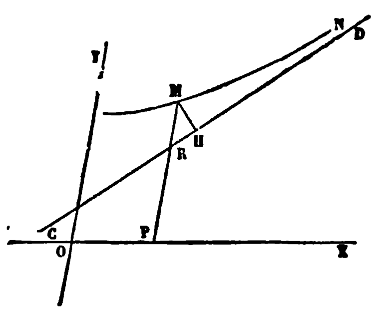



Fig. 224.

Considérons la différence MR entre les ordonnées de la courbe et de la droite, qui correspondent à une même abscisse, et désignons par $\beta$ l'angle de la droite CD avec l'axe des $y$, on a $MR = \frac{MH}{\sin\beta}$; si l'une des quantités MH et MR tend vers zéro, il en est de même de la seconde. On peut donc définir l'asymptote *une droite telle que la différence des ordonnées de la courbe et de la droite ait pour limite zéro quand* x *augmente indéfiniment.*

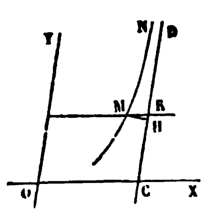



Fig. 225.

On ne peut pas transformer ainsi la définition lorsque l'angle $\beta$ est nul, c'est-à-dire quand l'asymptote est parallèle à l'axe des $y$. Dans ce cas, si l'on mène la droite MR (fig. 225) parallèle à l'axe OX, la droite MR tend vers zéro, quand l'ordonnée croît indéfiniment. Si l'on appelle $a$ l'abscisse de la droite CD, l'abscisse d'un point M de la branche MN tend vers $a$ quand $y$ augmente indéfiniment, ou inversement $y$ croît au delà de toute limite, lorsque $x$ tend vers $a$.

### ASYMPTOTES PARALLÈLES A L'AXE DES $y$.

358. D'après ce qui précède, on obtiendra les asymptotes

de cette espèce en cherchant les valeurs finies de $x$ qui rendent l'une des valeurs de $y$ infinie. Lorsque l'équation de la courbe est résolue par rapport à $y$, on aperçoit en général immédiatement ces valeurs; nous pouvons citer comme exemples la cissoïde et la strophoïde construites aux n$^{os}$ 20 et 23.

Quand l'équation de la courbe est algébrique, mais non résolue par rapport à $y$, on procède de la manière suivante. Soit $m$ le degré de l'équation, $n$ le plus haut exposant de $y$; on peut écrire l'équation sous la forme

$$\varphi_0(x)\,y^n + \varphi_1(x)\,y^{n-1} + \varphi_2(x)\,y^{n-2} + \ldots = 0,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ désignant des polynômes en $x$, de degrés au plus égaux à $m-n$, $m-n+1$, $m-n+2, \ldots$ et après avoir divisé par $y^n$,

$$(1) \qquad \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\frac{1}{y} + \varphi_2(x)\frac{1}{y^2} + \ldots + \varphi_n(x)\frac{1}{y^n} = 0.$$

Supposons qu'une branche réelle MN soit asymptote à une droite CD parallèle à l'axe des $y$ et ayant pour équation $x=a$. Lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur cette branche, son abscisse $x$ tend vers la valeur finie $a$, tandis que $\frac{1}{y}$ tend vers zéro. Les termes de l'équation (1) à partir du second tendant vers zéro, on en conclut que l'abscisse $a$ annule le polynôme $\varphi_0(x)$. Ainsi *les abscisses des asymptotes parallèles à l'axe des* $y$ *satisfont à l'équation* $\varphi_0(x) = 0$.

389. Réciproquement, soit $a$ une racine réelle de l'équation $\varphi_0(x)=0$; il faut examiner s'il y a des branches réelles qui se rapprochent indéfiniment de la droite $x=a$ et combien il y en a. Supposons d'abord que $a$ soit racine simple de l'équation

$$\varphi_0(x) = 0.$$

Si l'on regarde $x$ comme une fonction de $\frac{1}{y}$ donnée par l'équation (1), quand $\frac{1}{y}$ tend vers zéro, soit en étant positive, soit en étant négative, une valeur de $x$, et une seule, tend vers $a$; cette valeur de $x$ est nécessairement réelle; car, si elle était imaginaire, la racine conjuguée tendrait aussi vers la quantité réelle $a$ qui serait alors racine double. On en conclut qu'il

existe deux branches réelles asymptotes à la droite $x=a$, l'une du côté des $y$ positives, l'autre du côté des $y$ négatives.

Supposons maintenant que $a$ soit racine double de l'équation $\varphi_0(x)=0$. Quand $\frac{1}{y}$ tend vers zéro, deux valeurs de $x$ tendent vers $a$; ces valeurs peuvent être réelles ou imaginaires conjuguées. Si elles sont réelles pour les valeurs positives très petites de $\frac{1}{y}$, il existe deux branches réelles asymptotes à la droite $x=a$ du côté des $y$ positives. Si elles sont aussi réelles pour les valeurs négatives de $\frac{1}{y}$ très petites en valeur absolue, il existe deux autres branches réelles asymptotes à la même droite, du côté des $y$ négatives. Quand les deux racines sont imaginaires pour les valeurs positives ou négatives de $\frac{1}{y}$, il n'existe aucune branche réelle asymptote à la droite $x=a$.

En général, soit $p$ l'ordre de la racine $a$; parmi les $p$ valeurs de $x$ qui tendent vers $a$ quand $\frac{1}{y}$ tend vers zéro, $p-2q$ sont réelles pour les valeurs positives très petites de $\frac{1}{y}$, $p-2q'$ pour les valeurs négatives. Il y aura $p-2q$ branches réelles asymptotes à la droite $x=a$ du côté des $y$ positives, et $p-2q'$ branches réelles asymptotes à la même droite du côté des $y$ négatives; en tout $2p-2q-2q'$ branches réelles asymptotes à la droite $x=a$, et nous remarquons que ce nombre est pair.

**359 *bis*.** — Dans le cas particulier où $a$ est racine simple de $\varphi_0(x)$, il est facile de déterminer la disposition de la courbe dans le voisinage de l'asymptote.

Soit $\varphi_p(x)$, le premier des coefficients qui ne s'annule pas pour $x=a$, l'équation de la courbe peut s'écrire

$$(x-a)\left\{\psi_0(x)+\frac{1}{y}\psi_1(x)+\ldots+\frac{1}{y^{p-1}}\psi_{p-1}(x)\right\}+\frac{1}{y^p}\left\{\varphi_p(x)+\frac{1}{y}\varphi_{p+1}(x)+\ldots\right\}$$

$\psi_0(x)$, $\psi_1(x)\ldots\psi_{p-1}$ désignant des polynômes entiers en $x$ dont le premier ne s'annule pas pour $x=a$.

Cela posé, si l'on donne à $x$ une valeur voisine de $a$ et si l'on considère l'une des $p$ racines très petites de l'équation en $\frac{1}{y}$, le signe de chacune des parenthèses est le signe de son premier terme; d'autre part, $\psi_0(x)$ et $\varphi_p(x)$ ont respectivement même signe que $\psi_0(a)$ et $\varphi(a)$.

D'après cela, il suffit de considérer l'équation binôme

$$(x-a)\,\psi_0(a)+\frac{1}{y^p}\,\varphi_p(a)=0$$

et d'y supposer successivement $x$ un peu inférieur à $a$, puis $x$ un peu supérieur à $a$.

(On a déjà employé un procédé analogue n° 354 *bis*).

Ainsi, lorsque dans l'équation ordonnée par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{y}$ le premier terme admet $a$ comme racine simple, on peut réduire l'équation à ce terme et au premier des termes suivants dont le coefficient ne s'annule pas pour $x=a$. On peut même remplacer $x$ par $a$ dans les facteurs qui ne s'annulent pas pour $x=a$.

**360**. Nous avons, jusqu'à présent, dans l'équation (1), regardé $x$ comme fonction de $\frac{1}{y}$; on peut au contraire regarder $\frac{1}{y}$ comme fonction de $x$. Supposons d'abord que la racine réelle $a$ du polynôme $\varphi_0(x)$ n'annule pas $\varphi_1(x)$; quand $x$ tend vers $a$, une seule valeur de $\frac{1}{y}$ tend vers zéro, et cette valeur est nécessairement réelle. Il existe donc deux branches réel-

les, asymptotes à la même droite $x=a$, et données, l'une par les valeurs de $x$ plus petites que $a$, l'autre par les valeurs plus grandes ; ces deux branches sont situées de part et d'autre de l'asymptote.

Pour achever de déterminer leur position, faisons varier $x$ de $a-h$ à $a+h$, $h$ étant assez petit pour que, dans cet intervalle, l'équation $\varphi_0(x)=0$ n'ait que la racine $a$ et que le polynôme $\varphi_1(x)$ ne s'annule pas ; on peut supposer en outre $h$ et par suite $\frac{1}{y}$ assez petits en valeur absolue, pour que, quand on attribue à $x$ et à $\frac{1}{y}$ les valeurs simultanées qui correspondent à un point de l'une des branches infinies, la valeur du polynôme

$$\varphi_1(x)\frac{1}{y}+\varphi_2(x)\frac{1}{y^2}+\cdots\cdots+\varphi_n(x)\frac{1}{y^n}$$

ait constamment le signe de son premier terme $\varphi_1(x)\frac{1}{y}$. Mais, d'après l'équation (1), la valeur de ce polynôme est égale à $-\varphi_0(x)$ ; on en conclut que les deux quantités $\varphi_1(x)\frac{1}{y}$ et $-\varphi_0(x)$ ont le même signe, et par suite que $\frac{1}{y}$ a le signe de $\frac{-\varphi_0(x)}{\varphi_1(x)}$. Quand $x$ varie de $a-h$ à $a+h$, le dénominateur $\varphi_1(x)$ conserve le même signe ;

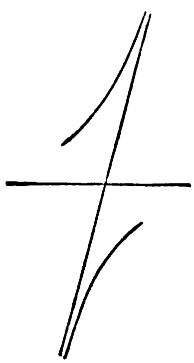


Fig. 226.

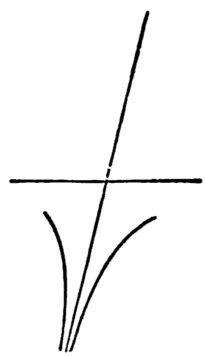


Fig. 227.

si $a$ est racine simple, ou plus généralement racine d'ordre impair, de l'équation $\varphi_0(x)=0$, le numérateur $\varphi_0(x)$ change de

signe pour $x=a$; la valeur de $y$ change elle-même de signe et les deux branches sont dirigées, l'une vers une extrémité de l'asymptote, l'autre vers l'autre extrémité (fig. 226), comme cela a lieu dans l'hyperbole. Lorsque $a$ est racine d'ordre pair, le numérateur conserve le même signe, ainsi que $y$; les deux branches sont dirigées vers la même extrémité de l'asymptote (fig. 227).

Supposons maintenant que $a$ annule les polynômes successifs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{p-1}$. Quand $x$ tend vers $a$, $p$ valeurs de $\frac{1}{y}$ tendent vers zéro; de ces valeurs, $p-2q$ sont réelles pour les valeurs de $x$ inférieures à $a$, $p-2q'$ pour les valeurs de $x$ supérieures à $a$; on aura ainsi $2p-2q-2q'$ branches réelles asymptotes à la droite $x=a$.

Exemple I. Soit la courbe définie par l'équation

$$x^4y^4+(x^2-4)\ (y-x)^4=0$$

qui, ordonnée, s'écrit

$$(x^4+x^2-4)y^4-4x(x^2-4)y^3+6x^2(x^2-4)y^2-4x^3(x^2-4)y+x^4(x^2-4)=0.$$

L'équation bicarrée

$$\varphi_0(x)=x^4+x^2-4=0$$

a deux racines réelles simples et de signes contraires,

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}=\pm a.$$

Comme ces valeurs de $x$ n'annulent pas $\varphi_1(x)$, chacune des droites $x=\pm a$ est asymptote à deux branches réelles, situées de part et d'autre de la droite et dirigées vers les deux extrémités.

Exemple II. Soit la courbe $(x-1)^2y^2+4-x^2=0$. L'équation $\varphi_0(x)=0$ devient $(x-1)^2=0$. Cette équation admet la racine double $x=1$; or, quand $x$ s'approche de l'unité, les deux valeurs de $y$ sont imaginaires; la droite $x=1$ n'est donc asymptote à aucune branche réelle.

### ASYMPTOTES NON PARALLÈLES A L'AXE DES $y$.

**361.** Considérons une branche de courbe infinie MN (fig. 228) ayant une asymptote CD non parallèle à l'axe des $y$, une pareille asymptote a pour équation

$$y_1=cx+d,$$

$c$ et $d$ étant deux constantes inconnues qu'il s'agit de détermi-

ner. Représentons par $y$ et $y_1$ les ordonnées de la branche de courbe et de la droite qui correspondent à une même abscisse, par $\delta$ la différence $y-y_1$, c'est-à-dire MR; d'après la définition, $\delta$ est une fonction de $x$ qui a pour limite zéro quand $x$ augmente indéfiniment. La branche de courbe

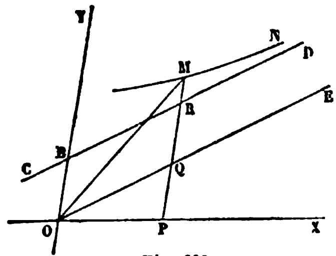


Fig. 228.

infinie que nous considérons est donc représentée par l'équation

$$(2) \qquad y = y_1 + \delta = cx + d + \delta.$$

Quelquefois on peut mettre facilement l'équation de la branche de courbe sous la forme précédente, et alors on a de suite l'asymptote. Soit, par exemple, l'équation $y = \frac{F(x)}{f(x)}$, dans laquelle $f(x)$ et $F(x)$ représentent deux polynômes entiers en $x$, le premier du degré $m$, le second au plus du degré $m+1$. A chaque racine réelle de l'équation $f(x) = 0$ correspondent deux branches réelles infinies, asymptotes à une même droite parallèle à l'axe des $y$, situées de part et d'autre de la droite, et dirigées vers les deux extrémités opposées ou vers la même extrémité, suivant que la racine $a$ est d'ordre impair ou pair. Il y a, en outre, deux autres branches infinies que l'on obtient en donnant à $x$ des valeurs très-grandes, positives ou négatives. Si l'on effectue la division, en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de $x$, on obtient un quotient entier $cx + d$, qui est au plus du premier degré, et l'on a

$$y = cx + d + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier d'un degré inférieur à $m$; cette dernière fraction tendant vers zéro, quand $x$ augmente indéfiniment, on voit que la droite $y_1 = cx + d$ est asymptote aux deux branches que nous considérons.

Nous citerons encore, comme exemple, la courbe transcendante

$$y = x + \frac{1}{e^x},$$

qui a une branche infinie située dans l'angle YOX et asymptote à la droite $y=x$.

**362.** En général, on n'obtient pas aussi facilement les asymptotes. Revenons à l'équation (2). On en déduit

$$c=\frac{y}{x}-\frac{d+\delta}{x}.$$

Puisque $d$ a une valeur finie et que $\delta$ tend vers zéro quand $x$ augmente indéfiniment, on a

$$(3)\qquad c=\text{limite de }\frac{y}{x}.$$

*Le coefficient angulaire de l'asymptote est égal à la limite vers laquelle tend le rapport* $\frac{y}{x}$, *quand* x *augmente indéfiniment.*

Le rapport $\frac{y}{x}$ étant le coefficient angulaire de la droite OM, la relation (3) signifie que cette droite tend vers une position limite OE parallèle à l'asymptote CD, quand le point M s'éloigne à l'infini sur la branche MN.

La même équation (2) donne $d=y-cx-\delta$, d'où

$$(4)\qquad d=\text{lim de }(y-cx).$$

*L'ordonnée à l'origine de l'asymptote est égale à la limite de la différence* y — cx, *quand* x *augmente indéfiniment.*

La quantité $y-cx$ étant l'ordonnée MQ de la courbe, comptée à partir de la droite OE parallèle à l'asymptote, la relation (4) signifie que cette ordonnée tend vers une limite OB, lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur la branche MN.

Les deux relations (3) et (4) déterminent les asymptotes non parallèles à l'axe des $y$.

Supposons d'abord l'équation résolue par rapport à $y$, et considérons une détermination de $y$ qui donne une branche réelle infinie, quand $x$ augmente indéfiniment. On prend, pour cette branche, le rapport $\frac{y}{x}$; si ce rapport ne tend pas vers une

limite finie, la branche n'a pas d asymptote. Si le rapport tend vers une limite finie $c$, on considère la différence $y-cx$; lorsque cette différence ne tend pas vers une limite finie, la branche n'a pas d'asymptote; si, au contraire, elle tend vers une limite $d$, on aura $y-cx=d+\delta$, $\delta$ tendant vers zéro quand $x$ augmente indéfiniment; donc la droite $y_1=cx+d$ sera asymptote de la branche que l'on étudie.

EXEMPLE I. *Construire la courbe*

$$y=\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}},$$

rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires. L'axe OX est axe de la courbe. Lorsque $x$ varie de o à l'unité, $y$ reste finie; elle est d'abord nulle et redevient égale à zéro; on a ainsi la boucle OAO (fig. 229). Pour les valeurs de $x$ comprises entre 1 et 2, $y$ est imaginaire. Quand $x$ dépasse 2 d'une petite quantité, $y$ est réelle et très-grande; si donc on prend OB égale à 2 et que l'on mène G'G parallèle à OY, cette droite sera asymptote de deux branches de la courbe.

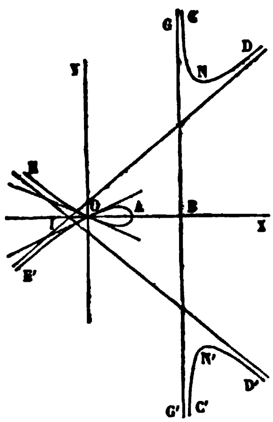


Fig. 229.

Faisons croître $x$ à partir de 2, $y$ commence par diminuer et redevient très-grande quand $x$ est grande; on obtient ainsi les deux branches CND, C'N'D'. Lorsque $x$ est négative, $y$ est toujours réelle; $x$ variant de o à $-\infty$, la valeur numérique de $y$ varie également de o à $\infty$, et l'on a les deux branches OE, OE'.

Considérons l'une des branches infinies, ND par exemple; on l'obtient en prenant le signe + dans l'équation et en supposant $x$ positive et très-grande. On a

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}};$$

la limite de $\frac{y}{x}$ est l'unité. On a ensuite

$$y-x=x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-1\right)=x\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}},$$

et, en multipliant les deux termes par la somme des radicaux,

$$y-x=\frac{x}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})},$$

la limite est $\frac{1}{2}$; donc la droite $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote de la branche considérée. En divisant par $x$ les deux termes de la fraction, on voit que la différence $y-x$ est plus grande que $\frac{1}{2}$, et, par conséquent, que l'ordonnée de la courbe est plus grande que celle de l'asymptote; on en conclut que la branche ND est située au-dessus de l'asymptote. On verrait de même que la branche OE' a pour asymptote la même droite et qu'elle est placée au-dessous. Les deux branches N'D' et OE admettent pour asymptote une droite symétrique de la précédente, par rapport à l'axe OX.

Exemple II. Considérons la courbe $y^4-y^2x+x^3-2x^2y=0$, construite au n° 342. Nous avons exprimé les deux coordonnées $x$ et $y$ à l'aide de la variable auxiliaire $t=\frac{y}{x}$. Les deux branches OA et OB, que l'on obtient en faisant tendre $t$ vers zéro, n'ont pas d'asymptote, puisque $y$ devient infinie. On obtient les deux branches infinies OC et OD quand $t$ tend vers l'unité. Pour ces branches, on a $\lim\frac{y}{x}=1$; cherchons si la différence $y-x$ a une limite. Les formules, par lesquelles on exprime $x$ et $y$ au moyen de $t$, donnent

$$y-x=(t-1)x=\frac{2t-1}{t^3};$$

cette différence tend vers l'unité, quand $t$ tend vers 1. Il en résulte que les deux branches considérées ont pour asymptote la droite $y=x+1$. La différence $\delta$ a pour valeur $\delta=\frac{(1-t)(t^2+t-1)}{t^3}$; quand $t$ varie de 1 à $+\infty$, la différence $\delta$ est négative et la branche OD est située au-dessous de l'asymptote. Le polynôme $t^2+t-1$ admet pour racines $t'=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t''=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; quand $t$ varie de $\frac{1}{2}$ à $t'$, $\delta$ est négative et l'arc OE est au-dessous de l'asymptote; $t$ variant de $t'$ à 1, $\delta$ devient positive, et l'arc EC passe de l'autre côté de l'asymptote. L'autre racine $t''$ donne le point F où la branche OA coupe l'asymptote.

**363.** Considérons maintenant le cas où l'équation, supposée algébrique et entière, n'est pas résolue par rapport à la variable $y$. Réunissons les termes du même degré; représentons par $\varphi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré le plus élevé $m$, par $\psi(x, y)$ l'ensemble des termes du degré $m-1$, par $\chi(x, y)$ les termes du degré $m-2$,....., l'équation s'écrira :

$$(5) \qquad f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \cdots\cdots = 0.$$

Désignons par $u$ le rapport $\frac{y}{x}$, et dans l'équation (5) remplaçons $y$ par $ux$; le polynôme $\varphi(x, y)$, homogène et du degré $m$ en $x$ et $y$, renfermera le facteur $x^m$ commun à tous ses termes, et l'on aura $\varphi(x, y) = x^m \varphi(1, u)$, ou, pour abréger, $x^m \varphi(u)$. De même, les polynômes $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$,... deviendront $x^{m-1}\psi(u)$, $x^{m-2}\chi(u)$, ..... L'équation entre $x$ et $u$ sera donc

$$x^m \varphi(u) + x^{m-1}\psi(u) + x^{m-2}\chi(u) + \cdots\cdots = 0.$$

et, si l'on divise par $x^m$,

$$(6) \qquad \varphi(u) + \frac{1}{x}\psi(u) + \frac{1}{x^2}\chi(u) \cdots\cdots = 0.$$

Supposons qu'une branche réelle MN (fig. 227) soit asymptote à une droite CD, non parallèle à l'axe des $y$. Quand le point M s'éloigne à l'infini sur cette branche, $u$ tend vers une limite finie $c$, tandis que $\frac{1}{x}$ tend vers zéro. Les termes de l'équation (6), à partir du second, tendant vers zéro, on en conclut que la valeur $u=c$ annule le polynôme $\varphi(u)$. Ainsi *les coefficients angulaires des asymptotes satisfont à l'équation* $\varphi(u) = 0$.

Posons maintenant $y - cx = v$, d'où $u = \frac{y}{x} = c + \frac{v}{x}$. En mettant à la place de $u$ cette valeur, et développant chaque terme, l'équation (6) devient

$$(7) \qquad \left.\begin{array}{r} \varphi(c) + \varphi'(c)\dfrac{v}{x} + \dfrac{\varphi''(c)}{1\,.\,2}\dfrac{v^2}{x^2} + \cdots\cdots \\ + \psi(c)\dfrac{1}{x} + \psi'(c)\dfrac{v}{x^2} + \cdots\cdots \\ + \chi(c)\dfrac{1}{x^2} + \cdots\cdots \end{array}\right\} = 0.$$

Puisque $\varphi(c)=0$, si l'on multiplie par $x$, elle prend la forme

$$(8) \qquad [v\varphi'(c)+\psi(c)]+\mathrm{A}\frac{1}{x}+\mathrm{B}\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots=0.$$

Quand le point M s'éloigne à l'infini sur la branche MN, $v$ tend vers une limite finie $d$, tandis que $\frac{1}{x}$ tend vers zéro. Les termes de l'équation (8), à partir du second, tendant vers zéro, on en conclut que la valeur $v=d$ annule le premier terme $v\varphi'(c)+\psi(c)$. Si $c$ est racine simple de l'équation $\varphi(u)=0$, la quantité $\varphi'(c)$ étant différente de zéro, on obtient pour $d$ la valeur finie

$$(9) \qquad d=-\frac{\psi(c)}{\varphi'(c)}.$$

**364.** Réciproquement, soit $c$ une racine simple réelle de l'équation $\varphi(u)=0$; considérons la valeur finie correspondante $d$ donnée par l'équation (9), et construisons la droite CD, qui a pour équation $y=cx+d$. D'après l'équation (8), quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, une valeur de $v$ et une seule tend vers $d$; cette valeur, nécessairement réelle, désigne l'ordonnée MQ, comptée à partir de la parallèle OE à CD; on en conclut qu'il existe deux branches réelles asymptotes à la droite CD, l'une du côté des $x$ positives, l'autre du côté des $x$ négatives (fig. 230).

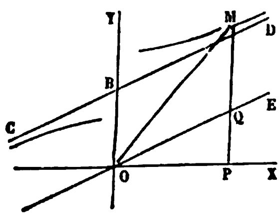


Fig. 230.

Supposons maintenant que $c$ soit racine d'ordre $p$ de $\varphi(u)$, et n'annule pas $\psi(u)$; d'après l'équation (8), quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, chacune des valeurs de $v$ devient infinie; car, si une valeur de $v$ conservait une valeur finie, les coefficients A, B,... resteraient finis, et l'équation (8) se réduirait à $\psi(c)=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'après l'équation (6), quand

$\frac{1}{x}$ tend vers zéro, $p$ valeurs de $u$ tendent vers $c$; parmi ces $p$ valeurs. $p - 2q$ sont réelles pour les valeurs positives très-petites de $\frac{1}{x}$, $p - 2q'$ pour les valeurs négatives. Menons la droite OE, dont le coefficient angulaire est $c$. A chaque valeur réelle de $u$ correspond une droite OM faisant un très-petit angle avec OE; le point M, où cette droite coupe la parallèle à l'axe des $y$, ayant pour abscisse $x$, appartient à la courbe; quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, l'ordonnée $v = \text{MQ}$ devenant infiniment grande en valeur absolue, la branche décrite par le point M est dépourvue d'asymptote et analogue à une branche de parabole. A la direction $c$ correspondent un nombre pair $2p - 2q - 2q'$ de branches paraboliques.

Examinons le cas où $c$ est racine double de l'équation $\varphi(u) = 0$, et annule $\psi(c)$. L'équation (7) devient

$$(10) \qquad \left[\frac{\varphi''(c)}{1 \cdot 2} v^2 + \psi'(c) v + \chi(c)\right] + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \cdots\cdots = 0.$$

Quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro, deux valeurs de $v$ tendent vers des limites finies qui sont les racines de l'équation

$$(11) \qquad \frac{\varphi''(c)}{1 \cdot 2} v^2 + \psi'(c) v + \chi(c) = 0.$$

Si les deux racines $d$ et $d'$ de cette équation sont réelles et inégales, une valeur de $v$ tend vers $d$, quand $\frac{1}{x}$ tend vers zéro; elle est réelle et donne deux branches réelles asymptotes à la droite $y = cx + d$. La valeur de $v$ qui tend vers $d'$ donne de même deux branches réelles asymptotes à la droite $y = cx + d'$, parallèle à la première. Si les racines de l'équation (11) étaient égales, on ne pourrait plus rien affirmer; on ferait une nouvelle transformation en posant $v = d + w$.

**364 *bis*.** Il est facile de trouver la disposition de la courbe dans le voisinage d'une asymptote, lorsque l'ordonnée à l'origine $d$ de cette asymptote est racine simple du premier terme de l'équation en $\frac{1}{x}$.

Pour cela, on réduit l'équation en $\frac{1}{x}$ à son premier terme, et au premier des termes suivants dont le coefficient ne s'annule pas pour $v = d$. On peut même ensuite remplacer $v$ par $d$ dans les facteurs qui ne s'annulent pas pour $v = d$. (Voir n° 359 *bis*.)

365. *Remarques*. Nous avons vu qu'une racine simple $c$ de l'équation $\varphi(u) = 0$ donne deux branches réelles asymptotes à la droite CD, qui a pour équation $y = cx + d$. Si l'on attribue à $v$ une certaine valeur, l'équation (8), dans laquelle on regardera $\frac{1}{x}$ comme l'inconnue, déterminera les points d'intersection de la courbe et d'une parallèle $y = cx + v$ à l'asymptote. L'équation (7) étant du degré $m$ par rapport à $\frac{1}{x}$, l'équation (8) est du degré $m - 1$ ; on en conclut qu'une parallèle à l'asymptote coupe la courbe au plus en $m - 1$ points. Quand on attribue à $v$ la valeur particulière $d$, l'équation s'abaisse au degré $m - 2$; l'asymptote rencontre la courbe au plus en $m - 2$ points.

Considérons maintenant le cas où $c$ est racine double et annule $\psi(c)$; l'équation (10) étant du degré $m - 2$ par rapport à $\frac{1}{x}$, une parallèle à la droite $y = cx$ coupe la courbe au plus en $m - 2$ points. Si les racines de l'équation (11) sont réelles et inégales, chacune des deux asymptotes coupe la courbe au plus en $m - 3$ points.

Exemple Soit la courbe $y^4 - y^3x + x^3 - 2x^2y = 0$, construite au n° 342. On a $\varphi(u) = u^4 - u^3 = u^3(u \; 1) -$, $\psi(u) = 1 - 2u$. L'équation $\varphi(u) = 0$ a une racine triple égale à zéro et une racine simple égale à 1. La racine simple $c = 1$, à laquelle correspond $d = 1$, donne une droite $y = x + 1$ asymptote à deux branches réelles. La racine triple ne pourrait donner que des asymptotes parallèles à OX; mais il est évident, d'après l'équation de la courbe, qu'aucune des valeurs de $y$ ne tend vers une limite finie, quand $x$ augmente indéfiniment.

L'équation (8) est ici

$$(v-1)+(3v^2-2v)\frac{1}{x}+3v^3\frac{1}{x^2}+v^4\frac{1}{x^3}=0.$$

Si l'on y fait $v=1$, on obtient une équation du second degré

$$1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

qui donne les deux points E et F où l'asymptote coupe la courbe (fig. 215).

**366.** Il est facile de ramener l'étude des branches infinies d'une courbe algébrique à celle des branches finies d'une courbe algébrique du même degré. Soient $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque M d'une première figure; à ce point M faisons correspondre le point M' dont les coordonnées $x'$ et $y'$ sont données par les relations

$$x'=\frac{1}{x},\quad y'=\frac{y}{x},$$

desquelles on déduit inversement

$$x=\frac{1}{x'},\quad y=\frac{y'}{x'}.$$

Si le point M décrit une droite $Ax+By+C=0$, le point M' décrit une droite correspondante $Cx'+By'+A=0$; le coefficient angulaire de chacune des droites est égal à l'ordonnée à l'origine de l'autre. Plus généralement, si le point M décrit une courbe du degré $m$, le point M' décrit une courbe correspondante du même degré; à une sécante passant par deux points voisins de l'une des courbes correspond une sécante passant par deux points voisins de l'autre courbe, et, par conséquent, à une tangente correspond une tangente. Nous pouvons supposer que la première courbe est rapportée à des axes tels que l'équation renferme un terme en $y^m$; alors on n'obtient des branches infinies qu'en faisant augmenter $x$ indéfiniment, et toutes les valeurs du rapport $\frac{y}{x}$ tendent vers des limites finies. D'après cela, si le point M décrit une branche infinie de la première courbe, comme $x'$ tend vers zéro et $y'$ vers une valeur finie $c$, le point M' décrira une branche aboutissant sur l'axe des $y$ à un point A' dont l'ordonnée est $c$ (fig. 231). On ramène de la sorte l'étude des branches infinies de la première courbe à celle des branches de la seconde courbe dans le voisinage des points situés sur l'axe des $y$.

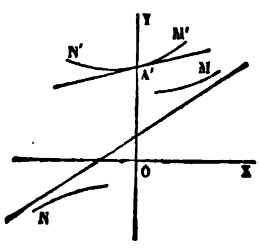


Fig. 231.

Soit A' un point où la seconde courbe coupe l'axe des $y$; appelons $d$

le coefficient angulaire de la tangente en ce point; pour un point M' voisin de A' on aura $\frac{y'-c}{x'} = d + \delta$, $\delta$ tendant vers zéro avec $x'$; la branche A'M' de la seconde courbe est donc représentée par l'équation $y' = c + dx' + \delta x'$; à cette branche correspond une branche infinie de la première courbe ayant pour équation $y = cx + d + \delta$, $\delta$ tendant vers zéro quand $x$ augmente indéfiniment; à la tangente $y' = c + dx'$ à la seconde courbe correspond l'asymptote $y = cx + d$ à la première. On sait que du point A' partent toujours un nombre pair de branches ayant la même tangente (n° 353); la première courbe admet donc un nombre pair de branches infinies ayant la même asymptote. La tangente en A' étant la limite de la tangente en M', il en résulte que l'asymptote est la limite de la tangente au point M, quand ce point s'éloigne à l'infini.

Supposons, par exemple, que le point A' soit un point simple ordinaire, comme l'indique la figure 231; d'après le signe de $\delta$, on voit qu'à la branche A'M' correspond une branche infinie M située au-dessus de l'asymptote vers la droite, et à la branche A'N' une deuxième branche infinie N située au-dessous de l'asymptote vers la gauche. S'il y avait inflexion en A' (fig. 232), les deux branches infinies seraient situées toutes deux d'un même côté de l'asymptote, l'une vers la droite, l'autre vers la gauche; dans ce cas, on dit que la courbe a un point d'inflexion à l'infini.

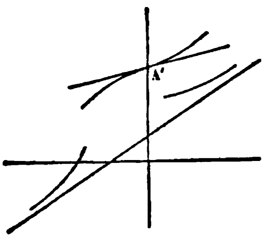


Fig. 232.

Si le point A' est un point double à tangentes distinctes, on a deux asymptotes parallèles, à chacune desquelles correspondent deux branches infinies ayant l'une des dispositions précédentes. Lorsque le point double A' est un point de rebroussement, on a deux branches asymptotes à la même droite, mais vers une même extrémité.

Nous avons supposé jusqu'à présent que la tangente en A' ne coïncide pas avec l'axe des $y$; lorsque cette circonstance se présente, aux branches qui partent du point A' correspondent dans la première figure des branches infinies dépourvues d'asymptotes. La direction de la tangente au point M tend vers la direction déterminée par le coefficient angulaire $c$; mais elle s'éloigne à l'infini. On donne à ces branches infinies le nom de branches paraboliques. Si le point A' est un point simple ordinaire, les deux branches infinies sont dirigées dans le même sens, comme cela a lieu dans la parabole ordinaire. S'il y a inflexion en A', les deux branches sont dirigées dans des sens contraires. La courbe représentée par l'équation $y^3 = x$

offre cette disposition; elle se compose de deux branches infinies dépourvues d'asymptote et dirigées, l'une vers les $x$ positives, l'autre vers les $x$ négatives.

**367.** Puisqu'à chaque valeur de $x$ correspondent au plus $m$ valeurs réelles de $y$, la première courbe admet au plus $m$ branches infinies du côté des $x$ positives et $m$ branches infinies du côté des $x$ négatives; ceci résulte d'ailleurs de ce que la seconde courbe est coupée au plus en $m$ points par l'axe des $y$. Le nombre des tangentes à la seconde courbe en ces points d'intersection étant au plus égal à $m$, la première courbe admet au plus $m$ asymptotes.

Les droites menées par le point A′ se transforment en droites parallèles à l'asymptote. Si le point A′ est un point simple (n° 354), une sécante menée par ce point coupe la seconde courbe en $m-1$ autres points; donc toute parallèle à l'asymptote coupe la première courbe en $m-1$ points. La tangente en A′ ne coupe la seconde courbe qu'en $m-2$ autres points, et, par conséquent, l'asymptote ne coupe la première courbe qu'en $m-2$ points; on dit que deux points d'intersection sont à l'infini. S'il y a inflexion en A′, comme la tangente coupe la seconde courbe en trois points qui se confondent en A′ (n° 345), l'asymptote aura trois points d'intersection à l'infini, et, par conséquent, ne rencontrera la première courbe qu'en $m-3$ points.

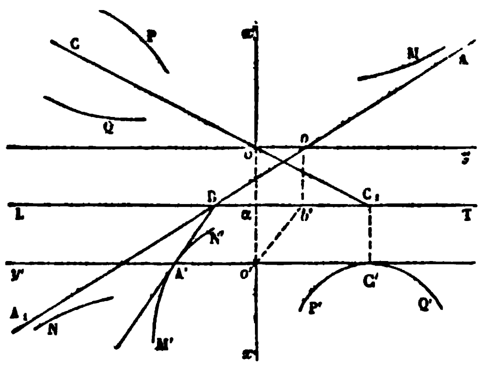


Fig. 233.

**368.** La transformation que nous avons effectuée revient à prendre la perspective de la figure sur un plan. Considérons, en effet, deux figures placées l'une dans un plan horizontal, l'autre dans un plan vertical coupant le plan horizontal suivant la ligne LT (fig. 233), et telles que l'une soit la perspective de l'autre, l'œil étant placé au point dont les projections sont $o$ et $o'$. Il est visible que, lorsqu'un point M s'éloigne à l'infini dans le plan vertical, sa perspective M′ vient sur la droite $o'y'$ parallèle à la ligne de terre; l'étude des branches infinies de la courbe située dans le plan vertical est ainsi ramenée à l'étude de l'autre courbe dans le voisinage des points situés sur la droite $o'y'$.

Si l'on rapporte l'une des courbes aux deux axes $ox$ et $oy$, l'autre aux deux axes $o'x'$ et $o'y'$, on a les formules de transformation

$$x' = \frac{ab}{x}, \quad y' = \frac{by}{x},$$

dans lesquelles $a$ et $b$ désignent les distances $\alpha o'$ et $\alpha o$. Ces formules sont précisément celles que nous avons employées précédemment, quand on fait $a = b = 1$.

Soit A′ un point où la seconde courbe coupe la droite $o'y'$; la tangente A′B en ce point a pour perspective la droite $A_1A$; aux deux branches M′ et N′, qui partent du point A′, correspondent deux branches infinies M et N asymptotes à la droite $AA_1$.

Lorsque la tangente en A′ coïncide avec la droite $o'y'$, comme cela a lieu au point C′, l'asymptote est rejetée à l'infini et les deux branches P′ et Q′ donnent naissance à deux branches paraboliques infinies P et Q; la droite menée du point $o$ à un point de l'une des branches P et Q tend vers la direction limite $oC_1$.

**369.** Les courbes transcendantes peuvent couper leurs asymptotes en une infinité de points.

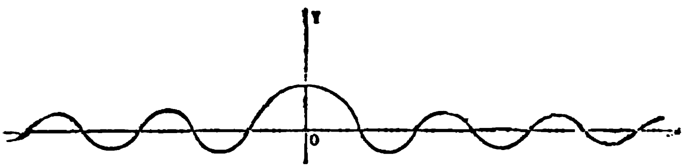



Fig. 234.

Par exemple, la courbe $y = \dfrac{3 \sin x}{x}$ oscille indéfiniment de part et d'autre de la droite OX à laquelle elle est asymptote, puisque la valeur de $y$ a pour limite zéro (fig. 234). Les oscillations ont une amplitude constante et égale à $\pi$.

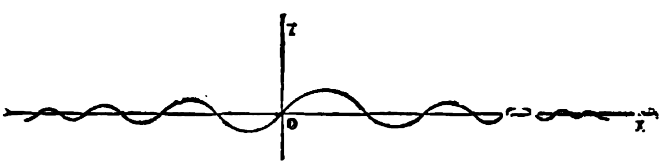



Fig. 235.

La courbe $y = \dfrac{\sin x^2}{x}$ oscille indéfiniment de part et d'autre de son asymptote OX; mais ici l'amplitude des oscillations va en diminuant (fig. 235).

Nous avons vu (n° 360) que, dans les courbes algébriques, si une branche infinie a une asymptote, la tangente tend une position limite, qui est l'asymptote elle-même, lorsque le point de contact s'éloigne à l'infini sur la branche de courbe. Mais ceci n'est pas vrai d'une manière générale dans les courbes transcendantes; ainsi, dans l'exemple précédent, le coefficient angulaire de la tangente,

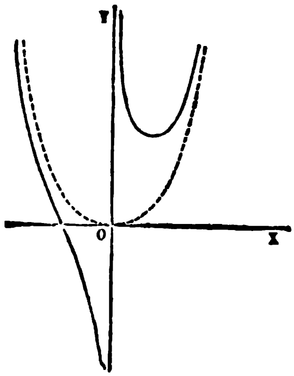


Fig. 236.

$$y' = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2},$$

ne tend pas vers une limite; car le second terme tend vers zéro, et le premier oscille entre $-2$ et $+2$.

Il arrive quelquefois que deux branches infinies n'ont pas d'asymptote rectiligne, et que cependant la différence de leurs ordonnées tend vers zéro; dans ce cas, on dit que les deux courbes sont asymptotes l'une de l'autre; si l'une d'elles est une courbe simple bien connue, on pourra s'en servir pour tracer l'autre. Reprenons l'équation $y = \frac{F(x)}{f(x)}$, et supposons que le degré du numérateur surpasse de plus d'une unité le degré du dénominateur; le rapport $\frac{y}{x}$ croissant indéfiniment avec $x$, les branches qui correspondent aux valeurs très grandes de $x$, positives ou négatives, n'ont pas d'asymptote rectiligne. Si l'on effectue la division, on a

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

et les deux branches considérées sont asymptotes à la courbe

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k.$$

Quand $n = 2$, cette seconde courbe est une parabole. Par exemple, la courbe

$$y = \frac{x^3 + 1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$$

est asymptote à la parabole $y = x^2$ (fig. 236).

# CHAPITRE IV

## Construction des courbes en coordonnées polaires.

**370.** Nous avons défini les coordonnées polaires au n° 3; dans ce système, un point quelconque, pris isolément dans le plan, peut être déterminé par une valeur de $\omega$ comprise entre $0$ et $2\pi$, et par une valeur positive de $\rho$; cependant on est conduit à faire varier chacune des coordonnées $\omega$ et $\rho$ de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous avons vu (n° 263) que, l'un des foyers de l'hyperbole étant pris pour pôle, les deux branches sont représentées par deux équations distinctes, quand on se borne aux rayons vecteurs positifs; mais que l'une des équations suffit, si l'on admet les rayons vecteurs négatifs, en convenant de porter la valeur absolue de chacun d'eux dans la direction opposée à celle qu'indique la valeur de $\omega$. Nous avons vu aussi que cette convention permet de représenter le limaçon de Pascal par une seule équation (n° 27).

**371.** *Spirale d'Archimède.* Un point M se meut d'un mouvement uniforme et dans le sens G'G sur une droite indéfinie G'OG, qui tourne elle-même d'un mouvement uniforme autour de l'un de ses points O : la courbe décrite par le point M est la spirale d'Archimède (fig. 237).

Prenons pour axe polaire la position OX, occupée par la droite OG lorsque le mobile M passe en O, et comptons les angles polaires positivement dans le sens de la rotation de la droite; soit $a$ la longueur dont le mobile s'avance sur la droite, pendant que celle-ci fait une révolution entière. Si l'on considère le mobile dans l'une quelconque de ses positions après son passage en O, en appelant $\omega$ l'angle dont a tourné la direction OX pour venir sur OG, et $\rho$ la distance du mobile au point O, on a, en posant $\frac{a}{2\pi} = b$,

$$(1) \qquad \frac{\rho}{a} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \text{ou} \quad \rho = a\frac{\omega}{2\pi} = b\omega.$$

Considérons le mobile avant son passage en O; appelons $\omega_1$ la valeur absolue de l'angle dont il faut faire tourner la direction OX

pour l'amener sur OG; le point M étant placé sur la direction opposée OG′, le rayon vecteur doit être considéré comme négatif, et l'on a $\frac{-\rho}{a} = \frac{\omega_1}{2\pi}$. Si l'on convient de regarder comme négatifs les angles polaires comptés dans un sens opposé au premier, on aura $\omega = -\omega_1$, et la relation précédente coïncide avec l'équation (1) qui représente alors la courbe indéfinie. Les valeurs de $\omega$ comprises entre 0 et $2\pi$, $2\pi$ et $4\pi$,..., 0 et $-2\pi$,..., donnent les spires successives. Si l'on se bornait aux valeurs positives de $\rho$ et aux valeurs de $\omega$ comprises entre 0 et $2\pi$, il faudrait une équation particulière pour représenter chacune des spires,

$$\rho = b\omega, \rho = a + b\omega, \ldots, \rho = a - b\omega, \rho = 2a - b\omega, \ldots$$

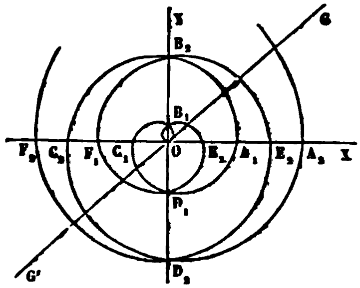


Fig. 237.

La spirale d'Archimède se compose de deux parties

$$OB_1C_1D_1A_1B_2\ldots$$

et

$$OB_1E_1D_1F_1B_2\ldots,$$

symétriques l'une de l'autre par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire. Chaque partie comprend une infinité de spires, et les portions d'une droite quelconque menée par le pôle et comprise entre deux spires consécutives ont toutes pour longueur $a$.

372. Remarque I. Un même point M du plan peut être défini par une infinité de couples de valeurs de $\rho$ et de $\omega$. Si l'on appelle $\alpha$ l'angle positif moindre que $2\pi$ que fait la direction OM avec l'axe OX et $a$ la distance OM (fig. 238), on peut prendre pour coordonnées du point M les couples de valeurs comprises dans les deux formules



Fig. 238.

$$\rho = +a, \quad \omega = \alpha + 2k\pi,$$
$$\rho = -a, \quad \omega = \alpha + (2k+1)\pi,$$

où $k$ est un nombre entier quelconque.

Lorsque le point M appartient à une courbe définie par une équation $f(\omega, \rho) = 0$, ses coordonnées ne peuvent être indiquées à la seule inspection du point; il faut, pour les obtenir, suivre le tracé de la courbe.

373. Remarque II. Dans les formules de transformation

établies au livre Ier, chapitre IV, nous avons supposé le point M déterminé par un rayon vecteur positif et par un angle polaire compris entre o et $2\pi$. Conservant d'abord le rayon vecteur positif, on peut prendre pour angle polaire l'un quelconque des angles que forme la direction OM avec l'axe OX (fig. 239), en convenant d'affecter l'angle du signe + ou du signe —, suivant qu'une droite partant de la direction OX pour arriver à la direction OM tourne de OX vers OY, ou dans le sens opposé. Ceci revient à augmenter ou à diminuer l'angle désigné primitivement par $\omega$, d'un multiple de $2\pi$; le sinus et le cosinus ne changeant pas, les formules restent les mêmes. Supposons maintenant le point M défini par un rayon vecteur négatif; l'angle $\omega$ sera l'un des angles formés par la direction OM' avec OX. La projection de OM sur OX étant égale à $(-\rho)\times\cos(\pi+\omega)$ ou $\rho\cos\omega$, on a encore $x=\rho\cos\omega$, et de même $y=\rho\sin\omega$. Donc les formules sont générales.

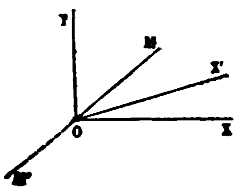


Fig. 239.

Lorsque l'axe polaire OX' ne coïncide pas avec OX, on définit la position de cet axe par l'angle $\alpha$ qu'il fait avec OX. Si, dans les formules $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, qui se rapportent à l'axe polaire OX, on remplace $\omega$ par $\omega'+\alpha$, il vient $x=\rho\cos(\omega'+\alpha)$, $y=\rho\sin(\omega'+\alpha)$.

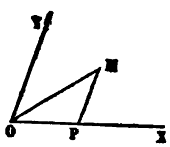


Fig. 240.

Supposons maintenant les axes des coordonnées obliques, et prenons OX pour axe polaire (fig. 240); on obtient les formules de transformation en projetant les deux chemins OM et OPM successivement sur une perpendiculaire à OX et sur une perpendiculaire à OY, ce qui donne

$$x=\frac{\rho\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta},\quad y=\frac{\rho\sin\omega}{\sin\theta}.$$

374. Remarque III. Dans le cas où l'on obtient toute la courbe en faisant varier $\omega$ de o à $2\pi$, on reconnaît la symétrie par rapport à l'axe polaire OX, quand les valeurs $\alpha$ et $2\pi-\alpha$

attribuées à $\omega$ reproduisent la même valeur de $\rho$, ou quand les valeurs $\alpha$ et $\pi-\alpha$ donnent des valeurs de $\rho$ égales et de signes contraires. On reconnaît de même la symétrie par rapport à la perpendiculaire OY, quand les angles $\alpha$ et $\pi-\alpha$ donnent la même valeur de $\rho$, ou les angles $\alpha$ et $2\pi-\alpha$ des valeurs égales et de signes contraires. Enfin on reconnaît la symétrie par rapport au pôle, quand les angles $\alpha$ et $\pi+\alpha$ donnent la même valeur de $\rho$, ou quand à un même angle $\alpha$ correspondent deux valeurs de $\rho$ égales et de signes contraires.

Mais lorsque, pour avoir toute la courbe, il est nécessaire de faire varier $\omega$ au delà de $2\pi$, la symétrie peut se présenter d'une autre manière. Par exemple, s'il est nécessaire de faire varier $\omega$ de o à $4\pi$, la symétrie par rapport à l'axe polaire aura lieu, si les angles $\alpha$ et $2\pi-\alpha$, ou $\alpha$ et $4\pi-\alpha$, donnent des valeurs égales pour $\rho$, et encore si les angles $\alpha$ et $\pi-\alpha$, ou $\alpha$ et $3\pi-\alpha$, donnent des valeurs de $\rho$ égales et de signes contraires. Si les limites de $\omega$ sont plus étendues, le nombre des comparaisons à faire augmente.

Considérons, par exemple, la courbe définie par l'équation $\rho=\cos\frac{\omega}{2}$.

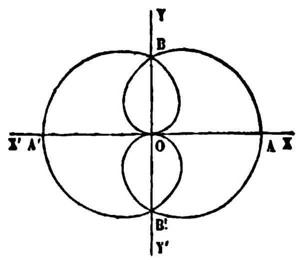


Fig. 241.

Quand $\omega$ augmente de deux fois $2\pi$, la direction du rayon redevient la même; d'ailleurs, $\frac{\omega}{2}$ augmentant de $2\pi$, $\rho$ reprend la même valeur et l'on retrouve un point déjà obtenu antérieurement; il suffit donc de faire varier $\omega$ de o à $4\pi$. Si l'on augmente $\omega$ de $2\pi$, le rayon revient à la même direction; mais $\frac{\omega}{2}$ augmentant seulement de $\pi$, $\rho$ conserve la même valeur numérique en changeant de signe; on en conclut que la portion du lieu donnée par les valeurs de $\omega$ comprises entre $2\pi$ et $4\pi$ est symétrique par rapport au pôle de la partie donnée par les valeurs de $\omega$ comprises entre o et $2\pi$; en d'autres termes, le pôle est centre de la courbe. Pour $\omega=\alpha$ et $\omega=2\pi-\alpha$, les valeurs de $\rho$ sont égales et de signes contraires; on a, de la sorte, deux points placés symétriquement par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire (fig. 241); cette droite OY est un axe de la courbe. La variable $\omega$ allant de o à $\pi$, $\rho$ diminue de 1 à o, et l'on a l'arc ABO tangent au point O à la droite OX'. Les valeurs de $\omega$ comprises entre $\pi$ et $2\pi$ donnent l'arc OBA' symétrique du premier

par rapport à OY, et les valeurs de $\omega$ comprises entre $2\pi$ et $4\pi$ la courbe A'B'OB'A symétrique de ABOBA' par rapport au pôle. La courbe est formée de quatre arcs égaux. L'axe polaire est aussi un axe de la courbe, ce qu'on voit directement en remarquant que l'on a des valeurs égales de $\rho$ pour les valeurs $\alpha$ et $4\pi - \alpha$ attribuées à $\omega$,

## TANGENTE.

**375.** Soit M un point d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires. Considérons la tangente MT en un point M (fig. 242) et le prolongement MA du rayon vecteur dans le sens OM; nous appellerons V l'angle dont il faut faire tourner autour du point M, dans le sens positif, le prolongement MA du rayon vecteur pour le faire coïncider avec la tangente. Pour déterminer V, appelons $\rho$ et $\omega$ les coordonnées du point de contact M, $\rho + \Delta\rho$, $\omega + \Delta\omega$ celles d'un point M' voisin de M et U l'angle de MA avec la corde MM'. Quand le point M' se rapproche indéfiniment de M, la corde MM' tend vers la tangente MT et l'angle U tend vers V.

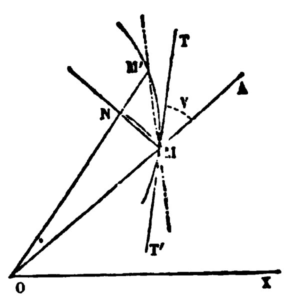


Fig. 242.

Le triangle OMM' donne $\dfrac{\text{OM}}{\text{OM}'} = \dfrac{\sin \text{OM}'\text{M}}{\sin \text{OMM}'} = \dfrac{\sin(\text{U} - \Delta\omega)}{\sin \text{U}}$.

Comme $\Delta\rho$ tend vers zéro quand le point M' tend vers M, on peut le supposer assez petit pour que $\rho$ et $\rho + \Delta\rho$ aient le même signe : donc on a en grandeur et en signe

$$\frac{\text{OM}}{\text{OM}'} = \frac{\rho}{\rho + \Delta\rho},$$

et l'équation ci-dessus donne

$$\frac{\rho}{\rho + \Delta\rho} = \frac{\sin(\text{U} - \Delta\omega)}{\sin \text{U}}$$

d'où

$$\frac{\rho}{\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}} = \frac{\sin(U - \Delta\omega)}{\frac{\sin U - \sin(U - \Delta\omega)}{\Delta\omega}} = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}\sin(U - \Delta\omega)}{\sin\frac{\Delta\omega}{2}\cos\left(U - \frac{1}{2}\Delta\omega\right)}.$$

Quand $\Delta\omega$ tend vers zéro, le rapport $\frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}$ tend vers la dérivée $\rho'$ de $\rho$ par rapport à $\omega$, et U tend vers V. On a donc

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Remarque. Lorsque le rayon vecteur s'annule pour une valeur particulière $\omega_0$ de $\omega$, on a une branche de courbe OC passant au pôle (fig. 243), et la tangente à cette branche au pôle est précisément la droite OA donnée par l'angle $\omega_0$. En effet, si l'on prend un point voisin M, et si l'on fait tourner la sécante OM de manière que le point M se rapproche du point O, $\rho$ s'annule et la sécante tend vers la direction OA.

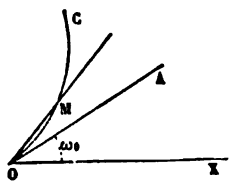


Fig. 243.

**376.** *Équation de la tangente.*

L'équation de la sécante $M_1M'_1$ (fig. 244) est (n° 83 bis)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \frac{1}{\rho_1} + \Delta\frac{1}{\rho_1} & \cos(\omega_1 + \Delta\omega_1) & \sin(\omega_1 + \Delta\omega_1) \end{vmatrix} = 0$$

en appelant $\rho_1$ et $\omega_1$ les coordonnées du point $M_1$ et $\Delta\frac{1}{\rho_1}$, $\Delta\omega_1$ les accroissements que prennent $\frac{1}{\rho_1}$ et $\omega_1$ quand on passe du point $M_1$ au point voisin $M'_1$. En retranchant, dans le déter-

minant précédent, les éléments de la deuxième ligne de ceux de la troisième et divisant par $\Delta\omega_1$ tous les éléments de la troisième ligne du nouveau déterminant, on obtient, pour la sécante, une équation qui donne, lorsque $\Delta\omega_1$ tend vers zéro, l'équation de la tangente en $M_1$.

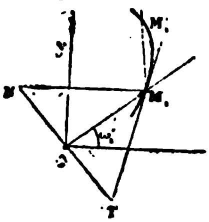



Fig. 244.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \left(\frac{1}{\rho_1}\right)' & -\sin\omega_1 & \cos\omega_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou en développant

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)'\sin(\omega - \omega_1).$$

*Sous-tangente.* On appelle sous-tangente $S_t$ le rayon vecteur de la tangente qui correspond à l'angle polaire $\omega = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$S_t = -\frac{\rho_1^2}{\rho_1'}.$$

Dans la figure (244), $\omega_1$ étant l'angle $x\,OM_1$, la sous-tangente est négative et égale à $-\overline{OT}$.

*Sous-normale.* On appelle sous-normale $S_n$ le rayon vecteur de la normale au point $M_1$ qui correspond à l'angle polaire $\omega = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$.

Dans la figure (244) la sous-normale est positive et égale à $+\overline{ON}$.

Quelle que soit la disposition de la figure, le triangle $TM_1N$ est rectangle en $M_1$ et le point O est le pied de la perpendiculaire abaissée du point $M_1$ sur l'hypoténuse TN : ce point O se trouvera donc toujours entre T et N et, par suite, la sous-

tangente et la sous-normale seront de signes contraires : comme la valeur absolue de leur produit est

$$\overline{OT}.\ \overline{ON} = \overline{OM}_1^2 = \rho_1^2,$$

on a

$$S_t\ .\ S_n = -\rho_1^2,$$

et, par conséquent, d'après la valeur de $S_t$,

$$S_n = \rho'_1.$$

*Équation de la normale.* La normale est une droite passant par le point $M_1$ de coordonnées $(\rho_1, \omega_1)$ et par le point N extrémité de la sous-normale de coordonnées $\left(\rho'_1, \omega_1 + \frac{\pi}{2}\right)$. L'équation de cette droite est donc

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\omega & \sin\omega \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ \frac{1}{\rho'_1} & -\sin\omega_1 & \cos\omega_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\omega - \omega_1) + \frac{1}{\rho'_1}\sin(\omega - \omega_1).$$

377. Exemple I. *Spirale d'Archimède.* L'équation de cette courbe étant $\rho = b\omega$ (n° 371), on en déduit $\rho' = b$, d'où

$$\operatorname{tang} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{b\omega}{b} = \omega.$$

Si le point M part du pôle et s'avance sur la courbe, l'angle V, d'abord nul, augmente constamment et tend vers un angle droit.

La sous-normale est constante et égale à $b$.

Exemple II. *Spirale logarithmique.* On appelle spirale logarithmique la courbe dont l'équation polaire est $\rho = ae^{m\omega}$, $a$ désignant une ligne donnée et $m$ un nombre. Supposons la constante $m$ positive; si l'on fait croître $\omega$ de 0 à l'infini, $\rho$ va constamment en croissant de $a$ à l'infini, ce qui donne une branche indéfinie ABC...., faisant une infinité de circonvolutions autour du pôle (fig. 245). Si l'on fait ensuite varier

$\omega$ de o à $-\infty$, $\rho$ diminue constamment et tend vers zéro; on obtient une seconde branche indéfinie AB′C′..., qui fait une infinité de circonvolutions autour du pôle, en se rapprochant constamment de ce point. Si la constante $m$ était négative, les valeurs positives de $\omega$ donneraient la branche qui se rapproche du pôle, et les valeurs négatives celle qui s'en éloigne. On a ici

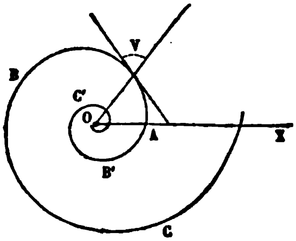


Fig. 245.

$$\rho' = mae^{m\omega} = m\rho, \text{ d'où } \operatorname{tang} V = \frac{1}{m}.$$

On en conclut que la tangente à la courbe fait un angle constant avec le rayon vecteur.

**378.** Exemple III. *Épicycloïde.* Lorsqu'un cercle mobile roule, sans glisser, sur un cercle fixe, un point du cercle mobile décrit dans le plan une courbe à laquelle on a donné le nom d'*épicycloïde*.

Bornons-nous au cas où les deux cercles sont égaux. Soit C le cercle fixe, C′ la position initiale du cercle mobile, $a$ le rayon; supposons que ce soit le point de contact A qui, dans le mouvement du cercle C′, engendre l'épicycloïde (fig. 246). Lorsque le cercle mobile est venu dans la position C″, le point A est en M, les deux arcs EA, EM étant égaux. Prenons le point A pour pôle, le prolongement de CA pour axe polaire : la droite AM, perpendiculaire à la tangente commune EN aux deux cercles, est parallèle à CE; l'angle AEN est la moitié de ACE, et, par conséquent, la moitié de $\omega$; le triangle rectangle ANE donne $AN = AE \sin\frac{\omega}{2}$; mais $AE = 2a\sin\frac{\omega}{2}$; on a donc

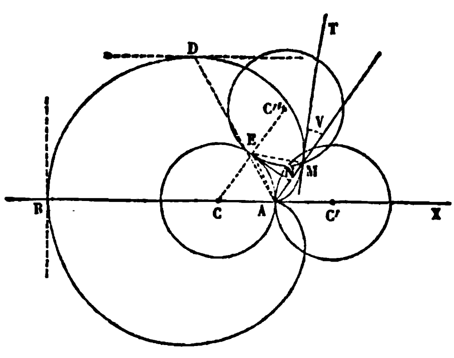


Fig. 246.

$$\rho = 4a\sin^2\frac{\omega}{2} = 2a(1-\cos\omega).$$

Cette courbe est un cas particulier du limaçon de Pascal (n° 26). On a ici $\rho' = 2a\sin\omega$, d'où $\operatorname{tang} V = \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$, et, par suite, $V = \frac{\omega}{2}$. Il est aisé de voir que la normale à l'épicycloïde en un point quelconque M passe au point de contact E du cercle mobile avec le cercle fixe; car l'angle MEN étant égal à $\frac{\omega}{2}$, et par suite à V, la droite EM est perpendiculaire à MT.

**379.** Exemple IV. *Construction de la courbe* $\rho = 4 + \cos 5\omega$.

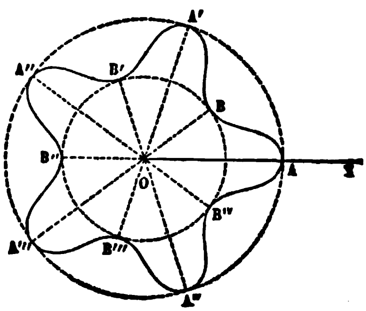



Fig. 247.

Le rayon vecteur $\rho$ reste toujours compris entre 3 et 5; décrivons du pôle comme centre deux cercles avec les rayons 3 et 5, la courbe sera tout entière située entre les deux circonférences (fig. 247). Quand $\omega$ varie de o à $\frac{\pi}{5}$, $\rho$ diminue de 5 à 3, ce qui donne l'arc AB. Quand $\omega$ varie de $\frac{\pi}{5}$ à $\frac{2\pi}{5}$, $\rho$ augmente de 3 à 5, ce qui donne l'arc BA' symétrique du premier par rapport à la ligne OB. L'angle $5\omega$ a varié de la sorte de o à $2\pi$. Si l'on fait varier $\omega$ de $\frac{2\pi}{5}$ à $\frac{4\pi}{5}$, l'angle $5\omega$ variera de $2\pi$ à $4\pi$ et les mêmes valeurs de $\rho$ se reproduiront dans le même ordre; on obtiendra donc un second arc A'B'A'' égal au premier, puis un troisième, et ainsi de suite. Après le cinquième arc, on reviendra au point de départ. En prenant la dérivée, on trouve $\operatorname{tang} V = -\frac{\rho}{5 \sin 5\omega}$. Aux points A et B on a $\sin 5\omega = 0$, et, par suite, $V = \frac{\pi}{2}$.

**380.** Exemple V. **Les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires OX, OY; d'un point fixe I, situé sur la bissectrice, on abaisse une perpendiculaire sur la droite mobile; trouver le lieu du pied de cette perpendiculaire (fig. 248).**

Il est évident que le lieu sera symétrique par rapport à la bissectrice OI. Plaçons d'abord la droite mobile dans la position PQ perpendiculaire à la bissectrice, on a le point A du lieu. Faisons glisser la droite de manière que l'extrémité Q descende sur l'axe des $y$; dans une certaine position P'Q' la droite passera par le point I, qui appartient au lieu; on a ainsi l'arc AEI, dont la tangente en I est perpendiculaire à P'Q'. L'extrémité Q' continuant à descendre, la droite vient s'appliquer sur OX, et l'on a l'arc IFC qui passe au point C, pied de la perpendiculaire abaissée du point I sur OX. L'extrémité Q glisse ensuite sur OY', et la courbe passe au-dessous de OX; la droite arrive dans une position P''Q'' telle que l'angle IP''Q'' est droit, ce qui donne le point P'' du lieu; on a ainsi l'arc CGP''. Si l'extrémité Q'' continue à descendre, la courbe revient au-dessus de OX; bientôt, dans la position P'''Q''', la droite prolongée passe en I; on a ainsi l'arc P''I dont la tangente en I est perpendiculaire à P'''Q'''. L'extrémité P''' continuant

à se rapprocher du point O, la droite s'applique sur OY′ et l'on obtient l'arc IHD, qui passe par le point D, pied de la perpendiculaire

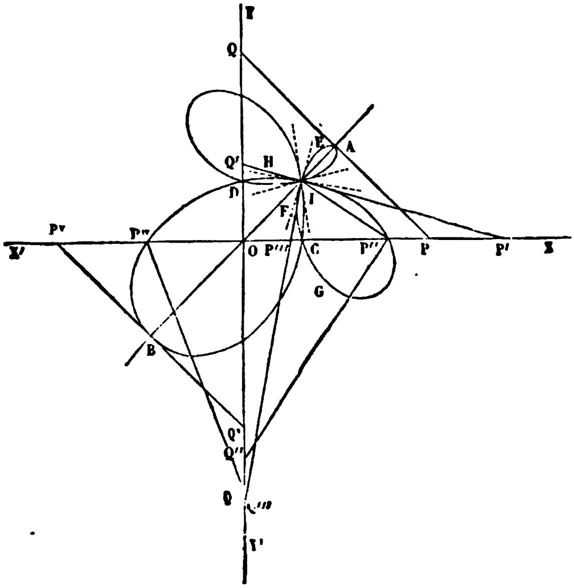



Fig. 248.

abaissée du point I sur OY. L'extrémité $P^{iv}$ glisse ensuite sur OX′, et la droite arrive dans une position $P^{iv}Q^{iv}$, telle que l'angle $IP^{iv}Q^{iv}$ est droit; le point $P^{iv}$ appartient au lieu, et l'on a l'arc $DP^{iv}$. Enfin la droite, dans la position $Q^{v}P^{v}$, devient perpendiculaire à la bissectrice OB, ce qui donne l'arc $P^{iv}B$. Si, revenant à la position primitive PQ, on fait mouvoir la droite en sens inverse jusqu'à la position finale $P^{v}Q^{v}$, il est clair qu'on obtiendra une courbe symétrique de la précédente par rapport à la droite AB.

Prenons pour pôle le point I et pour axe polaire la bissectrice BA; appelons $c$ la distance OI et $2a$ la longueur de la droite mobile PQ; la droite qui joint le point O au milieu de l'hypoténuse PQ du triangle rectangle POQ est égale à $a$; l'angle que cette droite fait avec la perpendiculaire $h$ abaissée du point O sur l'hypoténuse est égal à $2\omega$; on a d'ailleurs $h = c\cos\omega + \rho$; on en déduit l'équation de la courbe $\rho = a\cos 2\omega - c\cos\omega$.

## CONCAVITÉ ET CONVEXITÉ.

**381.** Considérons sur un arc de courbe un point M, ayant pour coordonnées $\omega_0$ et $\rho_0$; la tangente en ce point sera repré-

sentée par l'équation $r=\frac{q}{\cos(\omega-\beta)}$, si l'on appelle $q$ la longueur de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la tangente et $\beta$ l'angle que fait cette perpendiculaire avec l'axe polaire (n° 82). La position de la courbe par rapport à la tangente, dans le voisinage du point M, dépend du signe de la différence $r-\rho$ des rayons vecteurs pour une même valeur de $\omega$, ou de la différence $\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}$, nous supposerons les rayons vecteurs positifs. Appellons $z$ cette dernière différence; la valeur de $z$ est évidemment nulle au point M; sa première dérivée

$$z'=\left(\frac{1}{\rho}\right)'-\left(\frac{1}{r}\right)'=\left(\frac{1}{\rho}\right)'+\frac{\sin(\omega-\beta)}{q}$$

est aussi nulle; car on a, au point M (n° 375),

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'=-\frac{\rho'}{\rho^2}=-\frac{\cot V}{\rho_0},\ \sin(\omega_0-\beta)=\cos V,\ q=\rho_0\sin V.$$

La seconde dérivée,

$$z''=\left(\frac{1}{\rho}\right)''+\frac{\cos(\omega-\beta)}{q}=\left(\frac{1}{\rho}\right)''+\frac{1}{r},$$

acquiert au point M une valeur égale à celle de l'expression $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$. En répétant ici le raisonnement du n° 344, on verra que, si cette quantité est positive, la différence $z$ est elle-même positive dans le voisinage du point M, et par conséquent la courbe est placée du côté de la tangente où est le pôle, et que, si au contraire cette quantité est négative, la différence $z$ est négative, et la courbe placée de l'autre côté de la tangente.

Si le rayon vecteur $\rho$ est négatif, on voit, par des considérations identiques, que la courbe est placée, par rapport à la tangente, du côté du pôle quand la quantité $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$ est négative, et de l'autre côté si cette quantité est positive.

En résumant les deux cas, on peut dire que, *en un point* M, *la courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers le pôle suivant que le produit*

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''\right]$$

*est positif ou négatif en ce point.*

Il y a inflexion, quand la quantité $\frac{1}{\rho}+\left(\frac{1}{\rho}\right)''$ change de signe.

**ASYMPTOTES.**

**382.** Considérons une branche infinie, asymptote à la droite CD (fig. 249); si l'on joint le pôle à un point M de la courbe, et si l'on suppose que le point M s'éloigne indéfiniment sur la courbe, la direction OM aura pour limite une parallèle OL à l'asymptote. Ainsi, *lorsque le rayon vecteur* $\rho$ *devient infini pour une valeur particulière* $\alpha$ *de* $\omega$, *si la branche ainsi obtenue a une asymptote, cette asymptote est parallèle à la direction déterminée par l'angle* $\alpha$ *qui rend* $\rho$ *infini.*

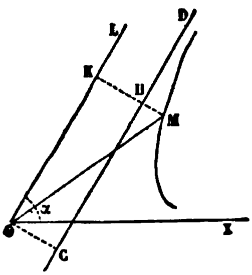



Fig. 249.

Pour avoir la distance OC de l'asymptote à la droite OL, du point M de la courbe abaissons une perpendiculaire MK sur cette droite; le triangle MOK donne

$$MK = OM \sin KOM = \pm \rho \sin(\alpha - \omega).$$

Si le produit $\pm \rho \sin(\alpha - \omega)$ ne tend vers aucune limite, la branche infinie n'a pas d'asymptote. Si, au contraire, ce produit tend vers une limite finie, la branche de courbe admet pour asymptote la droite CD, située à une distance OC du rayon OL égale à cette limite; car la distance MK ayant pour limite OC, la distance MH aura pour limite zéro.

Voici une autre démonstration. Consevons que la branche de courbe infinie soit rapportée à deux axes rectangulaires menés par le pôle, l'un $Oy'$ dans la direction $\alpha$, l'autre $Ox'$ dans la direction $\alpha - \frac{\pi}{2}$. Si l'on prend $Ox'$ pour nouvel axe polaire, on aura $\omega' = \omega - \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, et l'abscisse $x'$ d'un point M sera, dans tous les cas (n° 373),

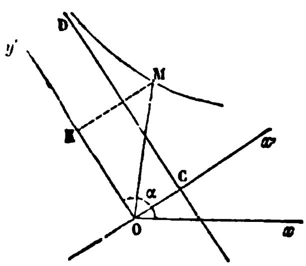



Fig. 250.

$$x' = \rho \cos \omega' = \rho \cos\left(\omega - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \rho \sin(\alpha - \omega).$$

On est ramené ainsi à la recherche d'une asymptote parallèle à l'axe $Oy'$. L'abscisse $q$ de l'asymptote est la limite de $x'$, quand le point M s'éloigne à l'infini sur la branche de courbe; on a donc

$$q = \lim \rho \sin(\alpha - \omega).$$

La valeur absolue de $q$ donne la distance de l'asymptote à la droite $Oy'$; le signe indique de quel côté elle est placée.

**383.** Exemple VI. *Hyperbole.* L'équation polaire de cette courbe est (n° 263) $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$, dans laquelle $e$ est plus grand que 1. Soit $\alpha$ l'angle dont le cosinus est $-\frac{1}{e}$; quand $\omega$ croît de 0 à $\alpha$, $\rho$ croît de $\frac{p}{1+e}$ à $\infty$, et l'on a la branche infinie AE; $\omega$ variant de $\alpha$ à $\pi$, $\rho$ devient négatif et varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{e-1}$, ce qui donne la branche infinie E'A'. Les valeurs de $\omega$ comprises entre $\pi$ et $2\pi$ donnent deux branches symétriques des précédentes par rapport à l'axe polaire.

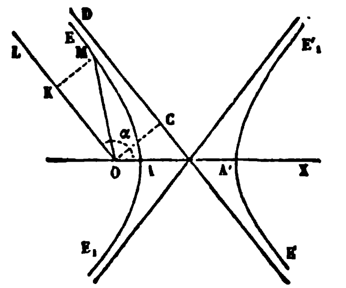


Fig. 251.

La distance MK d'un point de l'une des branches AE, A'E' à la droite OL est

$$MK = \frac{p \sin(\alpha - \omega)}{1 + e\cos\omega} = \frac{p\sin(\alpha - \omega)}{e\left(\frac{1}{e} + \cos\omega\right)} = \frac{p\sin(\alpha - \omega)}{e(\cos\omega - \cos\alpha)}.$$

Transformant en un produit la différence $\cos\omega - \cos\alpha$, remplaçant $\sin(\alpha - \omega)$ par $2\sin\frac{\alpha-\omega}{2}\cos\frac{\alpha-\omega}{2}$, et supprimant le facteur commun $\sin\frac{\alpha-\omega}{2}$, on a

$$MK = \frac{p\cos\frac{\alpha-\omega}{2}}{e\sin\frac{\alpha+\omega}{2}}.$$

Cette distance a pour limite $OC = \frac{p}{e\sin\alpha}$, et l'on obtient ainsi l'asymptote CD. L'asymptote des deux autres branches est placée symétriquement par rapport à l'axe polaire.

L'excès de la distance MK sur sa limite a pour expression

$$\delta = \frac{p}{e}\left(\frac{\cos\frac{\alpha-\omega}{2}}{\sin\frac{\alpha+\omega}{2}} - \frac{1}{\sin\alpha}\right) = \frac{p}{e} \times \frac{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\omega}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\omega}{2}}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\omega}{2}};$$

si l'on remplace le produit $2\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\omega}{2}$ par la somme

$$\sin\frac{3\alpha-\omega}{2} + \sin\frac{\alpha+\omega}{2},$$

il vient

$$\delta = \frac{p}{e} \times \frac{\sin\frac{3\alpha-\omega}{2} - \sin\frac{\alpha+\omega}{2}}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\omega}{2}};$$

si l'on transforme ensuite le numérateur en un produit, on a finalement

$$\delta = \frac{p\sin\frac{\alpha-\omega}{2}\cos\alpha}{e\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\omega}{2}} = \frac{p\sin\frac{\omega-\alpha}{2}}{e^2\sin\alpha\sin\frac{\omega+\alpha}{2}}.$$

Quand $\omega$ varie de o à $\alpha$, la différence $\delta$ est négative; ainsi la branche AE est comprise entre les parallèles OL et CD. Mais, quand $\omega$ varie de $\alpha$ à $\pi$, la différence $\delta$ est positive, et la branche E'A' est située en dehors des parallèles.

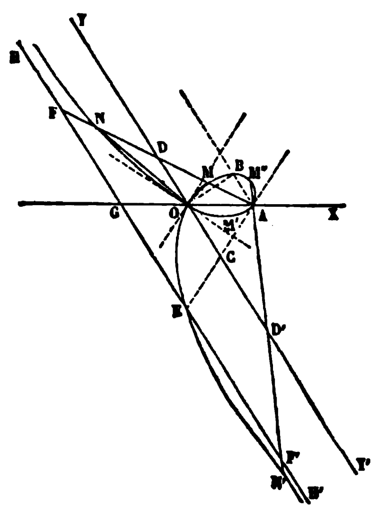


Fig. 252.

**384.** Exemple VII. *Strophoïde oblique.* Dans la construction de la strophoïde droite, telle que nous l'avons donnée au n° 23, nous supposions les droites OX et OY rectangulaires; supposons maintenant que ces droites fassent entre elles un angle $\theta$ (fig. 252); par le point fixe A placé sur l'une d'elles, on mène une sécante quelconque AD, sur laquelle on prend, à partir du point D, des longueurs DM et DN égales à DO, et on cherche le lieu des points M et N.

Quand la sécante tourne dans l'angle obtus XOY jusqu'à devenir parallèle à OY, le point M décrit l'arc OMB, terminé au point B sur la perpendiculaire OB à OY; le point N décrit la branche infinie ON. Si

l'on prend une distance OG égale à OA, et que par le point G on mène une parallèle H'H à OY, on a l'asymptote de la branche ON; car l'oblique NF égale à AM, ayant pour limite AB, la distance du point N à la droite a pour limite zéro.

Faisons maintenant tourner la sécante dans l'angle aigu XOY'; la perpendiculaire élevée sur le milieu de OA coupe OY' en un point C, tel que l'on a CA = CO; quand la sécante occupe la position AC, l'un des points vient en A et l'autre en E; ainsi, la sécante tournant de la position AO à la position AC, on a l'arc OM'A tangent en A à la droite AC, et l'arc OE. La sécante continuant son mouvement, la droite OD' devient plus grande que AD' ou que D'F', et le point N' est situé au delà de l'asymptote; on obtient la branche infinie EN' et l'arc AM''B qui se raccorde en B avec l'arc OMB. Il est aisé de voir que les tangentes au point O sont les bissectrices des angles formés par les droites OX et OY.

Si l'on prend le point O pour pôle, la droite OX pour axe polaire, que l'on appelle $a$ la distance OA et $\theta$ l'angle YOX, les angles DOM et DMO étant égaux à $\theta - \omega$, et l'angle OAD à $\theta - 2\omega$, le triangle OMA donne la relation

$$(1) \qquad \rho = \frac{a \sin(\theta - 2\omega)}{\sin(\theta - \omega)}$$

On retrouve facilement, à l'aide de l'équation, les propriétés que nous avons déduites de la définition géométrique de la courbe.

Quand on prend la droite OY pour axe polaire, l'équation de la courbe devient

$$(2) \qquad \rho = \frac{a \sin(2\omega + \theta)}{\sin \omega}$$

385. Exemple VIII. *Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné* P *aux diverses courbes du second degré ayant pour foyers deux points donnés* F *et* F'.

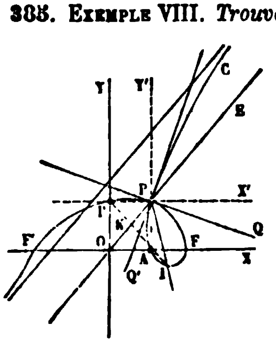


Fig. 253.

Prenons pour axe la droite F'F (fig. 253), et la perpendiculaire élevée à cette droite en son milieu; l'équation générale des coniques ayant pour foyers les points F et F' est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

$c$ désignant la distance OF et $a$ un paramètre variable; lorsque $a$ est plus grand que $c$, la courbe est une ellipse; lorsque $a$ est plus petit que $c$, c'est une hyperbole. Soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point donné P; l'équation de

la corde des contacts des tangentes menées du point P à la conique (1) est

$$(2)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{a^2-c^2}=1.$$

On obtient l'équation du lieu en éliminant le paramètre $a$ entre les équations (1) et (2). Si l'on retranche ces équations membre à membre, il vient

$$\frac{x^2-\alpha x}{a^2}+\frac{y^2-\beta y}{a^2-c^2}=0,$$

d'où $a^2=\dfrac{c^2(x^2-\alpha x)}{x^2+y^2-\alpha x-\beta y}$, $\quad a^2-c^2=\dfrac{-c^2(y^2-\beta y)}{x^2+y^2-\alpha x-\beta y}$;

en substituant dans l'équation (2), on obtient l'équation du lieu

$$(3)\qquad (x^2+y^2-\alpha x-\beta y)(\beta x-\alpha y)+c^2(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

Le lieu est du troisième degré, il passe par le point donné P, par les foyers F et F', et par les projections du point P sur les droites OX, OY.

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point P, l'équation du lieu devient

$$(4)\qquad (x^2+y^2+\alpha x+\beta y)(\beta x-\alpha y)+c^2xy=0.$$

Si l'on transforme celle-ci en coordonnées polaires, en prenant pour pôle le point P et pour axe polaire la droite PX', on a

$$(5)\qquad \rho=\frac{(c^2+\beta^2-\alpha^2)\sin 2\omega+2\alpha\beta\cos 2\omega}{2(\alpha\sin\omega-\beta\cos\omega)}.$$

A l'aide des angles auxiliaires $\varphi$ et $\varphi_1$, déterminés par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\beta}{\alpha},\qquad \operatorname{tang}\varphi_1=\frac{2\alpha\beta}{c^2+\beta^2-\alpha^2},$$

cette équation prend la forme

$$(6)\qquad \rho=\frac{d\sin(2\omega+\varphi_1)}{\sin(\omega-\varphi)},$$

la lettre $d$ désignant la quantité

$$d=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c^2+\beta^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Si l'on fait tourner l'axe polaire de l'angle $\varphi$, l'équation (6) devient identique à l'équation (2) de la strophoïde oblique (n° 384). L'angle $\varphi$ étant égal à POA, l'asymptote est parallèle à la droite OP. Parmi les courbes homofocales considérées se trouvent une hyperbole et une ellipse passant par le point P; on en conclut que le point P appartient au lieu et que les tangentes en ce point sont les bissectrices PQ, PQ' des angles formés par les droites PF et PF'. La strophoïde est définie

par deux droites PE, PI et un point I sur l'une d'elles. Nous connaissons la droite PE; on obtiendra la droite PI en remarquant que la tangente PQ est bissectrice de l'angle EPI; on obtiendra le point I à l'aide de l'un des points du lieu, par exemple du point A; la droite IA doit être telle que l'on ait KA = KP; le point K est donc le point milieu de la diagonale OP.

La courbe précédente est aussi le lieu des pieds des normales menées du point P aux courbes du second degré qui ont pour foyers les points F et F'; car une ellipse et une hyperbole homofocales se coupant à angle droit, la tangente à l'une est normale à l'autre.

**386.** Exemple IX. *Construire la courbe donnée par l'équation*

$$\rho = a\frac{2\omega}{2\omega - 1}.$$

La valeur de $\rho$ s'annule pour $\omega = 0$, et devient infinie pour $\omega = \frac{1}{2}$; menons par le pôle la droite L'L, qui fait avec l'axe polaire l'angle $\frac{1}{2}$ (fig. 254). Lorsque $\omega$ varie de 0 à $\frac{1}{2}$, $\rho$ est négatif et varie de 0 à $-\infty$; on a une branche infinie OA'B', tangente à l'axe polaire et comprise dans l'angle X'OL'. Quand $\omega$

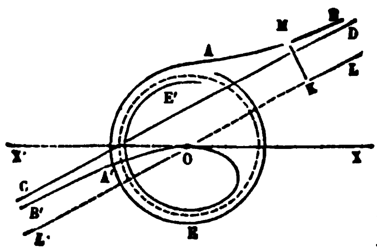


Fig. 254.

dépasse $\frac{1}{2}$ et croît de $\frac{1}{2}$ à $\infty$, $\rho$ devient positif et décroît de $\infty$ à $a$; on obtient une branche infinie BA qui fait une infinité de circonvolutions autour du cercle décrit du pôle comme centre, avec $a$ pour rayon, en se rapprochant constamment du cercle. Quand $\omega$ varie de 0 à $-\infty$, $\rho$ reste positif et va en croissant de 0 à $a$, ce qui donne la branche OE' intérieure au cercle; cette branche fait une infinité de circonvolutions en se rapprochant aussi constamment du cercle.

Considérons les branches infinies A'B', AB; l'abscisse d'un point de l'une d'elles, par rapport aux axes indiqués au n° 382, est

$$x' = \rho \sin\left(\frac{1}{2} - \omega\right) = -a\omega\frac{\sin\left(\omega - \frac{1}{2}\right)}{\omega - \frac{1}{2}};$$

sa limite est $-\frac{a}{2}$; les deux branches ont donc pour asymptote la droite CD, dont l'abscisse est $q = -\frac{a}{2}$.

Si l'on pose $\omega = \frac{1}{2} + \omega'$, on a

$$\delta = x' - q = \frac{a}{2\omega'}[\omega' - (1 + 2\omega')\sin\omega'].$$

La quantité placée entre parenthèses s'annule pour $\omega = 0$; sa dérivée première s'annule aussi, mais sa dérivée seconde est négative; si l'on fait croître $\omega'$ à partir de zéro, on en conclut que la dérivée première commence par décroître, et, par suite, est négative, et de même la quantité elle-même; ainsi la différence $\delta$ est négative pour les valeurs positives de $\omega'$ suffisamment petites. On reconnaît de la même manière que la différence $\delta$ est positive pour les valeurs négatives très-petites de $\omega'$, ce qu'on voit d'ailleurs directement; ainsi les deux branches infinies sont situées par rapport à l'asymptote, comme l'indique la figure. Il est évident, en outre, que cette asymptote est coupée par la courbe en un nombre infini de points.

**387.** Exemple X. *Construire la courbe*

$$\rho = 1 \pm \sqrt{\frac{2\sin\omega - 1}{\sin\omega}}.$$

Le rayon vecteur reprenant la même valeur quand $\omega$ augmente de $2\pi$, il suffit de faire varier $\omega$ de $0$ à $2\pi$. Pour que le rayon vecteur soit réel, il faut que la fraction placée sous le radical soit positive. Le numérateur change de signe pour les valeurs $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ attribuées à $\omega$, le dénominateur pour les valeurs $0$ et $\pi$; en rangeant ces angles par ordre de grandeur

$$0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \pi, \quad 2\pi,$$

on voit que la quantité placée sous le radical est négative de $0$ à $\frac{\pi}{6}$, positive de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$, négative de $\frac{5\pi}{6}$ à $\pi$, positive de $\pi$ à $2\pi$; on obtiendra donc toute la courbe, en faisant varier $\omega$ de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{5\pi}{6}$, et de $\pi$ à $2\pi$. On remarque d'ailleurs que, les valeurs supplémentaires de $\omega$ reproduisant les mêmes valeurs de $\rho$, la courbe est symétrique par rapport à la perpendiculaire OY à l'axe polaire OX (fig. 255).

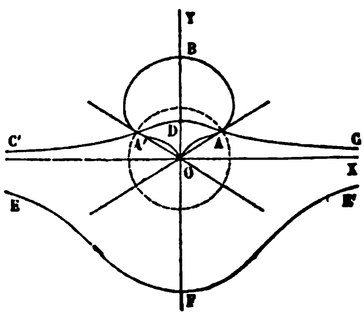


Fig. 255.

Du pôle comme centre, avec un rayon égal à l'unité, décrivons un cercle : ce cercle divisera en deux parties égales chacune des cordes qui

passent par le centre; quand $\omega$ varie de $\frac{\pi}{6}$ à $\frac{\pi}{2}$, la valeur du radical croît de o à 1, ce qui donne les deux arcs AB et AO, qui se raccordent au point A, tangentiellement à la droite OA; l'arc AO est tangent au point O à la droite OY. En faisant varier $\omega$ de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{5\pi}{6}$, on obtiendra l'arc BA'O, symétrique de BAO, par rapport à la droite OY.

Quand $\omega$ varie de $\pi$ à $\frac{3\pi}{2}$, la valeur du radical décroît de $\infty$ à $\sqrt{3}$, ce qui donne les deux branches infinies EF et CD; en faisant varier $\omega$ de $\frac{3\pi}{2}$ à $2\pi$, on obtiendra les deux branches FE', DC', symétriques des précédentes; ces branches infinies sont asymptotes à l'axe polaire.

388. Remarque. Nous avons vu (n° 382) que lorsque le rayon vecteur devient infini pour une valeur finie $\alpha$ de $\omega$, la position de l'asymptote est déterminée par la formule

$$q = \lim \rho \sin(\alpha - \omega).$$

Le premier facteur devient infini, le second tend vers *zéro*. Dans les exemples précédents, on a pu découvrir sans peine ce que devient le produit pour des valeurs de $\omega$ voisines de $\alpha$. Quand la difficulté est plus grande, on a recours à une autre méthode.

De la formule précédente on déduit

$$\frac{1}{q} = -\lim \frac{\omega - \alpha}{\sin(\omega - \alpha)} \times \frac{\frac{1}{\rho}}{\omega - \alpha}.$$

La limite du premier rapport est égale à l'unité. Si l'on considère $\frac{1}{\rho}$ comme une fonction de $\omega$, le numérateur du second rapport est l'accroissement qu'éprouve cette fonction quand l'angle polaire passe de la valeur $\alpha$ à la valeur $\omega$; la limite de ce second rapport est donc la dérivée de $\frac{1}{\rho}$, et l'on a

$$\frac{1}{q} = -\left(\frac{1}{\rho}\right)' \text{ pour } \omega = \alpha.$$

Ordinairement la valeur de $\rho$ se présente sous la forme

$\rho = \frac{F(\omega)}{f(\omega)}$, le dénominateur s'annulant pour $\omega = \alpha$, tandis que le numérateur conserve une valeur finie différente de zéro. On en déduit la dérivée

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{F(\omega) f'(\omega) - f(\omega) F'(\omega)}{F^2(\omega)},$$

qui se réduit à $\frac{f'(\alpha)}{F(\alpha)}$ pour $\omega = \alpha$. On arrive ainsi à la formule

$$q = -\frac{F(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

qui est très-commode dans la pratique.

## EXERCICES.

1° Trouver le lieu du sommet d'une parabole variable qui a un foyer fixe et qui touche une conique qui admet le même foyer (limaçon de Pascal).

2° Le sommet O d'un triangle variable AOB est fixe, le sommet B glisse sur une droite OX; on demande le lieu décrit par le point de rencontre de AB avec la perpendiculaire élevée au point O au côté OA.

3° On donne un point fixe O et une droite fixe OP; on demande le lieu du sommet M d'un triangle variable MON qui remplit les conditions suivantes: le côté ON a une longueur constante $a$, le côté $NM = a\sqrt{2}$, enfin les angles vérifient la relation $\cos(MON - 2OMN) = \cos MOP$ (lemniscate); démontrer que la tangente en un point quelconque M du lieu passe au centre du cercle circonscrit au triangle qui a donné ce point.

4° Étant donné un triangle AOB rectangle en O, on circonscrit à ce triangle une conique variable telle que les normales aux trois points A, O, B passent par un même point; on demande le lieu de ce point.

5° Trouver le lieu des foyers des paraboles qui ont une corde commune et une tangente commune parallèle à cette corde.

6° Trouver le lieu des sommets ou des foyers d'une hyperbole équilatère, dont le centre est fixe et qui passe en un point fixe.

7° Trouver le lieu du centre d'une hyperbole équilatère donnée, assujettie à passer par deux points fixes.

8° On donne un angle droit YOX, et un point fixe P sur la bissectrice de cet angle; on demande le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point P sur une sécante variable qui intercepte dans l'angle un triangle dont l'aire est constante.

9° En un point quelconque M d'une parabole on mène la normale que l'on prolonge jusqu'au point N où elle rencontre l'axe; on demande

le lieu du point de rencontre de la tangente en M à la courbe avec la perpendiculaire à l'axe au point N.

10° On remplace la parabole du problème précédent par une hyperbole; on prend le point N sur l'un des deux axes de la courbe; trouver le lieu.

11° Une parabole tourne autour de son foyer; on demande le lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à une droite donnée.

12° Trouver le lieu du point milieu d'une corde normale à une hyperbole donnée.

13° Étant donnée une ellipse, le centre d'un cercle de rayon constant parcourt un diamètre de l'ellipse; trouver le lieu des points de concours des sécantes communes au cercle et à l'ellipse.

14° Étant donnée une hyperbole équilatère, le centre d'un cercle, qui passe constamment par le centre de l'hyperbole, décrit une asymptote; trouver le lieu des points de concours des sécantes communes.

15° Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux cercles qui touchent une droite donnée en un point donné.

16° Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné aux cercles qui passent par un point donné et qui touchent une droite donnée.

17° Trouver le lieu des milieux des cordes inscrites dans une hyperbole donnée et tangentes à un cercle concentrique à l'hyperbole.

18° Construire les lieux représentés par les équations

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0, \quad x^4 + y^4 - 2a^3y - 2b^2xy = 0,$$
$$(x^2+y^2)^2 - 6axy^2 - 2ax^3 + 2a^2x^2 = 0, \quad y = a + b(x-c)^m,$$
$$x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0, \quad x^3y^3 + y - x = 0,$$
$$y^4 - x^4 - 2bxy^2 - 2ax^3 = 0, \quad y^4 - x^4 - 3x^2y^2 - 2x = 0,$$
$$y^4 - x^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0, \quad 2x^3 - y^3 + (y-x)^2 = 0.$$

19° Construire les courbes représentées par les équations

$$2\sin y - \sin x = 0, \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{e^x}{x}, \quad y = x^x, \quad x^y = y^x.$$

20° Construire les courbes représentées par les équations

$$\rho = \frac{\sin\omega}{2\cos\omega - 1}, \quad \rho = 1 \pm \sqrt{\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}},$$
$$\rho^2\cos\omega - 2\rho\sin\omega + \cos^2\omega = 0, \quad \rho^2\cos\omega - 4\rho\sin\omega - \tan\omega = 0,$$
$$\rho = \cos\omega \pm \sqrt{\frac{1 - 2\cos\omega}{\sin\omega}}.$$

23° Une conique variable circonscrite à un triangle ABC est telle que les normales à la conique aux points ABC concourent en un point M. Lieu géométrique de ce point M.

24° Une conique variable inscrite dans un triangle ABC est telle que les normales à la conique aux points où elle touche les côtés concourent en un point N. Lieu géométrique de ce point N.

(Ce lieu est le même que le précédent.)

25° Lieu des points de concours des tangentes communes à une conique fixe S et à une conique variable passant par quatre points fixes ABCD.

*a*) Les points ABCD étant quelconques, le lieu est une courbe du sixième ordre ayant pour points doubles les centres des couples de droites passant par les quatre points.

*b*) Si deux des points, A et B par exemple, sont sur la conique fixe S le lieu se décompose en une conique et une courbe du quatrième ordre.

*c*) Si trois des points, A, B, C par exemple, sont sur S, le lieu se compose de trois coniques.

*d*) Si les quatre points A, B, C, D sont sur S, le lieu se compose de droites.

26° Lieu des points de contact des tangentes communes à une conique fixe S et à une conique variable passant par quatre points fixes A, B, C, D.

On examinera, comme dans l'exercice précédent, les réductions qui se présentent quand un certain nombre de côtés ou de diagonales du quadrilatère ABCD touchent la conique fixe S.

21° Construire la courbe définie par l'équation

$$y = x \sin \frac{1}{x}.$$

Cette courbe, qui passe à l'origine, n'admet pas de tangente en ce point.

22° Enveloppe des droites telles que les segments déterminés sur elles par deux coniques fixes aient le même milieu. — Examiner le cas où les deux coniques ont en commun un diamètre conjugué d'une même direction de cordes.

23° La droite ayant pour équation en coordonnées rectangulaires

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = a \cos k\alpha,$$

a pour enveloppe, quand $\alpha$ varie, $a$ et $k$ restant constants, une hypocycloïde ou une épicycloïde (n° 378). Trouver le lieu des points d'où on peut mener à la courbe enveloppe des tangentes rectangulaires. Examiner les cas particuliers $k = 2$, $k = 3$.

# CHAPITRE V

## De la similitude.

389. Nous rappellerons d'abord la définition de deux figures homothétiques.

Soit un système quelconque de points A, B, C,... (fig. 256), situés dans un plan; ces points pouvant être isolés les uns des autres ou former des lignes continues, d'un point O, pris arbitrairement dans le plan, menons aux différents points du système des rayons OA, OB, OC, ... et prenons sur ces rayons des points A', B', C',... tels que l'on ait

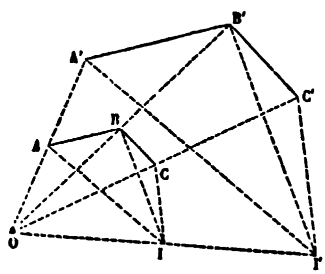



Fig. 256.

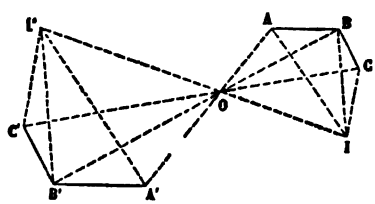



Fig. 257.

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \ldots k;$$

le système des points ainsi obtenus est dit *semblable* au système proposé et *semblablement placé*.

Si les points A', B', C',... étaient pris sur les prolongements des rayons vecteurs en sens inverse, les deux systèmes seraient *semblables* et *inversement placés*. Par une rotation de 180 degrés autour du point O, le second système coïncidera avec un des systèmes semblables et semblablement placés (fig. 257).

Pour abréger le langage, M. Chasles a désigné cette similitude de forme et de position par le nom d'*homothétie*, *directe* dans le premier cas, *inverse* dans le second. Le point O est dit *centre de similitude* ou d'*homothétie* des deux systèmes, le nombre $k$ est le *rapport de similitude*, et on appelle points homo-

logues les points A et A′ placés sur un même rayon. Si l'on fait varier le rapport $k$ de o à $\infty$ et aussi la position du centre O de similitude, on obtient tous les systèmes homothétiques au système proposé.

Un système est *semblable* à un système donné, lorsqu'il est égal à l'un des systèmes homothétiques au système donné.

**390.** On sait que l'on obtient toutes les courbes homothétiques à une courbe donnée S avec un seul centre de similitude O, pris à volonté dans son plan. Considérons maintenant quelques exemples.

1° La courbe S est un cercle. Si l'on prend le centre du cercle pour centre de similitude, la seconde courbe sera un cercle, dont le rayon pourra avoir telle grandeur que l'on voudra.

2° La courbe S est une parabole (fig. 258). La courbe étant rapportée à son axe et à la tangente au sommet, les coordonnées $x$ et $y$ d'un point quelconque M de cette courbe vérifient l'équation $y^2 = 2px$. Si l'on prend le sommet pour centre de similitude et que l'on appelle $x'$ et $y'$ les coordonnées du point homothétique M′, on aura $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{OM}{OM'} = k$, d'où $x = kx'$, $y = ky'$; la courbe homothétique est représentée par l'équation $y'^2 = \frac{2p}{k} x'$; c'est une parabole, dont le paramètre peut avoir telle grandeur que l'on voudra, à cause du rapport arbitraire $k$; on en conclut que *deux paraboles quelconques sont semblables.*

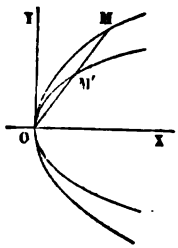


Fig. 258.

3° La courbe S est l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Si l'on prend le centre de la courbe pour centre de similitude, la courbe homothétique, représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{k^2}$$

est une ellipse, dont les axes peuvent avoir des valeurs quelconques proportionnelles à celles des axes de la première ellipse. On en conclut que *deux ellipses sont semblables lorsque leurs axes sont proportionnels.*

Le même théorème a lieu pour l'hyperbole.

4° La courbe S est la spirale logarithmique $\rho = ae^{m\omega}$. Quand on prend le pôle pour centre de similitude, les courbes homothétiques ont pour équation $\rho = \frac{ae^{m\omega}}{k}$. Si l'on pose $k = e^{m\alpha}$, cette équation devient $\rho = a^{m(\omega - \alpha)}$; elle représente la spirale proposée, que l'on a fait tourner de l'angle $\alpha$ autour du pôle. Il en résulte que la seule courbe semblable à une spirale logarithmique est cette spirale elle-même; à un point M de la courbe correspond un autre point M′ de la même courbe, et l'on peut prendre ce point M′ à volonté, à cause du nombre arbitraire $k$.

## ÉQUATION DES COURBES HOMOTHÉTIQUES.

**391.** Soit

(1) $$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe S. Prenons l'origine pour centre de similitude et construisons avec le rapport $k$ une courbe S′ homothétique à la première. Si l'on désigne par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque M de la première courbe, par $x'$ et $y'$ celles du point homologue M′ de la seconde, les triangles semblables OPM, OP′M′ donnent

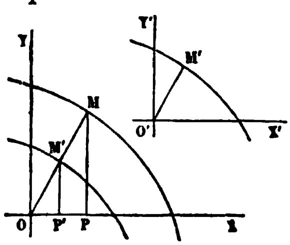


Fig. 159.

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\text{OM}}{\text{OM}'} = k;$$

si l'on substitue dans l'équation (1), on a l'équation

(2) $$f(kx', ky') = 0,$$

qui représente toutes les courbes homothétiques à la courbe proposée et ayant l'origine pour centre d'homothétie. Dans cette équation, on donnera à $k$ une valeur positive lorsque l'homothétie sera directe, une valeur négative lorsque l'homothétie sera inverse.

Laissant fixe la courbe S, transportons la courbe S′ dans le plan, de manière que l'origine O vienne en O′ $(p, q)$, et que les

axes restent parallèles à leurs directions primitives; la courbe S' a pour équation, par rapport aux axes O'X' et O'Y',

$$f(kx', ky') = 0,$$

et, par rapport aux axes fixes OX et OY,

$$(3) \qquad f[k(x-p), k(y-q)] = 0.$$

Dans cette nouvelle position, la courbe S' est homothétique à la courbe S; car les rayons vecteurs menés des points O et O' sont parallèles et dans le rapport constant $k$. L'équation (3) représente donc toutes les courbes homothétiques à la courbe proposée, quelle que soit la position du centre de similitude.

**392.** En même temps que nous transportons l'origine en O', faisons tourner les axes de l'angle $\alpha$; la courbe S' occupera alors une position quelconque dans le plan et sera simplement semblable à la proposée. La courbe S' rapportée aux axes mobiles O'X' et O'Y', a pour équation $f(kx', ky') = 0$; au moyen des formules de transformation,

$$x' = (x-p)\cos\alpha + (y-q)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x-p)\sin\alpha + (y-q)\cos\alpha,$$

les axes étant supposés rectangulaires, on obtient l'équation de la courbe par rapport aux deux axes fixes OX et OY. Cette équation représente toutes les courbes semblables à la proposée.

**393.** Comme application, cherchons les conditions pour que deux courbes du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0,$$

soient homothétiques. L'équation générale des courbes homothétiques à la première courbe est (n° 391)

$$Ak^2x^2 + 2Bk^2xy + Ck^2y^2 - 2(Bk^2q + Ak^2p - Dk)x - 2(Bk^2p + Ck^2q - Ek)y$$
$$+ (Ak^2p^2 + 2Bk^2pq + Ck^2q^2 - 2Dkp - 2Ekq + F) = 0.$$

En identifiant cette équation avec la seconde, on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{-Bq - Ap + \frac{D}{k}}{D'} = \frac{-Bp - Cq + \frac{E}{k}}{E'}$$

$$= \frac{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 - \frac{2D}{k}p - \frac{2E}{k}q + \frac{F}{k^2}}{F'}.$$

L'élimination des trois paramètres $p$, $q$, $k$ entre ces cinq équations, donnera deux équations de condition : or les deux premières équations $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$, ne renfermant pas les paramètres à éliminer, sont précisément les deux équations de condition. Donc, *pour que deux courbes du second degré soient homothétiques, il faut que les coefficients des termes du second degré soient proportionnels.*

**394.** Il reste à examiner si les valeurs des paramètres $p$, $q$, $k$ sont réelles et finies; on évite cette discussion de la manière suivante. Puisque les coefficients des termes du second degré sont proportionnels, on peut les rendre égaux en multipliant tous les termes de l'une des équations par un facteur convenable; prenons donc les deux équations sous la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{4}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0. \tag{5}$$

Nous distinguerons plusieurs cas suivant le signe de la quantité $AC - B^2$.

1° $AC - B^2 = 0$. Les deux lieux sont du genre parabole; si ces lieux sont effectivement deux paraboles, ils sont certainement semblables, puisque toutes les paraboles sont semblables; de plus, les axes des deux courbes, ayant le même coefficient angulaire $-\frac{B}{C}$, sont parallèles, et, par suite, les courbes sont homothétiques.

2° $AC - B^2 > 0$. Les lieux sont du genre ellipse. Si, pour chaque courbe, on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe, les équations (4) et (5) deviennent

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H = 0, \tag{6}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + H' = 0. \tag{7}$$

Les axes des courbes, dont les directions sont déterminées par l'équation $\tang 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$ (n° 141), sont parallèles; si l'on fait tourner les axes des coordonnées de l'angle $\alpha$, les équations

(6) et (7) se réduisent à la forme

$$(8) \qquad A'x^2 + C'y^2 + H = 0,$$

$$(9) \qquad A'x^2 + C'y^2 + H' = 0.$$

Les coefficients A' et C', dont les valeurs sont données par les relations

$$A' + C' = A + C, \quad A' - C' = \pm\sqrt{4B^2 + (A-C)^2},$$

ont le même signe; pour que les équations (8) et (9) représentent deux ellipses réelles, il faut que les quantités H et H' soient également de même signe et que, de plus, ce signe soit contraire au précédent. Lorsque cette condition est remplie, les axes des deux ellipses ayant le même rapport $\sqrt{\frac{C'}{A'}}$, les ellipses sont homothétiques.

3° $AC - B^2 < 0$. Les deux lieux sont du genre hyperbole. En faisant les mêmes transformations que dans le cas précédent, on arrive aux équations (8) et (9), dans lesquelles A' et C' ont des signes contraires. Lorsque les quantités H et H' sont différentes de zéro, chacune des équations représente une hyperbole. Si H et H' ont le même signe, les axes réels des deux courbes sont parallèles, et, comme le rapport des axes est le même, les courbes sont homothétiques. Lorsque H et H' ont des signes contraires, l'une des hyperboles est semblable à la conjuguée de l'autre. Dans les deux cas, les courbes ont leurs asymptotes parallèles.

On conclut de ce qui précède que, lorsque *deux équations du second degré ont les coefficients des termes du second degré proportionnels et représentent deux courbes réelles, ces courbes sont homothétiques; cependant, quand les courbes sont des hyperboles, il peut arriver que l'une soit homothétique à la conjuguée de l'autre.*

### ÉQUATION GÉNÉRALE D'UNE ESPÈCE DE COURBES.

**395.** On appelle *courbes de même espèce* les courbes comprises dans une même définition géométrique, et qui ne diffèrent les unes des autres que par les valeurs attribuées aux paramètres qui entrent dans la définition générale. L'équation générale des courbes de l'espèce considérée

est une équation qui, dans un système de coordonnées, donne toutes ces courbes, quelle que soit leur position dans le plan, quand on attribue diverses valeurs aux paramètres variables qu'elle renferme. Ainsi, lorsque les axes fixes sont rectangulaires, l'équation générale de l'espèce *cercle* est $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Cette équation renferme trois paramètres variables, savoir le rayon $r$ et les deux coordonnées du centre $a$ et $b$.

Souvent on cherche d'abord l'équation de la courbe par rapport à des axes particuliers, que l'on choisit de manière à simplifier le calcul; alors, pour obtenir l'équation générale, on la rapporte à des axes fixes par une transformation de coordonnées.

On a défini la lemniscate le lieu des points tels que le produit des distances de chacun d'eux à deux points F et F' soit égal au carré de la moitié de la droite F'F (fig. 260). Si l'on prend pour origine le milieu O' de la droite F'F, pour axes des coordonnées O'F et une perpendiculaire à O'F, et si l'on désigne par $2c$ la distance F'F, la courbe, rapportée à ces axes particuliers variables, est représentée par l'équation (n° 339)

$$(x'^2+y'^2)^2+2c^2(y'^2-x'^2)=0.$$

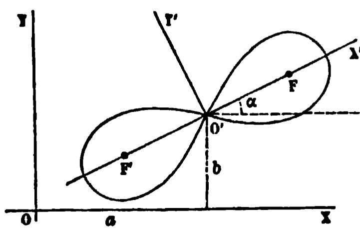


Fig. 260.

On rapporte ensuite la courbe aux axes fixes rectangulaires OX, OY, au moyen des formules de transformation

$$x'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha,$$
$$y'=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha,$$

dans lesquelles $a$ et $b$ désignent les coordonnées du point O' par rapport aux axes fixes et $\alpha$ l'angle de la droite O'F avec OX. On arrivera ainsi à une équation

$$F(x, y, c, a, b, \alpha)=0$$

renfermant quatre paramètres arbitraires, et qui représente toutes les lemniscates; c'est l'équation générale de l'espèce.

L'équation générale d'une espèce de courbes, par rapport à des axes fixes, contient trois paramètres de plus que l'équation des mêmes courbes rapportées à des axes liés aux courbes d'une manière déterminée. Soit $n$ le nombre total des paramètres, on pourra toujours remplacer ce système de paramètres par un autre système, tel que les variations de trois d'entre eux ne fassent que déplacer la courbe dans son plan, tandis que les variations des $n-3$ autres donnent des courbes différentes.

**396.** Le nombre des points, et, en général, le nombre des conditions nécessaires pour déterminer complétement une courbe d'espèce donnée, est égal au nombre des paramètres arbitraires que renferme l'équation

générale de l'espèce. Les remarques faites, à propos des courbes du second degré (n° 283), sur les conditions multiples, sont ici applicables. Toutefois il importe de s'assurer préalablement que les paramètres qui entrent dans l'équation ne peuvent être réduits à un nombre moindre.

Considérons, par exemple, le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes, dont nous désignerons les coordonnées par $(a,b)$, $(a',b')$, soit constant et égal à $k$. Ce lieu, qui a pour équation

$$(1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2-k^2[(x-a')^2+(y-b')^2]=0,$$

est une circonférence de cercle. L'équation (1) renferme cinq paramètres; mais si l'on développe et si l'on ordonne, elle devient

$$(2)\quad x^2+y^2-2\frac{a-k^2a'}{1-k^2}x-2\frac{b-k^2b'}{1-k^2}y+\frac{a^2+b^2-k^2(a'^2+b'^2)}{1-k^2}=0.$$

Trois des coefficients seulement renferment les paramètres; si on les représente par A, B, C, l'équation (2) prend la forme

$$(3)\qquad x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

Trois points suffisent pour déterminer les coefficients A, B, C, et, par conséquent, la circonférence. Si l'on veut ensuite obtenir $a$, $b$, $a'$, $b'$, $k$, on aura un système de trois équations à cinq inconnues; il y aura indétermination, et deux des inconnues pourront être prises à volonté; ceci signifie que, pour une même circonférence, on peut trouver une infinité de couples de deux points tels que le rapport des distances de chacun des points de la circonférence à ces deux points fixes soit constant.

**397.** La définition géométrique d'une espèce de courbes indique elle-même le nombre des paramètres arbitraires que renferme son équation générale. La définition du cercle exige la connaissance du centre, dont la position est déterminée par ses deux coordonnées, et celle du rayon, en tout trois constantes ou paramètres arbitraires. La définition de la lemniscate exige la connaissance de deux points fixes, ce qui fait quatre constantes; pour l'ellipse, comme il faut connaître en outre la somme des rayons vecteurs, la courbe dépend de cinq paramètres; dans la définition de la spirale d'Archimède entre un pôle, ce qui fait deux constantes, la position de la droite à l'instant où le mobile passe au pôle, et un rapport, en tout quatre constantes.

**398.** Un polynôme entier du degré $m$ par rapport aux deux variables $x$ et $y$ contient $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ termes; on en conclut qu'il faut $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$ ou $\frac{m(m+3)}{2}$ points pour définir une courbe algébrique du degré $m$. Par exemple, il faut 9 points pour définir une courbe du

troisième degré, 14 points pour définir une courbe du quatrième degré.

D'après cela, on voit que toute équation du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - k\beta^2\gamma = 0,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma$ désignant des fonctions entières et du premier degré, et $k$ un paramètre arbitraire, car cette équation contient onze paramètres arbitraires; on peut même prendre à volonté l'une des cinq fonctions linéaires, puisqu'il reste encore neuf paramètres. Les trois droites $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, sont tangentes aux courbes aux points où elles sont coupées par la droite $\beta = 0$; et les points où ces tangentes sont coupées par la droite $\gamma = 0$ appartiennent aussi à la courbe. En prenant $\beta$ à volonté, on a le théorème suivant : si l'on coupe une courbe du troisième degré par une droite quelconque $\beta = 0$, qu'aux trois points d'intersection on mène les tangentes à la courbe, chacune des tangentes coupe la courbe en un nouveau point, et ces trois points sont en ligne droite. En prenant $\gamma$ à volonté, on a cet autre théorème : si l'on coupe une courbe du troisième degré par une droite $\gamma = 0$, si par chacun des points d'intersection on mène des tangentes à la courbe, les points de contact de ces tangentes sont trois à trois en ligne droite.

Supposons que la droite $\beta = 0$ s'éloigne à l'infini, les trois tangentes $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ auront pour limites les trois asymptotes de la courbe; chacune de ces asymptotes coupe la courbe en un seul point, et ces trois points sont en ligne droite.

L'équation

$$(5) \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - k\beta^3 = 0,$$

qui renferme neuf paramètres arbitraires, représente toutes les courbes du troisième degré. Les trois points où la droite $\beta = 0$ rencontre la courbe sont des points d'inflexion; les tangentes en ces points sont les droites $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

On peut encore représenter toutes les courbes du troisième degré par l'équation

$$(6) \qquad \alpha(\alpha - a\gamma)(\alpha - b\gamma) - k\beta^2\gamma = 0$$

qui renferme aussi neuf paramètres arbitraires. La droite $\gamma = 0$ est la tangente au point d'inflexion ($\alpha = 0$, $\gamma = 0$), les trois tangentes $\alpha = 0$, $\alpha - a\gamma = 0$, $\alpha - b\gamma = 0$ aux points où la droite $\beta = 0$ coupe la courbe passent par ce point d'inflexion. En prenant la perspective sur un plan, on peut rejeter à l'infini telle droite que l'on veut, par exemple la tangente $\gamma = 0$ au point d'inflexion; il suffit de faire $\gamma = 1$ dans l'équation qui se réduit à la forme $\alpha(\alpha - a)(\alpha - b) - k\beta^2 = 0$; si l'on prend pour axe des $x$ la droite $\beta = 0$ et pour axe des $y$ la droite $\alpha = 0$, on ob-

tient l'équation $ky^2 = x(x-a)(x-b)$ que nous avons étudiée au n° 337.

**399.** Toute équation du quatrième degré peut être mise sous la forme

(7) $$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - k\beta^2\varphi = 0,$$

$\varphi$ désignant un polynôme du second degré; car cette équation contient 16 paramètres; on peut même prendre $\beta$ à volonté, puisqu'il reste 14 paramètres. Ainsi, quand on coupe une courbe du quatrième degré par une droite quelconque $\beta = 0$, qu'aux quatre points d'intersection on mène des tangentes, et qu'on prend les deux autres points où chaque tangente rencontre la courbe, on a huit points situés sur une conique $\varphi = 0$.

Une courbe du quatrième degré a quatre asymptotes; chacune d'elles coupe la courbe en deux points; les huit points sont sur une conique.

## CONDITIONS DE SIMILITUDE DE DEUX FIGURES.

**400.** Considérons une série de courbes de même espèce, dans la définition desquelles il n'entre qu'un paramètre linéaire A, dont nous désignerons la mesure par $a$, et soit

(1) $$f(x, y, a) = 0$$

l'équation qui représente toutes ces courbes, abstraction faite de leur position dans le plan. Si l'équation (1) a été obtenue sans spécifier l'unité linéaire, elle est nécessairement homogène par rapport à $x$, $y$, $a$. Quand on change le paramètre linéaire A, ce qui revient, l'unité restant la même, à faire varier le nombre $a$, l'équation (1) définit une série de courbes homothétiques. En effet, soit $A_0$ un paramètre ayant pour mesure $a_0$; à ce paramètre correspond la courbe particulière

(2) $$f(x, y, a_0) = 0.$$

Les courbes homothétiques à la courbe (2), l'origine étant le centre d'homothétie et $k$ un rapport arbitraire, sont représentées par l'équation (n° 391)

(3) $$f(kx, ky, a_0) = 0.$$

Désignons par $A_1$ un second paramètre ayant pour mesure un nombre $a_1$ tel que $\frac{a_0}{a_1} = k$, l'équation (3) pourra s'écrire

$$f(kx, ky, ka_1) = k^m f(x, y, a_1) = 0,$$

(4) ou $$f(x, y, a_1) = 0,$$

ce qui signifie que les courbes homothétiques à la courbe (2) sont les diverses courbes que l'on obtient en faisant varier le paramètre A.

**401.** En général, supposons qu'il faille $n$ paramètres linéaires A, B,... pour définir toutes les courbes d'une même espèce, abstraction faite de leur position dans le plan; désignons par $a$, $b$, $c$,... les mesures de ces paramètres au moyen d'une unité arbitraire; l'équation des courbes de l'espèce

$$f(x, y, a, b, \ldots) = 0 \tag{5}$$

sera homogène par rapport à $x$, $y$, $a$, $b$... Les courbes définies par l'équation (5) et qui correspondent à deux séries de paramètres proportionnels $A_0$, $B_0$,... et $A_1$, $B_1$,... sont homothétiques; car, si l'on désigne par $k$ le rapport des paramètres

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = \ldots = k,$$

les courbes homothétiques à la courbe

$$f(x, y, a_0, b_0, \ldots) = 0,$$

sont représentées par l'équation

$$f(kx, ky, ka_1, kb_1, \ldots) = k^m f(x, y, a_1, b_1 \ldots) = 0,$$

ou

$$f(x, y, a_1, b_1, \ldots) = 0.$$

Il résulte de ce qui précède que lorsque la courbe, abstraction faite de sa position dans le plan, est définie par une seule longueur, toutes les courbes de l'espèce sont semblables. Ainsi, le cercle étant défini par son rayon, la parabole par la distance du foyer à la directrice, la lemniscate par la distance des foyers, la spirale d'Archimède par la longueur que parcourt le mobile sur la droite pendant une révolution de cette droite, toutes les circonférences sont semblables, et de même toutes les paraboles, toutes les lemniscates, etc.

L'ellipse étant définie par les deux axes, la condition de similitude de deux ellipses est que ces axes soient proportionnels, comme nous l'avons déjà reconnu au n° 390. Il en est de même de deux hyperboles.

# CHAPITRE VI

## Résolution graphique des équations.

**402.** Considérons deux équations à deux inconnues $x$ et $y$

(1) $\varphi(x, y) = 0$, (2) $\psi(x, y) = 0$;

chacune d'elles définit une courbe. Au système de ces deux équations, on peut substituer une infinité de systèmes équivalents; prenons en particulier un système

(3) $\chi(x, y) = 0$, (4) $f(x) = 0$,

dans lequel l'une des équations ne contienne plus la variable $y$, système que l'on obtient en éliminant $y$ entre les deux équations proposées. Les racines réelles de l'équation (4) sont les abscisses des points communs aux courbes (1) et (2). Cependant, si le système des équations (3) et (4) était vérifié par un couple de valeurs de la forme $x = \alpha$, $y = \beta + \gamma i$, dans lesquelles les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont réelles, ces valeurs vérifieraient le système des équations (1) et (2); mais la quantité $\alpha$ ne serait pas l'abscisse d'un point réel commun aux deux courbes. L'exception que nous venons de signaler ne se présente jamais lorsque l'équation $\chi(x, y) = 0$ est une équation algébrique ne renfermant la variable $y$ qu'au premier degré.

Lorsqu'on veut résoudre une équation $f(x) = 0$ à une seule inconnue, on peut choisir d'une infinité de manières différentes les courbes déterminées par les équations (1) et (2). La seule condition à remplir, c'est que l'élimination de $y$ entre les équations (1) et (2) donne l'équation proposée. Une première combinaison est $y = f(x)$, $y = 0$, ce qui revient à considérer les valeurs de l'inconnue comme les abscisses des points de rencontre de la courbe $y = f(x)$ et de l'axe des $x$. Cette combinaison est rarement la plus simple. On démontre en algèbre que si l'on élimine une inconnue $y$ entre deux équations algébriques à deux inconnues dont les degrés sont $m$ et $n$, l'équation en $x$ est généralement du degré $mn$. Par conséquent, si

l'équation proposée est algébrique et que l'on veuille obtenir ses racines par des intersections de courbes algébriques, le produit des degrés des équations des deux courbes devra être égal au degré de l'équation à résoudre. Appliquons cette méthode à la résolution de l'équation du quatrième degré.

**403.** L'équation du quatrième degré se ramène aisément à la forme

$$(5) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0;$$

on peut la considérer comme provenant de l'élimination de $y$ entre les deux équations du second degré

$$(6) \quad x^2 - my = 0, \qquad (7) \quad m^2y^2 + pmy + qx + r = 0,$$

qui définissent chacune une parabole. L'équation (6) ne renfermant $y$ qu'au premier degré, toutes les racines réelles de l'équation (5) sont des abscisses de points réels communs aux deux courbes.

On peut remplacer la parabole (7) par une autre courbe du second degré passant par les points communs aux courbes (6) et (7). L'équation générale des courbes du second degré satisfaisant à cette condition (n° 277) est

$$(8) \qquad kx^2 + m^2y^2 + qx + m(p-k)y + r = 0,$$

$k$ étant un paramètre arbitraire. Si l'on prend $k = m^2$, la courbe (8) ne pourra être qu'une circonférence de cercle; on obtient les coordonnées $a$ et $b$ du centre et le rayon R de cette circonférence par les formules

$$(9) \quad a = -\frac{q}{2m^2}, \quad b = \frac{m^2 - p}{2m}, \quad R^2 = a^2 + b^2 - \frac{r}{m^2}.$$

Lorsque la valeur de $R^2$ est positive, l'équation (8) représente un cercle réel, et les racines réelles de l'équation (5) sont les abscisses des points de rencontre de ce cercle et de la parabole (6). Lorsque la valeur de $R^2$ est négative, l'équation (8) n'ayant pas de solutions réelles (n° 85), il en est de même du système des équations (6) et (7), ou du système équivalent des équations (5) et (6); les quatre racines de l'équation proposée sont imaginaires.

**404.** Considérons maintenant l'équation du troisième degré ramenée à la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

Si l'on multiplie par $x$, ce qui introduit la racine $x = 0$, dont on ne tiendra pas compte, on obtient l'équation du quatrième degré $x^4 + px^2 + qx = 0$, à laquelle on appliquera la méthode précédente. La valeur de $R^2$ étant ici égale à $a^2 + b^2$ est toujours positive. Le cercle et la parabole passent à l'origine des coordonnées; l'abscisse de ce point est la racine $x = 0$, que l'on doit écarter.

La même parabole $x^2 - my = 0$ peut servir pour la résolution de toutes les équations du troisième ou du quatrième degré; le cercle seul change suivant les valeurs des coefficients de l'équation proposée. Cette méthode ne peut être employée avec avantage que lorsque l'on doit résoudre successivement un grand nombre d'équations; alors on trace avec beaucoup de soin une parabole ayant un paramètre arbitraire; et, dans chaque exemple particulier, il ne reste plus qu'à déterminer le cercle.

**405.** Lorsque l'inconnue $x$ est une ligne, et que l'unité n'a pas été spécifiée, l'équation $f(x) = 0$ est une équation homogène entre l'inconnue $x$ et diverses lignes connues. Dans le cas où l'équation est du quatrième degré, si les coefficients $p$, $q$, $r$ sont des fonctions rationnelles, ou des fonctions irrationnelles du second degré des longueurs données, en prenant pour le paramètre $m$ de la parabole une longueur arbitraire, on pourra construire, avec la règle et le compas, les coordonnées du centre et le rayon du cercle.

Mais si l'équation est une équation numérique, c'est-à-dire si les coefficients sont des nombres donnés, on prendra pour $m$ un nombre déterminé; on fera, par exemple, $m = 1$, et l'on construira la parabole et le cercle à l'aide d'une échelle arbitraire; l'abscisse de l'un des points de rencontre, évaluée à la même échelle, donnera la valeur du nombre inconnu $x$.

On sait que la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues $x$ et $y$, ou la recherche des points d'inter-

section de deux courbes du second degré, se ramène à la résolution d'une équation du quatrième degré à une inconnue. Cette résolution pourra donc être effectuée à l'aide d'une parabole déterminée et d'un cercle. Cependant, si l'une des courbes du second degré est déjà tracée, on pourra l'employer avec le cercle.

406. Exemple I. Mener une normale à une parabole $y^2 - 2px = 0$ par un point donné P dont les coordonnées sont $x_1$ et $y_1$. Les coordonnées $x$ et $y$ du pied de la normale sont déterminées par le système de deux équations,

$$y^2 - 2px = 0, \quad xy - (x_1 - p)y - py_1 = 0.$$

Si l'on multiplie tous les termes de la dernière par $y$, et si l'on remplace $y^2$ par $2px$, on a une nouvelle parabole $x^2 - (x_1 - p)x - \frac{y_1 y}{2} = 0$; en ajoutant membre à membre les équations des deux paraboles, on obtient le cercle $x^2 + y^2 - (x_1 + p)x - \frac{y_1 y}{2} = 0$. Les points où ce cercle coupe la parabole proposée sont les pieds des normales (n° 306).

407. Exemple II. *Résoudre l'équation numérique* $x^3 - x - 7 = 0$. Au moyen d'une échelle bien faite, construisons la parabole $x^2 = y$; décrivons le cercle dont le centre C a pour coordonnées $a = \frac{7}{2}$, $b = 1$, et qui passe à l'origine; ce cercle coupe la parabole en un seul point M; donc l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, l'abscisse OP du point M (fig. 261). En mesurant cette longueur au moyen de l'échelle employée, on trouve $x = 2,09$.

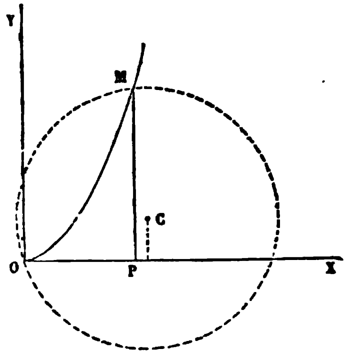


Fig. 261.

Exemple III. *Résoudre l'équation* $x^3 - 5x + 1 = 0$. Décrivons le cercle dont le centre C a pour coordonnées $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$, et qui passe par

l'origine : ce cercle coupe la parabole en trois points ; on en conclut que l'équation a ses trois racines réelles ; en mesurant les abscisses, on trouve que les deux racines positives sont 0, 20 et 2, 13.

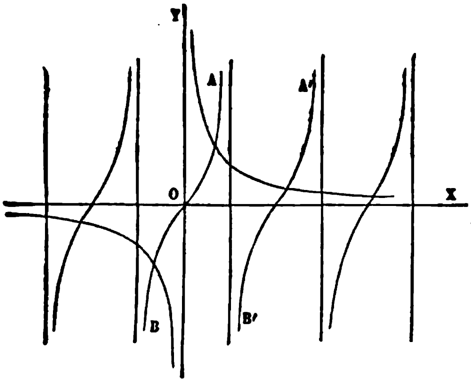


Fig. 262.

**408.** Exemple IV. Considérons l'équation transcendante

$$x \operatorname{tang} x = 1.$$

Cette équation résulte de l'élimination de $y$ entre les deux équations

$$y = \operatorname{tang} x,\quad xy = 1.$$

La première représente une courbe composée d'une infinité de branches égales qui ont des asymptotes perpendiculaires à l'axe des $x$ ; la seconde une hyperbole équilatère (fig. 262). Il est évident que la branche de droite de l'hyperbole rencontre au moins une fois chacune des branches OA, B'A', ... de la courbe transcendante ; d'ailleurs il n'y a sur chaque branche qu'un seul point de rencontre, car, lorsque $x$ varie, les ordonnées des deux courbes varient en sens contraires : si ces ordonnées sont égales pour une certaine valeur de $x$, elles sont nécessairement inégales pour toute valeur différente. Les racines de l'équation sont deux à deux égales et de signes contraires ; il y a une première racine positive comprise entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$, une seconde entre $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$, une troisième entre $2\pi$ et $\frac{5\pi}{2}$, etc., ... ; le nombre des racines est infini. En appelant $x_n$ la $n^{\text{ième}}$ racine, la différence entre $x$ et $(n-1)\pi$ est très-petite lorsque $n$ est très-grand. La courbe donne, pour valeur de la première racine, 0,86.

On pourrait aussi se servir des équations $y = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $y = x$, et, en posant $\frac{\pi}{2} - x = x'$, $y = \operatorname{tang} x'$, $y = \frac{\pi}{2} - x'$, l'hyperbole serait remplacée par une ligne droite.

**409.** Remarques. Les procédés graphiques que nous venons d'indiquer ne donnent pas les valeurs des inconnues avec une bien grande précision ; on ne doit pas espérer une approximation plus grande qu'un centième de la racine.

On se sert quelquefois de deux courbes tracées grossière-

ment pour déterminer le nombre des racines réelles d'une équations. Or, tant que l'on n'a pas étudié avec soin la forme des deux courbes, on ne peut déduire aucune conclusions rigoureuse de cette consiruction. En général, la discussion des courbes et la détermination de leurs points de rencontre présentent les mêmes difficultés que la question proposée.

## CHAPITRE VII

### Notions sur les courbes unicursales.

On a vu (page 316) quelles facilités se présentent pour l'étude d'une courbe lorsque les coordonnées d'un de ses points peuvent s'exprimer commodément en fonction d'un paramètre. A ce point de vue, les courbes algébriques les plus simples sont celles dont les coordonnées peuvent s'exprimer en fonction *rationnelle* d'un paramètre. Ces courbes particulières ont été nommées *unicursales.*

La théorie des courbes unicursales a été fondée par *Chasles* et *Clebsch.* Les résultats que nous indiquons sont empruntés pour la plupart aux Mémoires de Clebsch (Journal de Crelle, t. LXIV et LXXIII) et aux leçons de géométrie de Clebsch publiées par Lindemann.

I. *Une courbe d'ordre* m *avec un point multiple d'ordre* m — 1 *est unicursale.*

En effet, si l'on prend le point multiple pour origine, l'équation de la courbe devient (§ 354)

$$\varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_m(x, y) = 0$$

où $\varphi_{m-1}$ et $\varphi_m$ désignent des polynômes homogènes en $x$ et $y$ des degrés $m$ et $m-1$. Une droite variable

$$y = tx,$$

passant par l'origine, coupe la courbe en $m-1$ points confondus avec l'origine et en *un seul* point variable M dont les coordonnées sont données par les équations

$$(1) \qquad x = -\frac{\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)}, \quad y = -\frac{t\varphi_{m-1}(1, t)}{\varphi_m(1, t)},$$

c'est-à-dire sont des fonctions rationnelles du paramètre $t$, de degré $m$, avec le même dénominateur. A chaque valeur de $t$ répond sur la courbe un seul point, et inversement à chaque point M de la courbe *distinct du point multiple* $x=0$, $y=0$ ré-

pond une seule valeur de $t$, $t = \frac{y}{x}$, égale un coefficient angulaire de la droite OM; quant au point multiple $x = 0$, $y = 0$, on l'obtient pour $m - 1$ valeurs de $t$, racines de l'équation

$$\varphi_{m-1}(1, t) = 0.$$

On peut encore dire que, si $x$ et $y$ sont les coordonnées d'un point de la courbe distinct du point multiple, les équations (1) de degré $m$ en $t$ ont une seule racine commune $t = \frac{y}{x}$, et si $x = 0$, $y = 0$, ces équations ont $m - 1$ racines communes données par l'équation $\varphi_{m-1}(1, t) = 0$.

Dans cette catégorie de courbes unicursales rentrent: les *coniques* ($m = 2$); les courbes du troisième ordre avec un point de rebroussement ou un point double ($m = 3$), par exemple la cissoïde et la strophoïde; puis les courbes du quatrième ordre avec un point triple, par exemple la courbe construite à la page 389 ... etc... Nous verrons plus loin qu'il existe d'autres courbes unicursales du quatrième ordre, à savoir des courbes ayant trois points singuliers, doubles ou de rebroussement.

## II. COURBES UNICURSALES DU TROISIÈME ORDRE.

Soit

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3 = 0$$

l'équation d'une courbe du troisième ordre ayant un point singulier à l'origine. Si l'on fait $y = tx$, on obtient, pour les coordonnées d'un point M de la courbe, les expressions suivantes

$$(3)\qquad x = -\frac{A + Bt + Ct^2}{\varphi(t)}, \quad y = -\frac{t(A + Bt + Ct^2)}{\varphi(t)}$$

où

$$\varphi(t) = D + Et + Ft^2 + Gt^3.$$

Les valeurs de $t$, correspondant au point singulier situé à l'origine, sont racines de l'équation du second degré

$$A + Bt + Ct^2 = 0$$

qui donne les coefficients angulaires des tangentes à l'origine; le point singulier sera un point double ou un point de

rebroussement suivant que ces racines seront inégales ou égales (n° 354).

### COURBE DU TROISIÈME ORDRE AVEC UN REBROUSSEMENT

Supposons d'abord ces racines égales : soit $a$ leur valeur commune; on aura

$$A+Bt+Ct^2=C(t-a)^2$$

d'où

$$(3)\qquad x=\frac{-C(t-a)^2}{\varphi(t)},\quad y=\frac{-Ct(t-a)^2}{\varphi(t)}.$$

Prenons sur la courbe trois points correspondant aux valeurs $t_1, t_2, t_3$ du paramètre et cherchons quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que ces points soient en ligne droite.

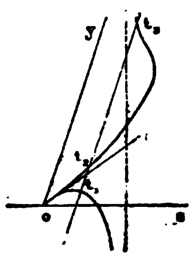


Fig. 888.

Soit $$ux+vy+w=0$$

l'équation d'une droite ne passant pas par le point de rebroussement. Les valeurs $t_1, t_2, t_3$ du paramètre $t$, correspondant aux points d'intersection de cette droite avec la courbe, sont racines de l'équation du troisième degré obtenue en remplaçant, dans l'équation de la droite, $x$ et $y$ par leurs expressions (3). Après cette substitution, le trinôme $ux+vy+w$ devient une fonction rationnelle en $t$ dont le dénominateur est $\varphi(t)$ et dont le numé rateur s'annule pour les valeurs $t_1$, $t_2$, $t_3$ de $t$. On a donc identiquement, après la substitution,

$$ux+vy+w=\frac{K(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{\varphi(t)}$$

K étant une constante qui dépend de $u, v, w$. En prenant les dérivées des deux membres de cette identité par rapport à $t$, nous aurons une autre identité

$$ux'_t+vy'_t=\frac{K(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{\varphi(t)}\left[\frac{1}{t-t_1}+\frac{1}{t-t_2}+\frac{1}{t-t_3}-\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right].$$

Dans cette dernière identité en $t$, remplaçons $t$ par la va-

leur $t = a$ qui correspond au point de rebroussement. Comme, pour cette valeur, $x'_t$ et $y'_t$ s'annulent et que le facteur

$$(a - t_1)(a - t_2)(a - t_3)$$

n'est pas nul, la sécante ne passant pas par le point de rebroussement, il vient

$$\frac{1}{a - t_1} + \frac{1}{a - t_2} + \frac{1}{a - t_3} = \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}. \tag{4}$$

Cette relation étant indépendante de $u$, $v$, $w$ a lieu *nécessairement* entre les paramètres $t_1$, $t_2$, $t_3$ de trois points en ligne droite. Réciproquement, si cette relation est satisfaite, les trois points correspondants sont en ligne droite, car en appelant $t'_3$ le paramètre du point qui est en ligne droite avec les deux premiers, l'on a

$$\frac{1}{a - t_1} + \frac{1}{a - t_2} + \frac{1}{a - t'_3} = \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)},$$

d'où, par comparaison avec (4), $t'_3 = t_3$.

*Point d'inflexion.* Une tangente d'inflexion coupe la courbe en trois points confondus avec le point de contact : si donc on appelle $\theta$ le paramètre d'un point d'inflexion, on aura, d'après la formule (4) dans laquelle on fait $t_1 = t_2 = t_3 = \theta$,

$$\frac{3}{a - \theta} = \frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}.$$

Il y a donc un seul point d'inflexion.

*Points sur une conique.* Une conique ayant pour équation

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta = 0$$

et ne passant pas par le point de rebroussement, coupe la courbe en six points dont les paramètres $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ sont racines de l'équation du sixième degré obtenue en remplaçant, dans l'équation de la conique, $x$ et $y$ par leurs expressions (3). Après cette substitution, $f(x, y)$ devient une fraction rationnelle du sixième degré en $t$ ayant pour dénominateur $\varphi^2(t)$ et, pour numérateur, un polynôme s'annulant pour les valeurs $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ de $t$. On en conclut l'identité

$$f(x, y) = \frac{H(t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_6)}{\varphi^2(t)},$$

où H est une constante indépendante de $t$; puis, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à $t$, la nouvelle identité

$$f'_x x'_t + f'_y y'_t = \frac{H(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_6)}{\varphi^2(t)}\left[\frac{1}{t-t_1}+\frac{1}{t-t_2}+\ldots+\frac{1}{t-t_6}-\frac{2\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right];$$

et en faisant, dans cette dernière identité, $t=a$, on a

$$(5)\quad \frac{1}{a-t_1}+\frac{1}{a-t_2}+\frac{1}{a-t_3}+\frac{1}{a-t_4}+\frac{1}{a-t_5}+\frac{1}{a-t_6}=\frac{2\varphi'(a)}{\varphi(a)},$$

condition *nécessaire* pour que les six points correspondant à ces six valeurs de $t$ soient sur une conique. On voit, comme plus haut, que cette condition est suffisante.

Ces considérations s'appliquent en particulier à la podaire ou à la courbe inverse d'une parabole, par rapport à un point de la parabole.

### COURBES DU TROISIÈME ORDRE AVEC UN POINT DOUBLE

Appelons $a$ et $b$ les racines de l'équation

$$A + Bt + Ct^2 = 0$$

qui donne les coefficients angulaires des tangentes au point singulier (page 401); si ces racines sont imaginaires, le point double est isolé. Les expressions des coordonnées $x$ et $y$ d'un point de la courbe sont

$$(6)\quad x=\frac{-C(t-a)(t-b)}{\varphi(t)},\quad y=\frac{-Ct(t-a)(t-b)}{\varphi(t)}.$$

Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que les trois points correspondant aux valeurs $t_1, t_2, t_3$ du paramètre soient en ligne droite. Soit $ux+vy+w$ le premier membre de l'équation d'une droite ne passant pas par le point double; si l'on y remplace $x$ et $y$ par leurs expressions en $t$, ce premier membre devient une fraction rationnelle dont le dénominateur est $\varphi(t)$ et dont le numérateur s'annule pour les valeurs $t_1, t_2, t_3$ de $t$. On a donc identiquement après cette substitution

$$ux+vy+w=\frac{K(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{\varphi(t)}.$$

Remplaçons successivement, dans cette identité, $t$ par les valeurs $a$ et $b$ correspondant au point double; comme $x$ et $y$ s'annulent pour l'une et l'autre de ces deux valeurs, il vient

$$w = \frac{K(a-t_1)(a-t_2)(a-t_3)}{\varphi(a)}$$

$$w = \frac{K(b-t_1)(b-t_2)(b-t_3)}{\varphi(b)},$$

d'où en divisant membre à membre

$$(7) \qquad \frac{(a-t_1)(a-t_2)(a-t_3)}{(b-t_1)(b-t_2)(b-t_3)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}.$$

Telle est la condition nécessaire pour que trois points soient en ligne droite sur la courbe; on montre comme à la page 471, qu'elle est suffisante.

Si le point double est réel (podaire d'une parabole par rapport à un point extérieur, courbe inverse d'une hyperbole par rapport à un point de la courbe) les constantes $a$, $b$, $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ qui figurent dans la relation (7) sont réelles. Si le point double est isolé (podaire d'une parabole par rapport à un point intérieur, courbe inverse d'une ellipse par rapport à un point de la courbe) les constantes $a$ et $b$ d'une part, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ d'autre part sont imaginaires conjuguées. On peut alors remplacer la relation (7) par une autre qui ne contient que des éléments réels. Supposons pour cela

$$a = p + iq \quad , \quad b = p - iq \quad , \quad \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)} = \cos 2\lambda + i \sin 2\lambda$$

$2\lambda$ désignant l'argument de la quantité constante $\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}$, dont le module est 1, puisque $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont imaginaires conjugués. Posons

$$\frac{p-t}{q} = \operatorname{cotg} \tau \quad , \quad \frac{a-t}{b-t} = \frac{\cos\tau + i\sin\tau}{\cos\tau - i\sin\tau} = \cos 2\tau + i \sin 2\tau;$$

à chaque valeur de $\tau$ répond une valeur de $t$; à chaque valeur de $t$ répondent une infinité de valeurs de $\tau$ différant les unes des autres par des multiples de $\pi$. Appelons $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$,

trois valeurs de $\tau$ correspondant aux paramètres $t_1, t_2, t_3$ de trois points en ligne droite; la relation (7) nous donnera

$$\cos 2(\tau_1+\tau_2+\tau_3)+i\sin 2(\tau_1+\tau_2+\tau_3)=\cos 2\lambda+i\sin 2\lambda,$$

d'où

$$(8)\qquad \tau_1+\tau_2+\tau_3=\lambda+k\pi$$

$k$ désignant un entier quelconque.

En faisant, dans ces formules (7) et (8), $t_1=t_2=t_3=t$ ou $\tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau$, on trouve les valeurs des paramètres $t$ ou $\tau$ correspondant aux points d'inflexion. On démontrera facilement que :

*Il y a trois points d'inflexion; ces points sont en ligne droite. Si* a *et* b *sont réels, un seul de ces points est réel; si* a *et* b *sont imaginaires, les trois points d'inflexion sont réels.*

La condition nécessaire et suffisante pour que six points de la courbe soient sur une conique peut s'écrire de même

$$\frac{(a-t_1)(a-t_2)(a-t_3)(a-t_4)(a-t_5)(a-t_6)}{(b-t_1)(b-t_2)(b-t_3)(b-t_4)(b-t_5)(b-t_6)}=\left[\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}\right]^2,$$

ou, si $a$ et $b$ sont imaginaires,

$$\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6=2\lambda+k\pi.$$

**III.** Les courbes que nous venons d'étudier sont les *seules courbes unicursales* du troisième ordre. En effet, soient

$$(9)\qquad x=\frac{P(t)}{R(t)},\quad y=\frac{Q(t)}{R(t)}$$

les expressions des coordonnées d'un point d'une courbe, $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ désignant des polynômes du troisième degré en $t$ n'ayant pas de diviseur commun. A chaque valeur de $t$ répond un seul point de la courbe; supposons que réciproquement, sauf pour certains points spéciaux *en nombre fini*, à chaque point $(x, y)$ de cette courbe réponde une seule valeur de $t$. Cela revient à dire que les équations

$$(10)\qquad \frac{P(t)}{R(t)}=\frac{P(t')}{R(t')},\quad \frac{Q(t)}{R(t)}=\frac{Q(t')}{R(t')}$$

n'admettent qu'un nombre fini de solutions dans lesquelles $t$

est différent de $t'$, ou encore qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de $x$ et $y$ pour lesquelles les équations en $t$

$$(9) \qquad xR(t) - P(t) = 0 \quad , \quad yR(t) - Q(t) = 0$$

ont deux racines communes. Alors la courbe définie par les équations (9) est du troisième ordre et a *un point singulier;* les équations (9) ont deux racines communes lorsque le point $(x, y)$ coïncide avec ce point singulier.

D'abord la courbe est du troisième ordre, car en cherchant les valeurs du paramètre correspondant aux points d'intersection de la courbe avec une droite, on trouve une équation du troisième degré. Ensuite, l'équation de la tangente au point de paramètre $t$ est (n°341)

$$Y - y = \frac{y'_t}{x'_t}(X - x)$$

c'est-à-dire, d'après les expressions de $x$ et $y$ en $t$,

$$X(RQ' - QR') + Y(PR' - RP') + QP' - PQ' = 0.$$

Dans les combinaisons telles que $RQ' - QR'$ le terme en $t^5$ disparaît et l'équation de la tangente contient $t$ au quatrième degré au plus. Si donc on cherche les valeurs de $t$ correspondant aux points de contact des tangentes menées d'un point à la courbe, on trouve pour $t$ *quatre valeurs* au plus. La courbe considérée est donc de quatrième classe au plus : elle a un point singulier, car une courbe de troisième ordre sans point singulier est de *sixième classe.*

IV. Pour les courbes du quatrième ordre, on a la proposition suivante.

Une courbe du quatrième ordre avec trois points singuliers (doubles ou de rebroussement) est unicursale. Soient A, B, C les points singuliers et D un point fixe pris sur la courbe. Une conique variable

$$S + tS_1 = 0,$$

passant par les quatre points ABCD, coupe la courbe en huit points, dont sept sont fixes, à savoir deux confondus en A, deux en B, deux en C et un en D. L'équation du huitième degré qui donne les abscisses des points d'intersection de la

conique et de la courbe a donc sept racines fixes indépendantes de $t$; on pourra supprimer ces racines par la division et il restera une équation du *premier degré* en $x$ donnant $x$ en *fonction rationnelle* de $t$. On obtiendra de même $y$ en fonction rationnelle de $t$. A chaque point de la courbe autre que les points A, B, C répond une valeur du paramètre $t$ donnée par l'équation

$$S + tS_1 = 0;$$

aux points doubles répondent deux valeurs du paramètre qui deviennent égales quand le point double devient un rebroussement.

Dans cette catégorie de courbes rentrent la lemniscate, l'hypocycloïde à trois rebroussements, les podaires ou les inverses d'ellipses et d'hyperboles par rapport à un point non situé sur ces courbes.

On démontre que, réciproquement, toute courbe unicursale du quatrième ordre a un point triple ou trois points singuliers (doubles ou de rebroussement).

V. Comme une courbe du troisième ordre ne peut avoir deux points singuliers et une courbe du quatrième quatre, les courbes unicursales de ces ordres sont celles qui ont le nombre maximum de points singuliers. C'est là un fait général qui a lieu pour les courbes unicursales de tous les degrés. On démontre en effet, que :

Une courbe unicursale d'ordre $n$ qui n'a d'autres points singuliers que des points doubles ou de rebroussement en a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; et réciproquement, une courbe d'ordre $n$ avec $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles ou de rebroussement est unicursale.

Ce nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ est le nombre *maximum* de points singuliers que peut posséder une courbe d'ordre $n$ sans se décomposer.

Si l'on donne les expressions des coordonnées d'un point

d'une courbe unicursale en fonction rationnelle d'un paramètre

$$(11) \qquad x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t),$$

les valeurs de $t$ correspondant aux points singuliers s'obtiendront en cherchant les solutions communes aux deux équations

$$\varphi(t) = \varphi(t') \quad , \quad \psi(t) = \psi(t')$$

dans lesquelles $t$ est différent de $t'$.

On peut encore remarquer que l'on obtient l'équation de la courbe en éliminant $t$ entre les équations (11), c'est-à-dire en exprimant que ces équations ont une racine commune en $t$. Si le point $(x, y)$ est un point ordinaire de la courbe, les équations (11) n'ont qu'*une racine commune;* si le point $(x, y)$ coïncide avec un point singulier, elles ont deux ou plusieurs racines communes qui sont les valeurs de $t$ correspondant au point singulier. On trouve donc les points singuliers en cherchant les positions du point $(x, y)$ pour lesquelles les équations (11) en $t$ ont deux ou plusieurs racines communes.

## EXERCICES

1. Sur une courbe du troisième ordre avec un point de rebroussement, on prend un point M. La tangente en M coupe la courbe en un point $M_1$, la tangente en $M_1$ la coupe en $M_2$, la tangente en $M_2$ la coup en $M_3$, etc... Démontrer que le $n^{ième}$ point $M_n$ ainsi obtenu tend, quand $n$ augmente indéfiniment, vers le point de rebroussement.

Du point M on peut mener une tangente à la courbe, soit $M'$ son point de contact; du point $M'$ on peut lui mener une nouvelle tangente, soit $M''$ son point de contact, etc... Démontrer que le $n^{ième}$ point $M^{(n)}$ ainsi obtenu tend vers le point d'inflexion.

2. Sur une courbe du troisième ordre avec un point double on prend un point M. La tangente en M coupe la courbe en $M_1$, la tangente en $M_1$ la coupe en $M_2$, etc...; soit $M_n$ le $n^{ième}$ point ainsi obtenu.

Si les tangentes au point double sont réelles, le point $M_n$ tend, quand $n$ augmente indéfiniment, vers le point double.

Si ces tangentes sont imaginaires il peut arriver que le point $M_n$ coïncide avec le point de départ M. L'on aura alors un polygone de $n$ côté dont les sommets sont sur la courbe et les côtés tangents à la courbe. Quelles positions faut-il donner au point M pour qu'il en soit ainsi? Examiner en particulier les cas de $n = 3, 4, 5$. (Durège, *Math. Annalen*, Erster Band.)

3. D'un point d'inflexion I, d'une courbe du troisième ordre à point double, on peut mener à cette courbe une tangente IT ayant son point de contact en T. Démontrer que les droites joignant les deux points I et T au point double sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes au point double.

4. Les coordonnées d'un point de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ peuvent s'exprimer en fonction d'un angle $\varphi$ par les formules $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$. Démontrer que la condition nécessaire est suffisante pour que quatre points de l'ellipse correspondant aux valeurs $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$ de $\varphi$ soient sur un même cercle est

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2k\pi.$$

Par un point M pris sur l'ellipse passent trois cercles osculateurs à l'ellipse (sans compter celui qui a son point de contact en M); prouver que les points de contact de ces trois cercles sont sur un cercle passant par M.

Au point M on mène le cercle osculateur à l'ellipse; soit $M_1$ le point où ce cercle va couper la courbe; le cercle osculateur en $M_1$ coupe l'ellipse en $M_2$; etc... Quelle doit être la position du point M pour que le point $M_n$ obtenu en répétant $n$ fois la construction coïncide avec M? On examinera les cas particuliers de $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

5. On donne une ellipse et un point P dans son plan. 1°) Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse tels que chacune des cordes communes à l'ellipse et à ces différents cercles passe par le point. 2°) Trouver, pour chaque position du point P, combien de ces cercles osculateurs sont réels. 3°) Démontrer que les points de contact de ces cercles osculateurs à l'ellipse sont sur un cercle C. 4°) Trouver l'enveloppe E de ces cercles quand le point P décrit l'ellipse. 5°) La courbe E peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe et dont les centres sont sur une conique; chercher de combien de manières différentes la courbe E est susceptible de cette génération. (Agrégation 1882.)

6. Exprimer les coordonnées d'un point d'une hyperbole en fonction rationnelle d'un paramètre $t$. Quelle relation y a-t-il entre les paramètres $t_1, t_2, t_3, t_4$, de quatre points situés sur un cercle? Combien peut-on mener par un point de l'hyperbole de cercles osculateurs réels à cette courbe? Le cercle osculateur en un point M coupe l'hyperbole en $M_1$, le cercle osculateur en $M_1$ la coupe en $M_2$, etc...; que devient le $n^{ième}$ point $M_n$ ainsi obtenu, quand $n$ augmente indéfiniment?

7. Considérons une conique C dont les coordonnées sont exprimées en fonction rationnelle d'un paramètre $t$ de telle façon qu'à chaque point de la courbe corresponde une seule valeur de $t$, et soient A et B deux points fixes non situés avec la conique C. Démontrer que la

condition nécessaire et suffisante pour que quatre points $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ de la conique C soient situés sur une conique passant par A et B est de la forme

$$\frac{(t_1-a)(t_2-a)(t_3-a)(t_4-a)}{(t_1-b)(t_2-b)(t_3-b)(t_4-b)} = C^{te},$$

$a$ et $b$ désignant les valeurs de $t$ correspondant aux deux points où la droite AB coupe la conique C. Comment faut-il modifier cette relation quand la droite AB est tangente à C?

8. Soit une courbe unicursale du quatrième ordre avec un point triple à tangentes distinctes : exprimons ses coordonnées $x$ et $y$ en fonction rationnelle d'un paramètre $t$ et appelons $a$, $b$, $c$ les trois valeurs de $t$ qui donnent le point triple. Démontrer que les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ situés sur la courbe soient en ligne droite sont :

$$\frac{(t_1-a)(t_2-a)(t_3-a)(t_4-a)}{(t_1-c)(t_2-c)(t_3-c)(t_4-c)} = \frac{\varphi(a)}{\varphi(c)}$$

$$\frac{(t_1-b)(t_2-b)(t_3-b)(t_4-b)}{(t_1-c)(t_2-c)(t_3-c)(t_4-c)} = \frac{\varphi(b)}{\varphi(c)},$$

$\varphi(t)$ désignant le dénominateur commun des expressions de $x$ et $y$. En conclure le nombre des points d'inflexion et des tangentes doubles de la courbe.

Comment faut-il modifier les relations précédentes quand deux ou trois des tangentes au point triple viennent à coïncider?

On appliquera les formules obtenues à la courbe construite au N° 342; et aux courbes ayant pour équations

$$(x^2+y^2)^2 - ay(x^2-y^2) = 0$$

$$(x^2+y^2)^2 - a(x-y)^2 y = 0$$

$$(x^2+y^2)^2 - ay^3 = 0.$$

9. Soit une courbe unicursale du quatrième ordre ayant trois points doubles correspondant, le premier aux valeurs $t=a$, $t=b$ du paramètre, le second aux valeurs $a', b'$, le troisième aux valeurs $a'', b''$. Démontrer que les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ soient en ligne droite sont de la forme

$$\frac{(t_1-a)(t_2-a)(t_3-a)(t_4-a)}{(t_1-b)(t_2-b)(t_3-b)(t_4-b)} = K$$

$$\frac{(t_1-a')(t_2-a')(t_3-a')(t_4-a')}{(t_1-b')(t_2-b')(t_3-b')(t_4-b')} = K'$$

$$\frac{(t_1-a'')(t_2-a'')(t_3-a'')(t_4-a'')}{(t_1-b'')(t_2-b'')(t_3-b'')(t_4-b'')} = K''$$

équations qui se réduisent à deux.

En conclure le nombre des points d'inflexion et des tangentes doubles de la courbe.

Comment faut-il modifier les conditions et les conclusions quand un, deux ou les trois points doubles deviennent des points de rebroussement ?

Appliquer ces formules à la lemniscate (n° 339, 2°), à l'hypocycloïde, à trois rebroussements (courbe engendrée par un point d'une circonférence roulant dans une circonférence de rayon triple).

10). On mène à une parabole donnée deux normales interceptant entre elles une portion de longueur constante de l'axe de la parabole. Lieu de leur point d'intersection. (Concours académique, 1873 )

11). On circonscrit à un triangle deux paraboles dont les axes font entre eux un angle constant; lieu du quatrième point d'intersection de ces paraboles. (École Polytechnique, 1874.)

12). $a$ et $b$ désignant les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M, quelle est, pour chaque position de ce point, la nature des racines de l'équation

$$3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0.$$

On construira, en particulier, le lieu des positions du point M pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine. (École Normale, 1884.)

13). D'un point M d'une lemniscate on peut mener quatre tangentes à cette courbe outre celle qui touche la courbe en M. Prouver que les quatre points de contact de ces tangentes sont sur une ligne droite, et chercher l'enveloppe de cette droite quand le point M décrit la lemniscate.

14). L'enveloppe des normales à une courbe unicursale est une courbe unicursale. Quel est l'ordre et la classe de cette enveloppe pour une conique, une cubique unicursale?

15). L'un des foyers d'une conique inscrite à un triangle donné décrivant une conique donnée, démontrer que l'autre foyer décrit une courbe unicursale du quatrième ordre. (Astor, *Nouv. Annales*, 1885.)

16). Une droite $\delta$ coupe les trois côtés d'un triangle ABC en trois points P, Q, R situés respectivement sur les côtés BC, CA, AB. On prend le conjugué harmonique P′ de P par rapport à BC, Q′ de Q par rapport à CA, R′ de R par rapport à AB; les trois droites AP′, BQ′, CR′ se coupent en un point M.

Trouver le lieu de ce point :

1°) Lorsque la droite $\delta$ passe par un point fixe;

2°) Lorsque cette droite enveloppe une conique.

FIN DE LA GÉOMÉTRIE PLANE.

# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

## LIVRE V

### CHAPITRE PREMIER

**Des coordonnées.**

On détermine la position d'un point dans l'espace au moyen de *trois* quantités que l'on nomme les *coordonnées* du point.

COORDONNÉES RECTILIGNES.

**410.** Soient XOY, YOZ, ZOX (fig. 263) trois plans fixes, qui se coupent deux à deux suivant les droites X'X, YY', Z'Z; trois plans mobiles MD, ME, MF, parallèles à ces plans fixes, déterminent par leur intersection un point M de l'espace; la position de chaque plan mobile est donnée par le segment qu'il intercepte sur l'une des droites X'X, Y'Y, Z'Z. Les trois distances OD, OE, OF, qui déterminent la position des plans mobiles, distances affectées du signe + ou du signe —, suivant qu'elles sont portées dans les directions OX, OY, OZ, ou dans les directions opposées OX', OY', OZ', sont les trois coordonnées rectilignes du point M; on les désigne ordinairement par les lettres $x$, $y$, $z$. Par leurs rencontres mutuelles, les trois plans fixes forment huit angles trièdres, et l'on obtient tous

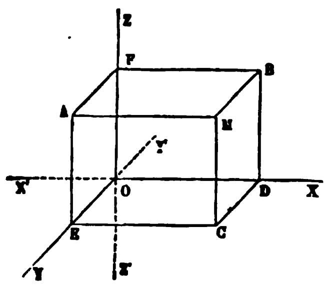



Fig. 263.

les points de l'espace en faisant varier les coordonnées $x$, $y$, $z$ de $-\infty$ à $+\infty$.

Les plans mobiles forment avec les plans fixes un parallélipipède ayant pour arêtes des longueurs égales aux valeurs absolues des coordonnées du point M; les points A, B, C sont les projections du point M sur chacun des plans fixes, parallèlement à l'intersection des deux autres; l'un d'eux, A par exemple, a pour coordonnées, relativement aux axes OY, OZ, deux des coordonnées $y$ et $z$ du point M. Les points D, E, F sont les projections du point M sur chacun des trois axes OX, OY, OZ, parallèlement au plan des deux autres; de sorte que les lettres $x$, $y$, $z$ désignent les projections du rayon OM (parcouru de O en M) sur les axes des coordonnées, pourvu que l'on regarde les projections comme positives lorsqu'elles sont comptées sur les directions OX, OY, OZ, comme négatives dans le cas contraire.

Ordinairement les trois plans fixes, et, par suite, les trois axes, sont rectangulaires deux à deux; alors le parallélipipède est rectangle, et les projections sont orthogonales.

### COORDONNÉES POLAIRES.

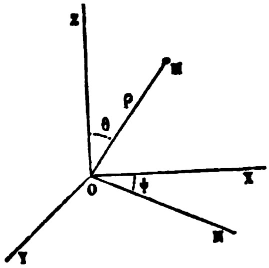



Fig. 264.

**411.** Soient encore trois axes rectangulaires OX, OY, OZ (fig. 263): la position du point M est déterminée par la longueur $\rho$ du rayon vecteur OM, l'angle $\theta$ que fait ce rayon vecteur avec l'axe OZ, et enfin l'angle $\psi$ du plan ZOM avec le plan fixe ZOX. Si ON est la projection de OM sur le plan XOY, l'angle XON mesure l'angle dièdre $\psi$; on le compte dans un sens convenu, par exemple en tournant de OX vers OY.

### REPRÉSENTATION DES SURFACES PAR DES ÉQUATIONS.

**412.** Considérons une surface quelconque dans l'espace. Par un point O, menons trois axes fixes OX, OY, OZ (fig. 264);

dans le plan XOY prenons un point P arbitraire, et, par ce point, menons une parallèle PM à l'axe OZ jusqu'à sa rencontre avec la surface au point M; la longueur de l'ordonnée PM est parfaitement déterminée. Quand le point P se déplace dans le plan XOY, l'ordonnée PM varie; mais puisque le point P se déplace d'une manière arbitraire dans le plan, ses coordonnées $x$ et $y$ sont deux variables indépendantes; il en résulte que l'ordonnée $z$ d'un point M de la surface est une fonction des deux autres coordonnées $x$ et $y$ considérées comme deux variables indépendantes. On conçoit que l'on puisse, de la définition géométrique de la surface, déduire une équation entre $x$, $y$, $z$, servant à définir la fonction $z$ de $x$ et de $y$. Cette équation s'appelle l'équation de la surface.

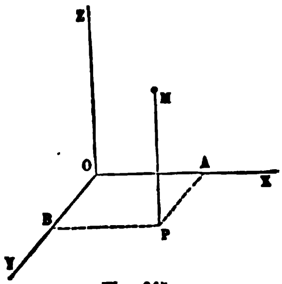



Fig. 265.

**413.** Supposons réciproquement que l'on donne une équation $f(x, y, z) = 0$ entre trois variables; chaque système

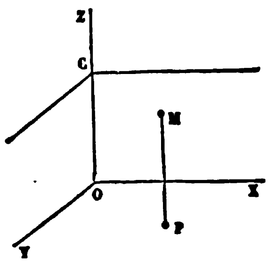



Fig. 266.

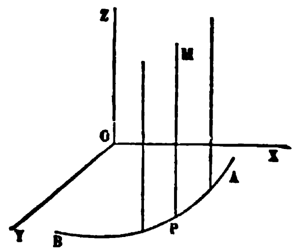



Fig. 267.

de valeurs réelles qui satisfont à cette équation détermine un point de l'espace; l'ensemble de toutes les solutions réelles constitue un système de points qui forme, en général, une surface. En effet, considérons d'abord le cas où l'équation, ne renfermant qu'une seule des coordonnées, $z$ par exemple, est de la forme $z = c$. Puisque les coordonnées $x$ et $y$ sont arbitraires, par un point P quelconque du plan XOY on mènera une ordonnée constante PM (fig. 266) : le lieu des points M est évi-

demment un plan parallèle au plan XOY. Supposons maintenant que l'équation renferme deux coordonnées, $x$ et $y$ par exemple. L'équation $f(x, y) = 0$, dans le plan XOY, représente en général une ligne AB (fig. 267). Par un point quelconque de cette ligne, menons une parallèle PM à l'axe OZ ; puisque l'ordonnée $z$, qui n'entre pas dans l'équation, est arbitraire, les coordonnées de tous les points de la droite PM satisfont à l'équation. Donc l'équation $f(x, y) = 0$ représente dans l'espace un cylindre parallèle à l'axe OZ. Il peut arriver que l'équation représente dans le plan un ou plusieurs points isolés ; dans ce cas, elle représentera dans l'espace une ou plusieurs droites parallèles à OZ.

Considérons enfin une équation $f(x, y, z) = 0$ entre les trois coordonnées. Sur l'axe Z'Z prenons un point arbitraire $c$ déterminé par la coordonnée $z$ égale à $c$, et menons le plan ACB parallèle au plan XOY (fig. 268) ; les coordonnées $x$ et $y$ de tous les points du lieu situés dans ce plan doivent satisfaire à l'équation $f(x, y, c) = 0$ ; or cette équation représente dans le plan ACB une ligne AB. Si l'on donne à $z$ une valeur $c'$ voisine de $c$, on aura dans le plan A'C'B' une seconde ligne A'B' qui différera très-peu de la précédente. En général, quand $z$ varie d'une manière continue entre certaines limites, on a une série continue de lignes, lesquelles forment une surface.

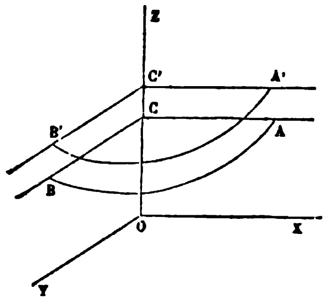



Fig. 268.

Par cette méthode, non-seulement on démontre l'existence de la surface, mais encore on se fait une idée assez exacte de sa forme, à l'aide d'une série de coupes parallèles que l'on représente par leurs projections sur l'un des plans des coordonnées.

REPRÉSENTATION DES LIGNES.

**414.** Une ligne dans l'espace peut être regardée comme

l'intersection de deux surfaces; on représentera donc cette ligne par un système de deux équations simultanées

(1) $$f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0.$$

Le système (1) peut être remplacé par une infinité d'autres équivalents, par exemple, par le suivant

$$f = 0, \quad f - kf_1 = 0,$$

dans lequel $k$ désigne une constante quelconque, c'est-à-dire que la surface $f - kf_1 = 0$ passe, quelle que soit $k$, par la ligne d'intersection des deux premières. Si, entre les deux équations (1), on élimine successivement $y$ et $x$, on aura deux équations

(2) $$\varphi(x, z) = 0, \quad \psi(y, z) = 0,$$

qui représentent les deux cylindres projetants de la ligne sur le plan des $xz$ et sur celui des $yz$. Ces deux cylindres, par leur intersection, déterminent la ligne, à la condition de combiner entre eux d'une manière convenable les points des deux courbes planes, projections de la courbe proposée. En effet, si l'on mène un plan X'O'Y' parallèle au plan des $xy$, les traces O'X', O'Y' de ce plan coupent les courbes projections en plusieurs points; en combinant ces points deux à deux d'une manière quelconque, on n'a pas les projections d'un point de la courbe de l'espace. Pour expliquer ceci par un exemple bien simple, considérons une ellipse dans l'espace; ses projections sur les deux plans XOZ, YOZ sont aussi des ellipses; les droites O'X', O'Y' rencontrent chacune d'elles en deux points, ce qui donne quatre combinaisons, dont deux seulement sont admissibles, parce que le plan X'O'Y' ne coupe qu'en deux points l'ellipse proposée.

On se rend aisément compte de ce fait général. Lorsqu'on élimine $y$ entre les deux équations (1), on obtient un système $\varphi(x, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, équivalent au système proposé; de même l'élimination de $y$ entre les équations donne un nouveau système $\psi(y, z) = 0$, $F_1(x, y, z) = 0$ équivalent au système proposé; il n'en résulte pas en général que le système des équations (2) soit équivalent au système des équations (1).

La représentation des figures dans l'espace par des symboles algébriques permet d'étendre aux figures à trois dimensions les méthodes analytiques employées dans l'étude des figures planes.

DIRECTION D'UNE DROITE.

**415.** Pour déterminer dans l'espace une direction OI (fig. 269), que l'on peut supposer appartenir à une droite passant à l'origine, on donne les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de cette direction avec les trois directions OX, OY, OZ des coordonnées positives. Deux de ces angles ne suffisent pas; car si l'on décrit autour de OX et de OY deux demi-cônes dont les angles au sommet soient respectivement $\alpha$ et $\beta$, ces deux cônes se coupent suivant deux génératrices placées symétriquement par rapport au plan XOY; la connaissance de $\gamma$ est donc indispensable. Il est évident, d'ailleurs, que ces trois angles ne sont pas tous arbitraires, et que, lorsque deux d'entre eux sont connus, le troisième ne peut avoir au plus que deux valeurs distinctes. Au lieu des angles, on peut prendre leurs cosinus, puisque de 0 à $\pi$ il n'y a qu'un seul angle ayant un cosinus donné. Les sinus, au contraire, laisseraient de l'ambiguïté.

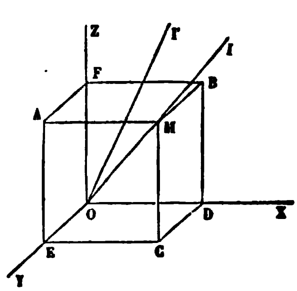


Fig. 269.

**416.** Considérons d'abord le cas où les coordonnées sont rectangulaires. Désignons par $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point quelconque M de la droite OI, et appelons $l$ la distance OM. Les coordonnées du point M sont les arêtes OD, OE, OF du parallélipipède rectangle dont OM est la diagonale, affectées de signes convenables; ce sont aussi les projections orthogonales de la diagonale OM sur les axes; on a donc

$$x = l\cos\alpha,\quad y = l\cos\beta,\quad z = l\cos\gamma.$$

Mais on sait que le carré de la diagonale d'un parallélipipède

rectangle est égal à la somme des carrés des trois arêtes, ce qui donne $x^2+y^2+z^2=l^2$; remplaçant $x$, $y$, $z$ par leurs valeurs et supprimant le facteur $l^2$, on obtient la relation

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{1}$$

qui existe entre les cosinus des angles formés par une même direction avec les axes rectangulaires.

**417.** Appelons $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les angles que fait une seconde direction OI′ avec les mêmes axes, et cherchons l'angle V des deux directions OI, OI′. Les projections de la droite OM et de la ligne brisée ODCM sur la droite OI′ étant égales, on a

$$l\cos V=x\cos\alpha'+y\cos\beta'+z\cos\gamma',$$

ou, en remplaçant $x$, $y$, $z$ par leurs valeurs,

$$\cos V=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'. \tag{2}$$

Deux directions OI, OI′ sont perpendiculaires entre elles, lorsque la condition suivante est vérifiée

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0. \tag{3}$$

**418.** Supposons maintenant les coordonnées obliques et désignons par $\lambda$, $\mu$, $\nu$, les trois angles YOZ, ZOX, XOY, que font les axes deux à deux. En projetant orthogonalement sur chacun des trois axes la droite OM et la ligne brisée ODCM, on a

$$\left\{\begin{aligned} l\cos\alpha &= x + y\cos\nu + z\cos\mu,\\ l\cos\beta &= x\cos\nu + y + z\cos\lambda,\\ l\cos\gamma &= x\cos\mu + y\cos\lambda + z;\end{aligned}\right. \tag{4}$$

en projetant ces mêmes lignes sur la droite OI, on a

$$l=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma. \tag{5}$$

Si, des équations (4), on tire les valeurs de $x$, $y$, $z$,

$$x=\frac{\cos\alpha(1-\cos^2\lambda)+\cos\beta(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+\cos\gamma(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)}{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}\,l,\ldots \tag{6}$$

et qu'on les substitue dans l'équation (5), on obtient la relation

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha\sin^2\lambda+\cos^2\beta\sin^2\mu+\cos^2\gamma\sin^2\nu+2\cos\beta\cos\gamma(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\ &+2\cos\gamma\cos\alpha(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)+2\cos\alpha\cos\beta(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\ &=1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,\end{aligned} \tag{7}$$

entre les trois angles formés par une direction quelconque avec les axes obliques.

Si, dans l'équation (5), on remplace $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées des équations (4), on a la formule

$$(8)\qquad l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

qui donne la distance OM.

En projetant sur la droite OI′ la droite OM et la ligne brisée ODCM, on a, comme précédemment,

$$l\cos V = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma';$$

en remplaçant $x$, $y$, $z$ par leurs valeurs (6), on obtient la formule

$$(9)\qquad \cos V = \frac{\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha\cos\alpha'\sin^2\lambda + \cos\beta\cos\beta'\sin^2\mu + \cos\gamma\cos\gamma'\sin^2\nu\\ + (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\beta\cos\alpha')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + \ldots\end{array}\right\}}{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu},$$

qui donne l'angle des deux directions OI et OI′.

Le dénominateur commun ou le déterminant des formules (6) peut être mis sous une forme remarquable qu'il est bon de connaître; on a

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu\\
&= (1-\cos^2\lambda)(1-\cos^2\mu) - \cos^2\lambda\cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu\\
&= \sin^2\lambda\sin^2\mu - (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)^2\\
&= (\sin\lambda\sin\mu - \cos\lambda\cos\mu + \cos\nu)(\sin\lambda\sin\mu + \cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)\\
&= [\cos\nu - \cos(\lambda+\mu)][\cos(\lambda-\mu) - \cos\nu]\\
&= 4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.
\end{aligned}$$

**419.** Ce déterminant, que nous désignons par $\Omega$, a une signification géométrique très-simple. Lorsque la droite OM est perpendiculaire au plan XOY, les équations (4) se réduisent à

$$\left\{\begin{array}{l}x + y\cos\nu + z\cos\mu = 0,\\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = 0,\\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = l\cos\gamma.\end{array}\right.$$

On en tire

$$z = \frac{l\cos\gamma(1-\cos^2\nu)}{\Omega} = \frac{l\cos\gamma\sin^2\nu}{\Omega}.$$

L'équation (5) se réduisant à $l = z\cos\gamma$, on obtient la relation

$$(10)\qquad \cos^2\gamma\sin^2\nu = \Omega.$$

Considérons le parallélipipède que l'on forme en portant sur les axes des coordonnées les longueurs $a$, $b$, $c$; l'aire de la base étant $ab\sin\nu$, et la hauteur $c\cos\gamma$, le volume est

$$(11)\qquad V = abc\cos\gamma\sin\nu = abc\sqrt{\Omega}.$$

Ainsi le déterminant $\Omega$ est égal au carré du volume du parallélipipède que l'on forme en portant sur les axes des coordonnées des longueurs égales à l'unité.

PERPENDICULAIRE A DEUX DROITES DONNÉES.

**420.** Représentons par $a, b, c$ et $a', b', c'$ les cosinus des angles que font deux directions données OI et OI' avec les axes des coordonnées que nous supposons rectangulaires et désignons par $a'', b'', c''$ les cosinus des angles que fait avec les mêmes axes une droite OI'' perpendiculaire aux deux droites OI et OI'. Des deux équations

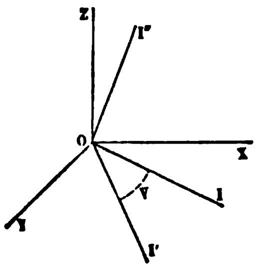


Fig. 270.

$$a a'' + b b'' + c c'' = 0,$$
$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

qui expriment que la direction OI'' est perpendiculaire aux deux autres, on tire

$$\frac{a''}{bc'-cb'} = \frac{b''}{ca'-ac'} = \frac{c''}{ab'-ba'} = \pm \frac{1}{\sqrt{(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2}}.$$

Mais on a

$$(bc'-cb')^2 + (ca'-ac')^2 + (ab'-ba')^2$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2 = 1-\cos^2 V = \sin^2 V,$$

V étant l'angle des deux directions données, angle compris entre 0 et $\pi$. Il en résulte

$$(12)\qquad \frac{a''}{bc'-cb'} = \frac{b''}{ca'-ac'} = \frac{c''}{ab'-ba'} = \pm \frac{1}{\sin V}.$$

Le double signe se rapporte aux deux directions de la perpendiculaire au plan IOI'.

Quand un corps solide tourne autour d'un axe fixe, la rotation peut s'effectuer dans deux sens différents, qu'il importe de distinguer. Pour indiquer le sens du mouvement, on représente l'axe de rotation par une demi-droite, telle que OI'', de manière qu'un observateur placé sur cette demi-droite, les pieds en O, la tête en I'', voie la rotation s'effectuer dans un sens convenu, par exemple de gauche à droite en avant; c'est là ce que l'on nomme le sens direct de la rotation. Dans la question actuelle, nous supposerons que la perpendiculaire OI'' au plan IOI' a été menée dans un sens tel que, pour un observateur placé sur cette demi-droite OI'', comme nous l'avons dit, une rota-

tion autour de cette droite d'un angle V inférieur à $\pi$, dans le sens direct, amène la direction OI sur OI'.

Si l'on considère l'angle trièdre trirectangle OXYZ, on remarque que les trois rotations d'une amplitude égale à $\frac{\pi}{2}$ autour des axes OX, OY, OZ, qui amènent OY sur OZ, OZ sur OX, OX sur OY, s'effectuent dans le même sens. L'angle trièdre offre deux dispositions différentes, suivant que ce sens est direct ou inverse. Nous supposerons dans ce qui suit que l'angle trièdre présente la disposition caractérisée par le sens direct des rotations.

Concevons maintenant que l'on fasse tourner l'angle trièdre OII'I'', considéré comme un corps solide, autour du point O, de manière à amener OI'' sur OZ et OI sur OX; alors la droite OI' sera située dans le plan XOY, et l'angle V sera compté en tournant de OX vers OY.

Pour cette position particulière, on a $a = 1$, $b = c = 0$, $a' = \cos V$, $b' = \sin V$, $c' = 0$; la valeur de $c''$ étant égale à $+1$, il faut prendre le signe $+$ dans les formules (12). Mais, quand l'angle trièdre se déplace d'une manière continue, les angles et par conséquent leurs cosinus variant d'une manière continue, on doit conserver le même signe pour chacune des inconnues $a''$, $b''$, $c''$, tant que le dénominateur correspondant ne s'annule pas; d'ailleurs les trois dénominateurs ne peuvent s'annuler en même temps, puisque la somme de leurs carrés est égale à la quantité constante $\sin^2 V$; on en conclut que le signe $+$ doit être conservé pour toutes les positions de l'angle trièdre.

# CHAPITRE II

## Transformation des coordonnées.

### DÉPLACEMENT DE L'ORIGINE.

**421.** On veut remplacer les trois axes OX, OY, OZ par trois autres axes O'X', O'Y', O'Z', respectivement parallèles aux premiers et dirigés dans le même sens (fig. 271). La position des nouveaux axes sera déterminée par les coordonnées $a$, $b$, $c$, de la nouvelle origine O', relativement aux anciens axes. Appelons $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace par rapport aux anciens axes, $x'$, $y'$, $z'$, les coordonnées du même point par rapport aux nouveaux axes; en projetant successivement sur chacun des trois axes primitifs, parallèlement au plan des deux autres, la droite OM et la ligne brisée OO'M, on a les relations

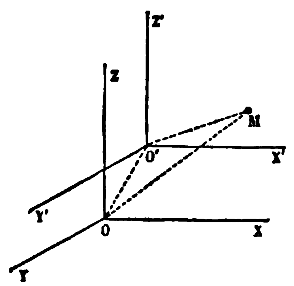


Fig. 271.

$$(1) \qquad x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

### CHANGEMENT DE LA DIRECTION DES AXES

**422.** Considérons maintenant le cas où l'on change la direction des axes, l'origine demeurant la même. Désignons par $a$, $b$, $c$ les cosinus des angles que fait l'axe OX' avec les trois axes OX, OY, OZ, par $a'$, $b'$, $c'$ et $a''$, $b''$, $c''$ les quantités analogues pour OY' et OZ', et, enfin, par $\lambda$, $\mu$, $\nu$, les angles YOZ, ZOX, XOY (fig. 272).

Soit M un point quelconque de l'espace; par le point M menons une parallèle MC à l'axe OZ, et par le point C, où cette droite perce le plan XOY, une parallèle CD à l'axe OY; les trois longueurs OD, DC, CM, prises avec les signes convenables,

sont les coordonnées $x, y, z$ du point M par rapport aux anciens axes. Par le point M, menons une parallèle MC′ à l'axe OZ′ et par le point C′ où elle perce le plan X′OY′, une parallèle C′D′ à l'axe OY′; les trois longueurs OD′, D′C′, C′M, prises avec les signes convenables, sont les coordonnées $x', y', z'$ du point M, par rapport aux nouveaux axes. En projetant orthogonalement les deux lignes brisées ODCM, OD′C′M, successivement sur chacun des trois axes OX, OY, OZ, on obtient les trois relations

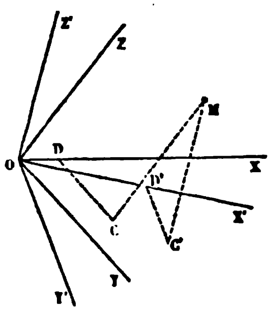



Fig. 272.

$$(2)\quad \begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu = ax' + a'y' + a''z', \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = bx' + b'y' + b''z', \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = cx' + c'y' + c''z', \end{cases}$$

desquelles on peut déduire pour $x, y, z$, des expressions du premier degré en $x', y', z'$. Le déterminant de ces équations est le même que celui des équations (4) du n° 418.

Il faut se rappeler que $a, b, c$ ne sont pas arbitraires, mais liées par une équation de condition; il en est de même de $a', b', c'$ et de $a'', b'', c''$. Il y aurait entre ces mêmes quantités trois nouvelles relations, si l'on voulait que les nouveaux axes fussent rectangulaires, ou, plus généralement, qu'ils fissent deux à deux des angles donnés.

**423.** Quand les axes primitifs sont rectangulaires, on a

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

et les équations (2) se réduisent à

$$(3)\quad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z'. \end{cases}$$

Alors les relations entre les cosinus sont

$$(4)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1. \end{cases}$$

Si les nouveaux axes sont aussi rectangulaires (fig. 273) on a en outre les relations

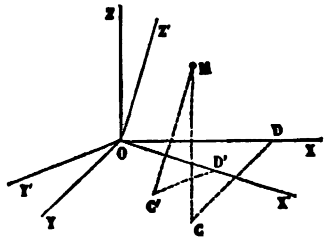


Fig. 273.

$$(5)\quad \begin{cases} a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a + b''b + c''c = 0, \\ aa' + bb' + cc' = 0. \end{cases}$$

Si l'on multiplie les deux membres des équations (3) par $a, b, c$, puis par $a', b', c$ et $a'', b'', c''$, et qu'on ajoute, il vient, en ayant égard aux relations (4) et (5),

$$(6)\quad \begin{cases} x' = ax + by + cz, \\ y' = a'x + b'y + c'z, \\ z' = a''x + b''x + c''z. \end{cases}$$

On obtient ces formules directement en projetant les lignes brisées ODCM, OD'C'M sur les axes OX', OY', OZ'.

Puisque les nouveaux axes sont rectangulaires, les quantités $(a, a', a'')$, $(b, b', b'')$, $(c, c', c'')$, qui désignent les cosinus des angles des directions OX, OY, OZ avec les nouveaux axes, doivent satisfaire aux relations

$$(7)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ ab + a'b' + a''b'' = 0, \end{cases}$$

analogues aux relations (4) et (5).

D'après les formules (12) du n° 420, on a

$$(9)\quad \frac{a''}{bc' - cb'} = \frac{b''}{ca' - ac'} = \frac{c''}{ab' - ba'} = \pm 1.$$

On prendra le signe + ou le signe — suivant que les deux angles trièdres OXYZ, O'X'Y'Z' peuvent ou ne peuvent pas être disposés de façon que les droites OX et OX', OY et OY', OZ et OZ' coïncident.

En vertu de ces relations, le déterminant des équations (3) ou (6) est égal à $\pm 1$.

### FORMULES D'EULER

424. Les formules précédentes, pour passer d'un système rectangulaire à un autre également rectangulaire, offrent l'avantage d'être symétriques par rapport aux angles; mais, quoique les angles soient au nombre de neuf, il n'y en a réellement que trois qui soient arbitraires; c'est pourquoi il ne faut jamais perdre de vue les relations qui les lient. Cette dépendance des neuf cosinus est, dans certains cas, un obstacle pour constater l'identité de deux expressions. On a donc cherché des formules dans lesquelles n'entrent que trois constantes; le choix de celles-ci était naturellement indiqué dans plusieurs questions de mécanique et d'astronomie, où l'on emploie de préférence les nouvelles formules.

On peut déterminer la position des nouveaux axes par l'angle $\psi$ que fait avec OX la trace OA du plan X'O'Y' sur le plan XOY, l'inclinaison $\theta$ du plan X'OY' sur le plan XOY, inclinaison mesurée par l'angle ZOZ', enfin l'angle $\varphi$ de l'axe OX' avec la trace OA (fig. 274).

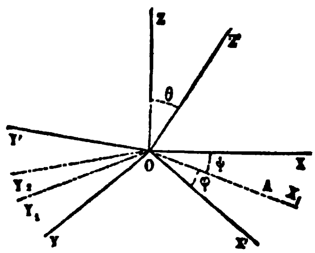


Fig. 274.

Or, si les deux systèmes d'axes présentent la même disposition, il est possible d'amener le premier sur le second par trois rotations successives. Faisons tourner d'abord les axes primitifs de l'angle $\psi$ autour de OZ; tandis que l'axe OZ reste immobile, les axes OX et OY tournent dans leur plan de l'angle $\psi$; l'axe OX vient donc occuper la position OA ou $OX_1$, et OY une certaine position $OY_1$. Remarquons que l'axe OZ', perpendiculaire au plan X'OY', et, par suite, à la trace OA, est contenu dans le plan $Y_1OZ$ perpendiculaire à OA. Actuellement, faisons tourner l'angle trièdre $OX_1Y_1Z$ de l'angle $\theta$ autour de OA; tandis que l'axe $OX_1$ reste immobile, les deux axes $OY_1$ et OZ tournent dans leur plan de l'angle $\theta$; donc OZ vient occuper la position OZ', et $OY_1$ une certaine position $OY_2$ comprise dans le plan X'OY'. Enfin, faisons tourner l'angle trièdre $OX_1Y_2Z'$ de l'angle $\varphi$ autour de OZ'; puisque les deux axes $OX_1$, $OY_2$ tournent dans leur plan de l'angle $\varphi$, il en résulte que $OX_1$ vient se placer sur OX', et $OY_2$ sur OY'. Après ces trois rotations successives, les axes primitifs coïncident avec les nouveaux axes.

Nous avons considéré quatre systèmes d'axes, savoir : OXYZ, $OX_1Y_1Z$, $OX_1Y_2Z'$, OX'Y'Z'. Deux systèmes consécutifs ayant un axe commun, on passera de l'un à l'autre par les formules de transformation em-

ployées en Géométrie plane (n° 50). On a ainsi, par des transformations successives,

$$x = x_1\cos\psi - y_1\sin\psi,\quad y_1 = y_2\cos\theta - z'\sin\theta,\quad x_1 = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y = x_1\sin\psi + y_1\cos\psi,\quad z = y_2\sin\theta + z'\cos\theta,\quad y_2 = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

L'élimination des quantités auxiliaires $x_1$, $y_1$, $y_2$ donne

$$(10)\quad \begin{cases} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) + y'(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ \quad + z'\sin\psi\sin\theta, \\ y = x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + y'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ \quad + z'(-\cos\psi\sin\theta), \\ z = x'\sin\varphi\sin\theta + y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{cases}$$

Telles sont les formules connues sous le nom de formules d'Euler.

La comparaison de ces formules, avec les formules (3) du n° 423, conduit aux relations suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ b = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ c = \sin\varphi\sin\theta, \\ a' = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ c' = \cos\varphi\sin\theta, \\ a'' = \sin\psi\sin\theta, \\ b'' = -\cos\psi\sin\theta, \\ c'' = \cos\theta; \end{cases}$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{c}{c'},\quad \operatorname{tang}\psi = -\frac{a''}{b''}.$$

On a amené le système primitif sur le système nouveau par trois rotations effectuées dans le sens direct. L'angle $\varphi$ de la rotation autour de OZ varie de o à $2\pi$; l'angle $\theta$ de la rotation autour de OA est compris entre o et $\pi$, pourvu que sur l'intersection des plans XOY et X'OY' on choisisse convenablement la direction OA; l'angle de rotation $\varphi$ autour de OZ' varie de o à $2\pi$.

**425.** Formules générales. Lorsqu'on change à la fois l'origine et la direction des axes, en menant par la nouvelle origine O', dont les coordonnées relativement à l'ancien système sont $a$, $b$, $c$, trois axes $OX_1$, $OY_1$, $OZ_1$, parallèles aux premiers et de mêmes directions, on a $x = a + x_1$, $y = b + y_1$, $z = c + z_1$; ensuite, $x_1$, $y_1$, $z_1$ s'expriment en $x'$, $y'$, $z'$, par l'un des groupes d'équations écrites précédemment; il suffit donc, pour avoir les formules générales, de remplacer dans ces équations $x$, $y$, $z$ respectivement par $x - a$, $y - b$, $z - c$.

### CLASSIFICATION DES SURFACES.

**426.** On distingue les surfaces, comme les lignes planes, en surfaces algébriques et surfaces transcendantes, suivant que leurs équations sont algébriques ou transcendantes. Quand l'équation est algébrique, elle peut toujours se ramener à la forme entière, et une transformation d'axes rectilignes ne change pas son degré. Le nombre qui exprime ce degré sert à classer les surfaces en ordres; ainsi on dit qu'une surface est du premier, du second, du troisième ordre, etc., lorsque son équation est du premier, du second, du troisième degré, etc.

Pour que l'équation $f(x, y, z) = 0$, algébrique et entière du degré $m$, représente réellement une surface de l'ordre $m$, il faut que son premier membre ne puisse pas se décomposer en un produit de deux fonctions entières, c'est-à-dire qu'elle soit irréductible. Deux équations irréductibles distinctes représentent deux surfaces qui peuvent avoir une ou plusieurs lignes communes, mais ces surfaces n'ont jamais d'éléments superficiels communs; car pour avoir des solutions communes aux deux équations, on ne peut pas prendre arbitrairement, même entre des limites très-resserrées, deux des variables.

Un plan coupe une surface algébrique de l'ordre $m$ suivant une ligne algébrique dont l'ordre ne peut dépasser $m$; en effet, si l'on rapporte cette surface à un système de trois plans coordonnés, dont fasse partie celui que l'on considère, on obtient l'équation de la ligne d'intersection, par rapport à deux des axes coordonnés, en remplaçant dans l'équation de la surface l'une des coordonnées par zéro; le polynôme à deux variables qui en résulte ne peut évidemment être d'un degré supérieur à $m$. Une ligne droite rencontre une surface de l'ordre $m$ en $m$ points au plus, ou bien elle est située tout entière sur la surface.

Une surface du premier ordre, étant coupée par un plan quelconque suivant une ligne droite, est un plan.

Deux surfaces algébriques, dont les degrés sont $m$ et $m'$, se coupent suivant une courbe gauche qui est rencontrée par un

plan en $mm'$ points; car ce plan coupe les deux surfaces suivant deux lignes planes d'ordres $m$ et $m'$, qui ont, par conséquent, $mm'$ points communs. On dit que la courbe gauche est de l'ordre $mm'$.

SECTION D'UNE SURFACE PAR UN PLAN.

427. Supposons d'abord que le plan passe par l'origine; on déterminera sa position par l'angle $\psi$ que fait avec OX sa trace OX' sur le plan XOY, et par l'angle $\theta$ que fait avec OZ la normale OZ' à ce plan (fig. 275). Par le point O menons dans le plan une droite OY' perpendiculaire à OX'; nous rapporterons la courbe d'intersection aux deux axes rectangulaires OX' et OY' situés dans son plan. Supposons d'abord que l'on fasse tourner les axes primitifs autour de OZ d'un angle $\psi$ pour amener OX sur OX'; OY prendra dans le plan XOY une position $OY_1$ perpendiculaire à OX'; la coordonnée $z$ ne change pas et l'on a

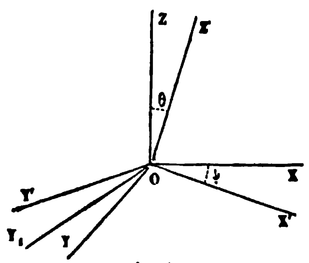


Fig. 275.

$$x = x' \cos\psi - y_1 \sin\psi, \quad y = x' \sin\psi + y_1 \cos\psi.$$

Les quatre droites $OY_1$, OY', OZ, OZ', perpendiculaires à OX', sont dans un même plan perpendiculaire à cette droite; faisons tourner le second système d'axes autour de OX' de l'angle $\theta$ pour amener $OY_1$ sur OY', et par suite OZ sur OZ'; la coordonnée $x'$ ne change pas, et l'on a

$$y_1 = y' \cos\theta - z' \sin\theta, \quad z = y' \sin\theta + z' \cos\theta.$$

Si l'on considère un point situé dans le plan X'OY', la coordonnée $z'$ étant nulle, les dernières formules se réduisent à $y_1 = y' \cos\theta$, $z = y' \sin\theta$, et l'on a ainsi

$$(12) \qquad \begin{cases} x = x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\theta, \\ y = x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\theta. \\ z = y' \sin\theta. \end{cases}$$

Pour avoir l'équation de la courbe d'intersection dans son plan, il suffira de remplacer $x$, $y$, $z$ par ces valeurs dans l'équation de la surface.

On peut déduire ces formules de celles d'Euler en y faisant $\varphi = 0$ et $z' = 0$. Si le plan sécant, défini de la même manière quant à sa direction, au lieu d'être mené par l'origine, passait par un point ayant pour coordonnées $a$, $b$, $c$, dans les formules précédentes on mettrait $x-a$, $y-b$, $z-c$ à la place de $x$, $y$, $z$.

### TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES EN COORDONNÉES POLAIRES.

**428.** Le système polaire défini au n° 411 étant assez fréquemment employé, il est bon d'indiquer comment on passe du système rectiligne rectangulaire au système polaire, et réciproquement. Considérons le cas où l'axe fixe est OZ, le plan XOZ le plan fixe à partir duquel se compte l'angle $\psi$ (fig. 276). La projection de OM sur OZ est $\rho \cos \theta$, la projection OP de la même ligne sur le plan XOY est $\rho \sin \theta$; enfin les projections de OP sur les axes OX et OY sont $\rho \sin \theta \cos \psi$, $\rho \sin \theta \sin \psi$. Si donc on projette sur chacun des trois axes la droite OM et la ligne brisée OPM, on obtient les relations

$$(13) \qquad x = \rho \cos\psi \sin\theta, \quad y = \rho \sin\psi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\theta.$$

On en déduit les formules inverses

$$(14) \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

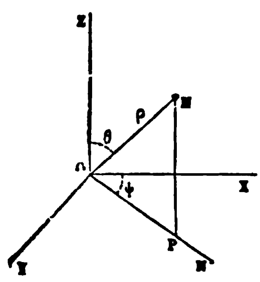


Fig. 276.

Une direction OM est complétement déterminée par les deux angles $\theta$ et $\psi$. En astronomie, si la droite OZ est la verticale d'un lieu, le plan ZOX le plan méridien du lieu, et la droite OM le rayon visuel allant à un astre, l'angle $\theta$ sera la *distance zénithale* de cet astre et l'angle $\psi$ son *azimut*. En géographie, on prend pour OZ la ligne des pôles: alors $\theta$ est le complément de la *latitude* et $\psi$ la *longitude*.

DISTANCE DE DEUX POINTS.

**429.** Nous avons déjà trouvé la distance de l'origine à un point en coordonnées rectangulaires ou obliques. Soient $(x', y', z')$, $(x'', y'', z'')$ les coordonnées de deux points M' et M'', $l$ la distance M'M'' de ces deux points. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en M'. Si les axes sont rectangulaires, on a (n° 416)

$$l=\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}.$$

Si les axes sont obliques, on a (n° 418)

$$l=\sqrt{\begin{array}{l}(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2+2(y''-y')(z''-z')\cos\lambda\\+2(z''-z')(x''-x')\cos\mu+2(x''-x')(y''-y')\cos\nu.\end{array}}$$

# CHAPITRE III

## Du plan et de la ligne droite.

### DU PLAN.

#### CONSTRUCTION DE L'ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ.

**430.** L'équation générale du premier degré entre les variables $x$, $y$, $z$ est

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Nous avons vu (nº 426) que cette équation représente un plan; mais il est bon de démontrer directement cette proposition. L'équation renferme trois paramètres arbitraires qui sont les rapports de trois des quantités A, B, C, D à la quatrième. D'abord, si deux des coefficients A, B, C, par exemple A et B, sont nuls, l'équation se réduit à la forme

$$Cz + D = 0, \quad \text{ou} \quad z = -\frac{D}{C};$$

elle représente un plan qui est parallèle au plan XOY, et qui coupe l'axe des $z$ à une distance $-\frac{D}{C}$ de l'origine (nº 413). Si un seul des coefficients des variables, par exemple C, est nul, on a l'équation

$$Ax + By + D = 0,$$

qui représente, dans le plan XOY, une droite, et dans l'espace un plan parallèle à OZ et mené par cette droite.

Supposons enfin qu'aucun des coefficients des variables ne soit nul. On obtient les traces de la surface sur les trois plans coordonnés XOY, YOZ, ZOX, en faisant dans l'équation proposée $z = 0$, ou $x = 0$, ou $y = 0$, ce qui donne trois droites PQ, QR, RP (fig. 277), ayant pour équations

$$Ax + By + D = 0, \quad By + Cz + D = 0, \quad Ax + Cz + D = 0.$$

Coupons la surface par un plan $z=c$, parallèle au plan XOY; la projection de l'intersection sur le plan XOY a pour équation

$$Ax+By+Cc+D=0;$$

c'est une droite G'H' parallèle à PQ. L'intersection elle-même, étant la ligne suivant laquelle le plan $z=c$, parallèle à XOY, rencontre le plan projetant mené par G'H', est une droite GH parallèle à G'H', et, par conséquent, parallèle à PQ. D'ailleurs la droite GH rencontre la droite PR au point G. On peut donc regarder la surface comme décrite par une droite GH, qui se meut parallèlement à la droite PQ, en s'appuyant constamment sur une autre droite PR; donc la surface est un plan.

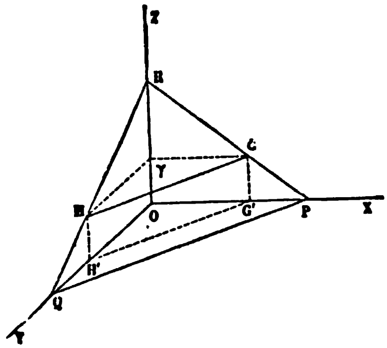



Fig. 277.

**431.** Réciproquement, tout plan est représenté par une équation du premier degré entre les variables $x$, $y$, $z$. Car lorsque le plan est parallèle à l'un des plans coordonnés, XOY par exemple, si l'on appelle $c$ la coordonnée $z$ du point où il rencontre l'axe OZ, son équation est $z=c$. En second lieu, si le plan est parallèle à l'un des axes, OZ par exemple, sa trace sur le plan XOY a une équation de la forme $Ax+By+D=0$; celle-ci représente, dans l'espace, le plan donné.

Enfin, supposons que le plan ne soit parallèle à aucun des axes; soient

$$z=ax+\gamma,\quad z=by+\gamma$$

les équations de ses traces PR et QR sur les plans XOZ et YOZ. On peut disposer des coefficients de l'équation

$$(1)\qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

de manière que le plan qu'elle représente coïncide avec le plan

proposé. En effet, les traces du plan représenté par l'équation (1) sur les plans XOZ et YOZ ont pour équations

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}, \quad z = -\frac{B}{C}y - \frac{D}{C};$$

elles coïncideront avec les traces PR, QR du plan proposé, si l'on a

$$\frac{A}{C} = -a, \quad \frac{B}{C} = -b, \quad \frac{D}{C} = -\gamma,$$

ou $$A = -Ca, \quad B = -Cb, \quad D = -C\gamma.$$

L'équation (1), dans laquelle on substitue les valeurs précédentes, devient, après la suppression du facteur C,

$$z - ax - by - \gamma = 0.$$

CONDITIONS POUR QUE DEUX PLANS SOIENT PARALLÈLES

**432.** Soient $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ les équations de deux plans. Pour que ces plans soient parallèles, il est nécessaire et il suffit que leurs traces sur deux des plans coordonnés soient respectivement parallèles. Les traces sur le plan XOZ ont pour équations

$$Ax + Cz + D = 0, \quad A'x + C'z + D' = 0;$$

ces deux droites seront parallèles, si elles ont le même coefficient angulaire, ce qui donne la condition $-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}$, ou $\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$. De même, les traces sur le plan YOZ seront parallèles, si l'on a $\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$. Ainsi, pour que les deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

c'est-à-dire que les coefficients des variables soient proportionnels.

ÉQUATION GÉNÉRALE DES PLANS QUI PASSENT PAR UN POINT DONNÉ.

**433.** L'équation générale du premier degré renfermant

trois paramètres arbitraires, il faut trois conditions pour déterminer un plan.

Cherchons d'abord l'équation générale des plans qui passent par un point donné M′ ayant pour coordonnées $x'$, $y'$, $z'$. Soit

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan quelconque; pour que ce plan passe par le point M′, il faut que les coordonnées de ce point vérifient l'équation du plan, ce qui donne l'équation de condition

$$(3) \qquad Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

qui déterminera l'un des coefficients, par exemple le coefficient D. En remplaçant D par sa valeur dans l'équation (1), on obtient l'équation

$$(4) \qquad A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

qui renferme deux paramètres arbitraires, les rapports de deux des trois coefficients A, B, C au troisième; c'est l'équation générale des plans passant par le point M′.

Si l'on voulait mener par un point un plan parallèle à un plan donné, l'équation du plan demandé étant de la forme (4), il suffirait de prendre les coefficients A, B, C proportionnels, ou plus simplement égaux, aux coefficients de $x$, $y$, $z$ dans l'équation du plan donné.

### PLAN PASSANT PAR TROIS POINTS DONNÉS.

**434.** Pour qu'un plan $Ax + By + Cz + D = 0$ passe par trois points donnés $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$, il faut que les trois équations de condition

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0,$$
$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0$$

soient vérifiées. De ces équations du premier degré, on déduira les rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ de trois coefficients au quatrième.

Mais on peut obtenir immédiatement l'équation du plan à l'aide d'un déterminant. Considérons, en effet, le déter-

minant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

qui est un polynôme entier et du premier degré en $x$, $y$, $z$; il s'annule quand on y remplace $x$, $y$, $z$ par $x_1$, $y_1$, $z_1$, ou par $x_2$, $y_2$, $z_2$, ou par $x_3$, $y_3$, $z_3$; car alors les éléments de la première ligne horizontale sont égaux à ceux de la seconde, ou de la troisième, ou de la quatrième. On en conclut que l'équation $\Delta = 0$ représente le plan passant par les trois points donnés.

Lorsque les trois points donnés sont situés sur les axes des coordonnées, l'équation du plan prend une forme très-simple. Appelons $a$, $b$, $c$ les coordonnées des points P, Q, R, où le plan coupe les axes. On obtient le point P en faisant, dans l'équation du plan, $y = 0$ et $z = 0$, ce qui donne $a = -\frac{D}{A}$; on a de même $b = -\frac{D}{B}$, et $c = -\frac{D}{C}$. Si l'on remplace les rapports $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ par leurs valeurs $-\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b}$, $-\frac{1}{c}$, tirées des relations précédentes, l'équation du plan se met sous la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{5}$$

### INTERSECTION DE TROIS PLANS.

**435.** La recherche du point d'intersection de trois plans revient à la résolution de trois équations du premier degré

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0, \end{aligned}$$

à trois inconnues $x$, $y$, $z$. Si les trois plans se coupent en un seul point, les trois équations admettent une solution finie et une seule. Si les trois plans n'ont pas de point commun, ce qui arrive quand les plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles entre elles, ou quand deux des plans sont

parallèles, les trois équations n'ont pas de solution. Si les trois plans passent par une même droite, ou se confondent, il y a une infinité de solutions; dans le premier cas, on peut prendre à volonté l'une des variables ; dans le second cas, deux des variables.

*Condition pour que quatre plans passent par un même point.* Soit un quatrième plan ayant pour équation

$$A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0;$$

la condition demandée s'obtient en exprimant qu'il existe un système de valeurs de $x, y, z$ vérifiant les équations des quatre plans, c'est-à-dire en éliminant $x, y, z$ entre les quatre équations. Cette condition est donc

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement si ce déterminant est nul sans que tous les mineurs relatifs à D, D', D'', D''' soient nuls, les plans sont concourants. Si ces quatre mineurs sont nuls les quatre plans sont parallèles à une même droite : on peut encore dire qu'ils se coupent en un même point *éloigné indéfiniment.*

### ANGLES DE LA NORMALE A UN PLAN AVEC LES AXES.

436. Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse sur les coordonnées ; dans ce qui suit, nous supposerons les coordonnées rectangulaires.

Soit

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan. De l'origine, abaissons une perpendiculaire OP sur le plan (fig. 278); désignons par $p$ sa longueur et par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles qu'elle fait avec les axes. La direction de la perpendiculaire OP et sa longueur déterminent la position du plan. En projetant sur la droite OP la

droite OM qui va de l'origine à un point quelconque M du plan, et la ligne brisée OABM, dont les côtés sont les coordonnées $x$, $y$, $z$, du point M, on a l'équation

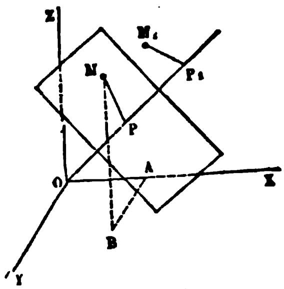


Fig. 278.

$$(6)\quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

Cette équation, convenant à tous les points du plan, est l'équation même du plan. En l'identifiant à l'équation (1), on obtient les rapports égaux

$$(7)\qquad \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{p}{-D} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

d'où l'on déduit les cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes, ainsi que la valeur de $p$. Si l'on choisit le signe de manière que la valeur de $p$ soit positive, les angles se rapporteront à la direction OP.

### DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN.

**437.** Si l'on abaisse d'un point quelconque $M_1$ de l'espace une perpendiculaire $M_1P_1$ sur la droite indéfinie OP, la distance du point $M_1$ au plan est égale à la longueur $PP_1$. Nous désignerons par $l$ cette longueur affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est portée sur le prolongement de OP ou en sens inverse. Appelons $x_1$, $y_1$, $z_1$ les coordonnées du point $M_1$. La projection $\pm OP_1$ sur la droite OP de la ligne brisée relative au point $M_1$ étant égale à

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma,$$

on a, quelle que soit la position du point $M_1$,

$$(8)\qquad l = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p,$$

et, en vertu des relations (7),

$$(9)\qquad l = \frac{\pm(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

### ANGLE DE DEUX PLANS.

**438.** Soient $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

les équations des deux plans. L'angle cherché est égal à l'angle des normales menées de l'origine aux deux plans donnés. Désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que fait avec les axes la première normale, par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les angles de la seconde normale, et par V l'angle cherché. Les axes étant supposés rectangulaires, on a (n° 417)

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma';$$

d'où, en vertu des formules (7),

$$(10) \qquad \cos V = \pm\frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

Pour que les deux plans soient perpendiculaires entre eux, il est nécessaire et il suffit que l'on ait

$$(11) \qquad AA' + BB' + CC' = 0.$$

## DE LA LIGNE DROITE.

### PROJECTIONS D'UNE DROITE.

**439.** La manière la plus simple de définir une droite dans l'espace est de la considérer comme l'intersection de deux plans. Une droite sera donc représentée par le système de deux équations du premier degré

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Si l'on élimine $y$ ou $x$ entre les deux équations, on obtiendra deux équations de la forme

$$(1) \qquad x = az + a' \quad , \quad y = bz + b';$$

ce sont les équations des plans qui projettent la droite sur le plan XOZ ou sur le plan YOZ. On peut aussi considérer chacune de ces équations comme étant celle de la projection elle-même rapportée aux deux axes situés dans son plan.

Si, dans les équations (1), on fait $z = 0$, on obtient les coordonnées $x = a'$, $y = b'$ de la trace de la droite sur le plan XOY.

Quand deux droites sont parallèles, leurs projections étant respectivement parallèles, les coefficients angulaires $a$ et $b$ sont les mêmes dans les équations de ces droites.

Les équations générales d'une droite renferment quatre paramètres arbitraires, $a$, $b$, $a'$, $b'$.

### ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES DROITES QUI PASSENT PAR UN POINT DONNÉ

**440.** Soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées du point donné M, une droite quelconque passant par ce point sera l'intersection de deux plans

$$A\,(x-x')+B\,(y-y')+C\,(z-z')=0$$
$$A'\,(x-x')+B'\,(y-y')+C'\,(z-z')=0$$

passant par ce point. Ces deux équations résolues par rapport à $\frac{x-x'}{z-z'}$ , $\frac{y-y'}{z-z'}$, donnent pour les équations de la droite

$$(2)\qquad \frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}$$

en faisant pour abréger

$$a=BC'-CB' \quad , \quad b=CA'-AC' \quad , \quad c=AB'-BA'.$$

Les équations (2) dans lesquelles les paramètres $a, b, c$ sont arbitraires représentent toutes les droites passant par le point $M(x', y', z')$. Les paramètres $a, b, c$ s'appellent *coefficients de direction* de la droite.

Nous prendrons habituellement les équations d'une droite sous la forme (2) qui comprend comme cas particulier la forme (1) : on obtient en effet la forme (1) en supposant $c=1$, $x'=a'$, $y'=b'$, $z'=0$.

Remarque. Si l'on appelle $\rho$ la valeur commune des rapports (2), on a pour $x, y, z$ les expressions suivantes

$$(3)\qquad x=x'+a\rho \quad , \quad y=y'+b\rho \quad , \quad z=z'+c\rho$$

qui donnent les coordonnées de tous les points de la droite quand $\rho$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. A chaque point pris sur la droite répond une seule valeur de $\rho$ et à chaque valeur de $\rho$ répond un seul point de la droite.

### DROITE PASSANT PAR DEUX POINTS DONNÉS

**441.** Les équations (2) représentent une droite quelconque

passant par le point M $(x', y', z')$; cette droite passera par un second point M′ ayant pour coordonnées $x'', y'', z''$ si les conditions

$$\frac{x''-x'}{a}=\frac{y''-y'}{b}=\frac{z''-z'}{c}$$

sont vérifiées. La droite cherchée a donc pour équations

$$\frac{x-x'}{x''-x'}=\frac{y-y'}{y''-y'}=\frac{z-z'}{z''-z'}. \tag{4}$$

Remarque. On obtiendra, comme en géométrie plane (n° 57), les coordonnées du point $M_1$ de la droite qui partage le segment MM′ dans un rapport donné en grandeur et en signe (fig. 40),

$$\frac{M_1M}{M_1M'}=-\lambda.$$

Ces coordonnées sont

$$x_1=\frac{x'+\lambda x''}{1+\lambda}, \quad y_1=\frac{y'+\lambda y''}{1+\lambda}, \quad z_1=\frac{z'+\lambda z''}{1+\lambda}.$$

Le point $M_2$ *conjugué harmonique du point* $M_1$ par rapport à M et M′ a pour coordonnées

$$x_2=\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}, \quad y_2=\frac{y'-\lambda y''}{1-\lambda}, \quad z_2=\frac{z'-\lambda z''}{1-\lambda}.$$

### INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

**442.** Soient

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}=\rho$$

les équations de la droite, et

$$Ax+By+Cz+D=0$$

celle du plan. Les coordonnées $x, y, z$ du point cherché vérifient à la fois ces quatre équations. Or les trois premières donnent

$$x=x'+a\rho, \quad y=y'+b\rho, \quad z=z'+c\rho, \tag{5}$$

d'où en portant ces valeurs dans l'équation du plan

$$Ax' + By' + Cz' + D + \rho\ (Aa + Bb + Cc) = 0$$

$$\rho = -\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{Aa + Bb + Cc}.$$

En substituant cette valeur de $\rho$ dans les formules (3) on aura les coordonnées du point d'intersection.

Si l'on a

$$Aa + Bb + Cc = 0$$

la valeur de $\rho$ devenant infinie, le point de rencontre s'éloigne à l'infini et la droite est *parallèle* au plan.

Si l'on a en même temps

$$(6) \qquad Aa + Bb + Cc = 0 \quad , \quad Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

la valeur de $\rho$ est indéterminée et la droite tout entière est située dans le plan. La première des conditions (6) exprime que la droite est parallèle au plan; la seconde que le point $(x', y', z')$ de la droite est situé dans le plan.

Remarque. Proposons-nous de former l'équation du plan déterminé par une droite ayant pour équations

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}$$

et un point M ayant pour coordonnées $x''$, $y''$, $z''$. Si l'on désigne par

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan, on aura d'abord

$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$

puis, d'après les conditions (6),

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

$$Aa + Bb + Cc = 0;$$

l'élimination de A, B, C, D entre ces quatre équations donne l'équation du plan demandé

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

### CONDITION POUR QUE DEUX DROITES SE RENCONTRENT

**443.** Deux droites placées arbitrairement dans l'espace ne se rencontrent pas en général; pour qu'elles se rencontrent, il faut et il suffit que leurs équations

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}$$

$$\frac{x-x'_1}{a_1}=\frac{y-y'_1}{b_1}=\frac{z-z'_1}{c_1}$$

soient satisfaites par un même système de valeurs de $x, y, z$ On obtiendrait donc la condition demandée en éliminant $x, y, z$ entre les quatre équations ci-dessus. On l'obtient plus rapidement en remarquant que si

$$Ax+By+Cz+D=0$$

est l'équation du plan contenant à la fois les deux droites, on a, d'après les conditions (6) appliquées successivement aux deux droites,

$$Aa+Bb+Cc=0,\quad Ax'+By'+Cz'+D=0$$

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0,\quad Ax'_1+By'_1+Cz'_1+D=0$$

d'où

$$A(x'-x'_1)+B(y'-y'_1)+C(z'-z'_1)=0$$

$$Aa+Bb+Cc=0$$

$$Aa_1+Bb_1+Cc_1=0,$$

équations qui donnent, par l'élimination de A, B, C, la condition cherchée

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} x'-x'_1 & y'-y'_1 & z'-z'_1 \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0.$$

Cette condition est satisfaite en particulier quand les droites sont parallèles, car alors les éléments des deux dernières lignes sont proportionnels.

REMARQUE. Posons, pour abréger l'écriture,

$$(8)\quad \begin{array}{l} p = bz' - cy' \;,\; q = cx' - az' \;,\; r = ay' - bx' \\ p_1 = b_1z'_1 - c_1y'_1 \;,\; q_1 = c_1x'_1 - a_1z'_1 \;,\; r_1 = a_1y'_1 - b_1x'_1, \end{array}$$

la condition (7) pourra s'écrire

$$ap_1 + bq_1 + cr_1 + a_1p + b_1q + c_1r = 0.$$

## ÉQUATION GÉNÉRALE DES PLANS QUI PASSENT PAR LA DROITE D'INTERSECTION DE DEUX PLANS DONNÉS

**444.** Soient $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ les équations des deux plans; l'équation

$$(9)\quad (Ax + By + Cz + D) - k(A'x + B'y + C'z + D') = 0,$$

dans laquelle le paramètre $k$ est arbitraire, représentera tous les plans qui passent par la droite d'intersection des deux premiers plans. Il est évident d'abord que, quelle que soit la valeur attribuée au paramètre $k$, le plan représenté par l'équation (9) passera par la droite d'intersection des plans donnés; car cette équation est vérifiée par les coordonnées de chacun des points communs aux deux plaus. On voit ensuite que l'équation (9) représente tous les plans qui passent par la droite d'intersection des deux plans donnés; car l'un quelconque de ces plans est défini par la droite d'intersection et un point $(x', y', z')$ pris arbitrairement dans l'espace; or on peut déterminer le paramètre $k$ de manière que le plan (9) passe par ce point, ce qui donne la condition

$$(Ax' + By' + Cz' + D) - k(A'x' + B'y' + C'z' + D') = 0,$$

d'où l'on déduit la valeur de $k$. Le plan cherché a pour équation

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{Ax' + By' + Cz' + DD} = \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{A'x' + B'y' + C'z' + D'}.$$

REMARQUE. Considérons le plan dont l'équation se déduit de l'équation (9) par le changement de $k$ en $-k$

$$(9')\quad (Ax + By + Cz + D) + k(A'x + B'y + C'z + D') = 0.$$

On reconnaît, comme en géométrie plane n° 69, que les points $M_1$ et $M_2$, où les plans (9) et (9') sont rencontrés par

une sécante quelconque, sont conjugués harmoniques par rapport aux points M et M′ où les plans donnés sont rencontrés par cette même sécante. On dit, pour cette raison, que les plans (9) et (9′) *sont conjugués harmoniques* par rapport aux plans donnés.

### PAR UNE DROITE MENER UN PLAN PERPENDICULAIRE A UN PLAN DONNÉ

**445.** Soient $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$ les équations de la droite donnée, $A''x+B''y+C''z+D''=0$ celle du plan donné. Le plan cherché, passant par la droite, a une équation de la forme

$$(Ax+By+Cz+D)-k(A'x+B'y+C'z+D')=0.$$

Ce plan sera perpendiculaire au plan donné, si la condition

$$A''(A-kA')+B''(B-kB')+C''(C-kC')=0$$

est vérifiée (nº 438), les axes étant supposés rectangulaires; on en déduit

$$k=\frac{A''A+B''B+C''C}{A'A''+B'B''+C'C''},$$

et le plan cherché a pour équation

$$(10)\quad (A'A''+B'B''+C'C'')(Ax+By+Cz+D)=(A''A+B''B+C''C)(A'x+B'y+C'z+D')$$

Les trois plans donnés forment un angle trièdre; par l'une des arêtes nous avons mené un plan perpendiculaire à la face opposée. Les plans menés par chacune des autres arêtes perpendiculairement à la face opposée ont de même pour équations

$$(A''A+B''B+C''C)(A'x+B'y+C'z+D')=(AA'+BB'+CC')(A''x+B''y+C''z+D''),$$
$$(AA'+BB'+CC')(A''x+B''y+C''z+D'')=(A'A''+B'B''+C'C'')(Ax+By+Cz+D).$$

En ajoutant les deux premières équations membre à membre, on trouve la troisième; on en conclut que les trois plans passent par une même droite.

### ANGLES D'UNE DROITE AVEC LES AXES

**446.** Dans les questions relatives à la ligne droite, que

nous avons traitées jusqu'à présent, excepté dans la question précédente, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les coordonnées; dans tout ce qui suit, nous supposerons les coordonnées rectangulaires.

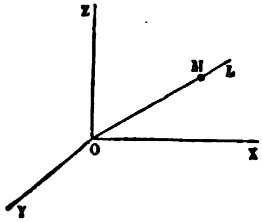


Fig. 279.

Soient $\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}$

les équations d'une droite. La parallèle OL menée par l'origine (fig. 279) aura pour équations

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que fait la droite OL avec les axes. Prenons sur cette droite un point M situé à une distance $l$ de l'origine. Les coordonnées $x$, $y$, $z$ du point M étant les projections orthogonales de la droite OM sur les axes, on a

$$x=l\cos\alpha\quad,\quad y=l\cos\beta\quad,\quad z=l\cos\gamma.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations de la droite OL, il vient

$$(11)\qquad \frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Le double signe se rapporte aux deux directions de la droite.

### PAR UN POINT MENER UNE DROITE QUI FASSE AVEC LES AXES DES ANGLES DONNÉS

**447.** Proposons-nous de mener par le point M', dont les coordonnées sont $x'$, $y'$, $z'$, une droite qui fasse avec les axes des coordonnées rectangulaires les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. La droite cherchée est représentée par des équations de la forme

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c};$$

mais on a

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c},$$

on en déduit

$$(12)\qquad \frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}.$$

On peut obtenir directement ces équations; si l'on désigne par $x, y, z$ les coordonnées d'un point quelconque M de la droite, et par $\rho$ la distance M'M, les différences $x-x'$, $y-y'$ $z-z'$ sont les projections de la longueur M'M sur les axes des coordonnées. D'un autre côté, si la longueur M'M est comptée à partir du point M' dans la direction qui fait avec les axes les angles $\alpha, \beta, \gamma$, ces projections sont égales à $\rho\cos\alpha$, $\rho\cos\beta$, $\rho\cos\gamma$; si la longueur M'M est comptée dans la direction opposée, ces projections sont égales à $-\rho\cos\alpha$, $-\rho\cos\beta$, $-\rho\cos\gamma$. On a donc dans tous les cas

$$x-x'=\rho\cos\alpha\quad,\quad y-y'=\rho\cos\beta\quad,\quad z-z'=\rho\cos\gamma,$$

ou

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}=\rho,$$

en convenant de regarder la longueur $\rho$ comme positive ou négative, suivant qu'elle est parcourue dans la première direction ou dans la direction opposée.

### ANGLE DE DEUX DROITES

**448.** Soient

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}\quad,\quad \frac{x-x'_1}{a_1}=\frac{y-y'_1}{b_1}=\frac{z-z'_1}{c_1}$$

les équations des deux droites. On déterminera les angles $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ de chacune d'elles avec les axes, puis on exprimera l'angle V qu'elles font entre elles par la formule connue (n° 417). On a

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{c}=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\frac{\cos\alpha_1}{a_1}=\frac{\cos\beta_1}{b_1}=\frac{\cos\gamma_1}{c_1}=\frac{\pm 1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}},$$

d'où

$$\cos V = \pm \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}. \tag{13}$$

Les droites sont perpendiculaires entre elles, lorsque la relation

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0 \tag{14}$$

est satisfaite.

Le sinus de l'angle des deux droites est donné par la formule

$$\sin V = \sqrt{1-\cos^2 V} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}}$$

ou encore

$$\sin V = \frac{\sqrt{(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}.$$

### ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

**449.** Soient $\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c}$ les équations de la droite, $Ax + By + Cz + D = 0$ celle du plan. L'angle V de la droite et du plan est complémentaire de l'angle que forme la droite avec la normale au plan.

Si l'on appelle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que fait la droite avec les axes, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les angles que fait la normale au plan avec les même axes, on a (nos 446 et 436)

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A} = \frac{\cos\beta'}{B} = \frac{\cos\gamma'}{C} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

et, par suite,

$$\sin V = \frac{\pm(Aa+Bb+Cc)}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+c^2)}}. \tag{15}$$

### CONDITIONS POUR QU'UNE DROITE ET UN PLAN SOIENT PERPENDICULAIRES

**450.** En désignant par $\alpha, \beta, \gamma$ les angles de la droite avec les axes, par $\alpha', \beta', \gamma'$ ceux de la perpendiculaire au plan avec les mêmes axes, nous avons

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A} = \frac{\cos\beta'}{B} = \frac{\cos\gamma'}{C}.$$

Si la droite est perpendiculaire au plan, les angles $\alpha, \beta, \gamma$ étant respectivement égaux à $\alpha', \beta', \gamma'$, on a, en divisant les rapports précédents deux à deux,

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}. \tag{16}$$

Des relations (16) on déduit aisément ce théorème dont on se sert en géométrie descriptive : lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection de la droite sur un plan quelconque est perpendiculaire à la trace du plan. La projection de la droite sur le plan XOZ a pour équation $cx = az + q$; l'équation de la trace du plan est $Ax + Cz + D = 0$; la relation $\frac{a}{c} = \frac{A}{C}$ exprime que les deux droites sont rectangulaires. De même, la relation $\frac{b}{c} = \frac{B}{C}$ exprime que la projection de la droite sur le plan YOZ est perpendiculoire à la trace du plan.

### PAR UN POINT DONNÉ MENER UNE DROITE PERPENDICULAIRE A UN PLAN DONNÉ

**451.** Soient $x', y', z'$ les coordonnées du point donné M, $Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan. Les équations de la droite cherchée seront de la forme

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}.$$

Cette droite sera perpendiculaire au plan donné, si les relations

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$$

sont vérifiées; par suite la droite cherchée a pour équations

$$(17)\qquad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}.$$

On obtient immédiatement ces équations, en remarquant que les numérateurs sont proportionnels aux cosinus des angles que la droite fait avec les axes, tandis que les dénominateurs sont proportionnels aux cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes; la droite coïncidant avec la normale, ces deux séries de quantités sont proportionnelles.

**452.** Les coordonnées du pied de la perpendiculaire c'est-à-dire du point P où la perpendiculaire perce le plan, seront données par les deux équations (17) jointes à l'équation du plan. On peut mettre l'équation du plan sous la forme

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=-(Ax'+By'+Cz'+D);$$

en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des rapports égaux (17), après avoir multiplié les deux termes du premier par A, ceux du second par B, ceux du troisième par C, on forme un nouveau rapport égal à chacun des précédents, savoir

$$\frac{A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')}{A^2+B^2+C^2}=\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2};$$

on a ainsi les équations

$$(18)\qquad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}=\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

qui déterminent le pied de la perpendiculaire.

On obtiendra la longueur de la perpendiculaire en remplaçant les différences $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$ par leurs valeurs dans la formule

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

ce qui donne

$$l = \frac{\pm (Ax' + By' + Cz' + D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

On retrouve ainsi la formule à laquelle nous avons déjà été conduits par une autre méthode (n° 437).

PAR UN POINT DONNÉ MENER UN PLAN PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNÉE

**453.** Soient $x'', y'', z''$ les coordonnées du point donné M, $\frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} = \frac{z-z'}{c} = \rho$ les équations de la droite. Le plan cherché, passant par le point M, a une équation de la forme

$$A(x-x'') + B(y-y'') + C(z-z'') = 0.$$

Ce plan sera perpendiculaire à la droite, si les relations

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

sont vérifiées. En remplaçant A, B, C par les quantités proportionnelles $a$, $b$, $c$, l'équation du plan cherché devient

$$(19) \qquad a(x-x'') + b(y-y'') + c(z-z'') = 0.$$

On obtient encore immédiatement cette équation, en remarquant que les quantité $a, b, c$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait la droite donnée avec les axes, tandis que les quantités $x-x''$, $y-y''$, $z-z''$ sont proportionnelles aux cosinus des angles que fait avec ces mêmes axes la droite qui va du point M à un point quelconque du plan; ces deux directions étant rectangulaires, la somme des produits de ces quantités deux à deux doit être égale à zéro.

**454.** On aura le point P où le plan coupe la droite, en joignant l'équation du plan aux deux équations de la droite; celles-ci étant mises sous la forme

$$x = x' + a\rho, \quad y = y' + b\rho, \quad z = z' + c\rho$$

on en déduit, en remplaçant $x$, $y$ et $z$ par leurs valeurs dans l'équation du plan,

$$\rho = \frac{a(x'' - x') + b(y'' - y') + c(z'' - z')}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

A l'aide de ces formules, on calculerait aisément la distance MP du point à la droite donnée; mais nous l'obtiendrons plus rapidement par une autre méthode.

### PAR UN POINT DONNÉ MENER UNE DROITE PERPENDICULAIRE A UNE DROITE DONNÉE

**455.** Soient $x''$, $y''$, $z''$ les coordonnées du point donné M, $\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}$ les équations de la droite donnée. La droite cherchée est l'intersection de deux plans, l'un mené par le point et la droite donnés, l'autre mené par le point donné perpendiculairement à la droite donnée. Le premier a pour équation (n° 442, Remarque)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

le second (n° 453)

$$a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0;$$

ces deux équations simultanées représentent la droite cherchée.

### DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE DONNÉE

**456.** Appelons toujours $x''$, $y''$, $z''$ les coordonnées du point donné M. Supposons d'abord que la droite donnée OL passe par l'origine et désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles qu'elle fait avec les axes des coordonnées rectangulaires. La perpendiculaire MP, abaissée du point M sur la droite OL, étant un côté d'un triangle rectangle OMP (fig. 280), on a

$$l^2 = \overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OP}^2.$$

La distance OM est connue; elle est donnée par la formule

$$\overline{OM}^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Quant à la distance OP, c'est la projection de la droite OM sur la droite OL; en exprimant que la projection de la droite OM est égale à celle de la ligne brisée OABM, dont les côtés sont les coordonnées $x''$, $y''$, $z''$ du point M, on a

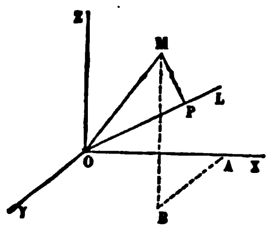


Fig. 280.

$$OP = x'' \cos\alpha + y'' \cos\beta + z'' \cos\gamma$$

Il vient de la sorte

$$(20) \quad l^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 - (x'' \cos\alpha + y'' \cos\beta + z'' \cos\gamma)^2.$$

On peut mettre cette formule sous une autre forme. Si l'on multiplie la quantité $x''^2 + y''^2 + z''^2$ par $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, c'est-à-dire par l'unité, on a

$$l^2 = (x''^2 + y''^2 + z''^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \\ - (x'' \cos\alpha + y'' \cos\beta + z'' \cos\gamma)^2;$$

en effectuant les calculs et groupant convenablement les termes, on obtient la formule

$$(21) \quad l^2 = (y'' \cos\gamma - z'' \cos\beta)^2 + (z'' \cos\alpha - x'' \cos\gamma)^2 \\ + (x'' \cos\beta - y'' \cos\alpha)^2.$$

Supposons maintenant que la droite donnée ne passe pas par l'origine et soient

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}$$

les équations de cette droite. Imaginons que l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en un point de la droite, par exemple au point $(x', y', z')$; les coordonnées du point M relativement à ces nouveaux axes étant $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$, on aura en appliquant la formule (21)

$$l^2 = [(y'' - y') \cos\gamma - (z'' - z') \cos\beta]^2 + [(z'' - z') \cos\alpha - (x'' - x') \cos\gamma]^2 \\ + [(x'' - x') \cos\beta - (y'' - y') \cos\alpha]^2.$$

Si l'on remplace enfin $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs, on arrive à la formule

$$(22) \quad l^2 = \frac{[c(y''-y') - b(z''-z')]^2 + [a(z''-z') - c(x''-x')]^2 + [b(x''-x') - a(y''-y')]^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

REMARQUE. En posant comme précédemment (éq. 8).

$$p = bz' - cy' \ , \ q = cx' - az' \ , \ r = ay' - bx'$$

de telle façon que les projections de la droite donnée sur les plans coordonnés aient pour équations

$$cy - bz + p = 0 \ , \ az - cx + q = 0 \ , \ bx - ay + r = 0,$$

l'expression de $l^2$ devient

$$(22') \quad l^2 = \frac{(cy'' - bz'' + p)^2 + (az'' - cx'' + q)^2 + (bx'' - ay'' + r)^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Les trois quantités élevées au carré dans le numérateur sont ce que deviennent les premiers membres des équations des trois projections de la droite quand on y remplace les coordonnées courantes par les coordonnées $x''$, $y''$, $z''$ du point M.

PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES

**457.** Soient $\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}$ les équations de la première droite AB, $\frac{x - x'_1}{a_1} = \frac{y - y'_1}{b_1} = \frac{z - z'_1}{c_1}$ celles de la droite CD (fig. 281). On sait que la perpendiculaire commune MN à ces deux droites mesure leur plus courte distance. On sait aussi que la longueur $l$ de cette perpendiculaire commune MN est égale à la distance d'un point quelconque de la droite CD au plan P mené par la droite AB parallèlement à CD. Cherchons d'abord l'équation du plan P; tout plan mené par le point $(x', y', z')$ de la droite AB a une équation de la forme

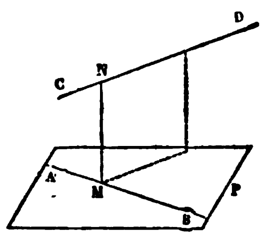


Fig. 281.

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0;$$

pour que ce plan contienne la droite AB et soit parallèle à la droite CD il faut et il suffit que l'on ait

$$Aa + Bb + Cc = 0$$
$$Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 = 0.$$

En éliminant A, B, C entre ces trois équations, on a pour l'équation du plan P

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La distance à ce plan d'un point quelconque de la droite CD, par exemple du point $(x'_1, y'_1, z'_1)$, a pour expression (n° 437)

$$(24)\qquad l = \pm \frac{\begin{vmatrix} x'_1-x' & y'_1-y' & z'_1-z' \\ a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2}}.$$

Telle est la plus courte distance des deux droites données.

En désignant par $p, q, r, p_1, q_1, r_1$ les même quantités que précédemment (éq. 8), on peut écrire

$$(24')\qquad l = \pm \frac{ap_1+bq_1+cr_1+a_1p+b_1q+c_1r}{\sqrt{(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2}}.$$

Si l'on demandait les équations de la perpendiculaire commune MN, il faudrait, par chacune des droites données AB, CD, mener un plan perpendiculaire au plan P; ces deux plans, par leur intersection, détermineraient la droite MN. On voit facilement, en suivant la même marche que pour trouver l'équation du plan P, que ces deux plans ont pour équations

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ a & b & c \\ bc_1-cb_1 & ca_1-ac_1 & ab_1-ba_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} x-x'_1 & y-y'_1 & z-z'_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ bc_1-cb_1 & ca_1-ac_1 & ab_1-ba_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux équations simultanées (25) et (26) représentent la perpendiculaire commune MN.

Remarque I. Quand la droite AB est parallèle à CD la longueur de la plus courte distance est évidemment égale à la distance d'un point de CD, du point $(x'_1, y'_1, z'_1)$ par exemple, à la droite AB.

Dans cette hypothèse on a

$$bc_1 - cb_1 = ca_1 - ac_1 = ab_1 - ba_1 = 0,$$

l'expression de $l$ devient donc indéterminée n° (443) et les équations (25) et 26) deviennent des identités. Cela résulte de ce que, dans ce cas particulier, le plan P mené par AB parallèlement à CD est *indéterminé*, car tout plan mené par AB est parallèle à CD.

Remarque II. Prenons sur les deux droites des longueurs AB = CD = 1, et joignons les points A et B aux points C et D. Nous formerons ainsi un tétraèdre dont le volume est, d'après une formule connue,

$$\frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot l \cdot \sin V$$

V désignant l'angle des deux droites. La formule (24') montre que ce volume est égal à

$$\pm \frac{1}{6} \frac{(ap_1 + bq_1 + cr_1 + a_1p + b_1q + c_1r)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}.$$

## SPHÈRE

459. La surface de la sphère, étant le lieu des points distants du centre d'une quantité constante, a pour équation, en coordonnées rectangulaires,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Si, à l'équation d'une sphère, on joint celle d'un plan, on aura les équations de la ligne d'intersection, c'est-à-dire d'un cercle dans l'espace.

## EXERCICES.

1° Étant donnés un système de trois axes perpendiculaires et un point sur chacun des axes, trouver en fonction des coordonnées des trois points :

1° Les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle qui aurait pour sommets les trois points; 2° les coordonnées du centre du cercle inscrit dans le même triangle.

2° Étant donnée une conique, trouver dans l'espace le lieu des points tels que la distance de chacun d'eux à l'un quelconque des points de la conique soit une fonction rationnelle des coordonnées du point de la conique.

La distance est aussi une fonction rationnelle des coordonnées du point cherché.

Si l'on joint deux points du lieu à un point quelconque de la conique, la somme ou la différence des distances est constante.

3° Démontrer que, si par chacune des arêtes d'un angle trièdre et la bissectrice de la face opposée, on fait passer un plan, les trois plans ainsi obtenus se coupent suivant une même droite.

4° Étant donnés un trièdre et une droite passant par son sommet, par la droite fixe et chacune des arêtes on fait passer un plan qui partage la face opposée en deux segments; démontrer que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres. (Réciproque.)

5° Étant donné un trièdre, par le sommet on mène un plan quelconque qui détermine sur chaque face deux segments; démontrer que le produit des sinus de trois segments non consécutifs est égal et de signe contraire au produit des trois autres. (Réciproque.)

6° Trouver l'aire d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets, les axes étant rectangulaires.

7° Trouver le volume d'un tétraèdre ayant l'un de ses sommets à l'origine en fonction des coordonnées des trois autres sommets.

8° Démontrer que les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un tétraèdre passent par un même point.

9° Trouver l'équation d'un plan mené par un point de l'axe des $x$ perpendiculairement à cet axe, les coordonnées étant obliques.

Application à la détermination du centre d'une sphère donnée par son équation en coordonnées obliques, au moyen de plans perpendiculaires aux axes.

10° Les six plans des cercles d'intersection de quatre sphères prises deux à deux se coupent en un même point.

11° Soient OXYZ, OX'Y'Z' deux trièdres trirectangles disposés d'abord de façon que les arêtes OX et OX', OY et OY', OZ et OZ' coïncident. On fait tourner dans le sens direct d'un angle $\theta$ le second trièdre autour d'une droite faisant des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ avec les axes OX, OY, OZ. Démontrer que, si l'on prend pour axes de coordonnées les arêtes du premier trièdre et celles du second après la rotation, on aura les formules de transformation :

$$\begin{aligned}
hx &= (1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)x' + 2(\lambda\mu-\nu)y' + 2(\lambda\nu+\mu)z'\\
hy &= 2(\mu\lambda+\nu)x' + (1+\mu^2-\nu^2-\lambda^2)y' + 2(\mu\nu-\lambda)z',\\
hz &= 2(\nu\lambda-\mu)x' + 2(\nu\mu+\lambda)y' + (1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2)z';
\end{aligned}$$

dans lesquelles

$$\lambda = \cos\alpha \operatorname{tang}\frac{\theta}{2},\quad \mu = \cos\beta \operatorname{tang}\frac{\theta}{2},\quad \nu = \cos\gamma \operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

$$h = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

12° Soient $Ox_1y_1z_1$ et $Oxyz$ deux systèmes d'axes quelconques. Appelons $a$, $b$, $c$; $a'$, $b'$, $c'$; $a''$, $b''$, $c''$ les cosinus des angles que font les axes $Ox_1y_1z_1$ respectivement avec les axes $Oxyz$; démontrer que les conditions *nécessaires et suffisantes* pour que chacun des systèmes d'axes soit un trièdre trirectangle sont les six relations (4) et (5) du n° 423.

## CHAPITRE IV.

### Génération des surfaces.

**460.** On définit quelquefois une surface par une propriété commune à chacun de ses points ; dans ce cas, on obtient l'équation de la surface en traduisant analytiquement cette propriété. Mais, en général, on définit une surface par le mouvement d'une ligne dans l'espace. Soient

$$F(x, y, z, a) = 0 \quad , \quad F_1(x, y, z, a) = 0,$$

les équations d'une ligne renfermant un paramètre arbitraire $a$ ; si l'on fait varier $a$ d'une manière continue, la ligne se meut dans l'espace et engendre une surface. On obtiendra l'équation de cette surface en éliminant le paramètre $a$ entre les deux équations de la ligne mobile (n° 98).

Supposons que les équations de la ligne mobile

$$F(x, y, z, a, b) = 0 \quad , \quad F_1(x, y, z, a, b) = 0$$

renferment deux paramètres variables $a$ et $b$, assujettis à vérifier la relation $\varphi(a, b) = 0$. Un seul de ces paramètres sera arbitraire, et la ligne, dans son mouvement, engendrera encore une surface, dont on obtiendra l'équation en éliminant les deux paramètres $a$ et $b$ entre les trois équations précédentes.

En général, si les deux équations d'une ligne mobile renferment $n$ paramètres variables, assujettis à vérifier $n-1$ équations de condition, cette ligne engendrera une surface, dont on obtiendra l'équation en éliminant les $n$ paramètres variables entre les deux équations de la ligne et les $n-1$ équations de condition.

On donne le nom de *génératrice* à la ligne mobile qui engendre la surface. On définit ordinairement le mouvement de la génératrice en l'assujettissant à glisser sur certaines lignes fixes, que l'on nomme *directrices*. Soient

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad f_1(x, y, z) = 0$$

les équations d'une directrice ; pour que la génératrice ren-

contre la directrice, il faut que les quatre équations de ces deux lignes soient vérifiées par un même système de valeurs de $x$, $y$, $z$; si donc, entre ces quatre équations, on élimine $x$, $y$, $z$, on obtiendra une équation de condition entre les paramètres $a$, $b$,... que renferment les équations de la génératrice. Chaque directrice donnera de même une équation de condition entre les paramètres variables. Ainsi, lorsque les équations de la génératrice renferment $n$ paramètres variables, il faut assujettir cette ligne mobile à glisser sur $n - 1$ directrices.

On appelle *surfaces réglées* les surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite. Les équations générales d'une ligne droite renfermant quatre paramètres variables, il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une ligne droite.

On distingue les surfaces réglées en deux grandes classes, les surfaces *développables* et les surfaces non développables ou surfaces *gauches*; la surface est développable, lorsque toutes ses génératrices sont tangentes à une même courbe que l'on appelle *arête de rebroussement* de la surface. Parmi les surfaces développables, nous étudierons particulièrement les surfaces cylindriques et les surfaces coniques; nous donnerons ensuite quelques exemples de surfaces réglées non développables.

### SURFACES CYLINDRIQUES.

**461.** On appelle *surface cylindrique* une surface engendrée par une droite qui se meut en restant constamment parallèle à elle-même.

La génératrice sera représentée par les équations

$$x = az + \alpha \quad , \quad y = bz + \beta,$$

dans lesquelles les paramètres $a$ et $b$ sont constants, et les deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ variables. On définira le mouvement de la génératrice, en l'assujettissant à glisser sur une directrice donnée, ce qui fournira une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ entre les deux paramètres variables $\alpha$ et $\beta$. On obtiendra l'équation de la surface, en éliminant ces deux paramètre entre les deux équations de la génératrice et l'équation de condition ; si l'on remplace dans cette dernière $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs

$x - az$, $y - bz$, tirées des deux premières, on a l'équation de la surface cylindrique

$$(1) \qquad \varphi(x - az, y - bz) = 0.$$

**462.** Plus généralement, la génératrice peut être représentée par les deux équations

$$ax + by + cz + d = \alpha \quad , \quad a'x + b'y + c'z + d' = \beta,$$

dans lesquelles les deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ sont seuls variables; car, chacune de ces équations étant celle d'un plan qui se meut parallèlement à lui-même, la droite d'intersection conserve la même direction. Les deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ sont liés par une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; l'élimination des deux paramètres $\alpha$ et $\beta$ donne l'équation de la surface cylindrique

$$(2) \qquad \varphi(ax + by + cz + d, \ a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

Réciproquement, toute équation de la forme (2) ne peut représenter qu'une surface cylindrique. Si l'on pose, en effet,

$$ax + by + cz + d = \alpha \quad , \quad a'x + b'y + c'z + d' = \beta,$$

l'équation proposée devient $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; à tout système de valeurs réelles de $\alpha$ et $\beta$, vérifiant cette équation, correspond une droite ayant une direction déterminée; l'ensemble de ces droites forme une surface cylindrique. Ainsi, *l'équation générale des surfaces cylindriques est une équation quelconque entre deux polynômes du premier degré en* x, y, z.

Il peut arriver que l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ n'admette qu'un nombre fini de solutions réelles; dans ce cas, l'équation (2) représente un nombre limité de droites réelles.

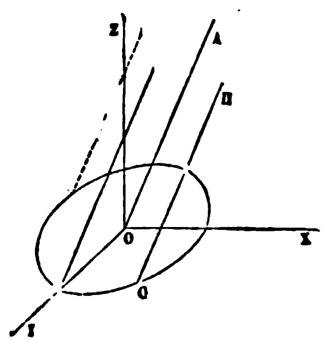



Fig. 282.

**463.** Supposons que la surface ait pour directrice une courbe plane, située dans le plan XOY (fig. 282), et soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation de cette courbe rapportée aux axes OX et OY; la trace G de la génératrice GH

$$x = az + \alpha \quad , \quad y = bz + \beta$$

sur le plan XOY a pour coordonnées

$x = \alpha$ , $y = \beta$; cette trace devant appartenir à la directrice, on aura l'équation de condition $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, et la surface cylindrique sera représentée par l'équation $\varphi(x - az, y - bz) = 0$. Si la directrice plane est algébrique et de l'ordre $m$, la surface cylindrique est aussi algébrique et de l'ordre $m$.

### SURFACES CONIQUES.

**464.** On appelle *surface conique* une surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un point fixe.

Désignons par $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées du point fixe, c'est-à-dire du sommet du cône; les équations de la génératrice seront de la forme

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = a \quad , \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = b,$$

$a$ et $b$ étant deux paramètres variables. On définira le mouvement de la génératrice en l'assujettissant à glisser sur une directrice donnée, ce qui fournira une équation de condition $\varphi(a, b) = 0$ entre les deux paramètres variables $a$ et $b$. En éliminant $a$ et $b$ entre cette équation et les deux équations de la génératrice, on obtiendra l'équation de la surface conique

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0. \tag{3}$$

C'est une équation homogène entre les trois différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

Réciproquement, toute équation homogène entre les trois différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ ne peut représenter qu'une surface conique. Car on pourra mettre cette équation sous la forme (3); si l'on pose ensuite

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = a \quad , \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = b,$$

l'équation proposée devient $\varphi(a, b) = 0$; à tout système de valeurs réelles de $a$ et $b$, satisfaisant à cette équation, correspond une droite passant par le point fixe $(x_0, y_0, z_0)$; l'ensemble de ces droites forme une surface conique.

Si l'équation $\varphi(a, b) = 0$ n'avait qu'un nombre limité de solutions réelles, on aurait un nombre limité de droites réelles. Si l'équation n'avait aucune solution réelle, l'équation (3),

supposée algébrique et entière, n'aurait qu'une solution réelle, $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Quand on place l'origine des coordonnées au sommet du cône, l'équation de la surface conique se réduit à la forme

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0. \tag{4}$$

C'est une équation homogène entre $x$, $y$, $z$.

La surface conique est développable; l'arête de rebroussement se réduit à un point, le sommet. La surface cylindrique est aussi développable; on peut la regarder comme la limite d'une surface conique dont le sommet s'éloigne à l'infini.

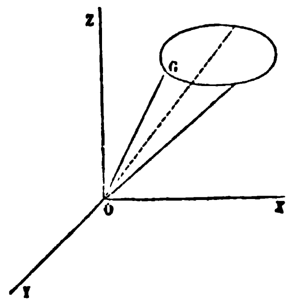



Fig. 283.

465. Considérons le cas où la directrice est une courbe plane. Prenons le sommet du cône pour origine des coordonnées, et supposons le plan XOY parallèle au plan de la courbe (fig. 283). Soient $z = c$, $\varphi(x, y) = 0$ les équations de la directrice, $x = az$, $y = bz$ celles de la génératrice; la trace de la génératrice sur le plan de la directrice ayant pour coordonnées $z = c$, $x = ac$, $y = bc$, pour que ce point G appartienne à la directrice, il faut que l'équation de condition $\varphi(ac, bc) = 0$ soit vérifiée. En éliminant $a$ et $b$ entre cette équation et celles de la génératrice, on obtient l'équation de la surface conique

$$\varphi\left(c\frac{x}{z}, c\frac{y}{z}\right) = 0.$$

Si la directrice plane est algébrique et de l'ordre $m$, la surface conique est aussi algébrique et de l'ordre $m$.

### SURFACES CONOÏDES.

466. On appelle *surface conoïde* une surface engendrée par une droite qui se meut en restant constamment parallèle à un même plan que l'on nomme plan *directeur*, et en glissant sur une droite fixe appelée *axe* du conoïde et sur une seconde directrice quelconque.

Prenons la directrice rectiligne pour axe des $z$, et supposons le plan XOY parallèle au plan directeur. La génératrice sera représentée par des équations de la forme

$$z = \alpha \quad , \quad \frac{y}{x} = \beta.$$

La seconde directrice donnera une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ entre les deux paramètres variables $\alpha$ et $\beta$. La surface conoïde aura pour équation

$$\varphi\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0. \tag{5}$$

A l'exception des cylindres, les surfaces réglées à plan directeur ne sont pas développables. Nous avons dit, en effet, qu'une surface développable est engendrée par une droite mobile tangente à une courbe donnée; la projection de la génératrice sur un plan quelconque restera évidemment tangente à la projection de l'arête de rebroussement; or, quand la génératrice est parallèle à un plan donné, sa projection sur un plan perpendiculaire au plan directeur reste parallèle à elle-même et par conséquent n'est pas tangente à une courbe.

**467.** Supposons que l'axe OZ du conoïde soit perpendiculaire au plan directeur (fig. 284), et que la directrice soit un cercle situé dans un plan perpendiculaire au plan directeur. Faisons passer l'axe OX par le centre C du cercle et prenons le plan YOZ parallèle au plan du cercle; ce cercle aura des équations de la forme $x = a$, $y^2 + z^2 = r^2$. Pour que la génératrice GH s'appuie sur le cercle, il faut que les paramètres $\alpha$ et $\beta$ satisfassent à la relation $a^2\beta^2 + \alpha^2 = r^2$. Le conoïde est donc représenté par l'équation du quatrième degré $x^2z^2 + a^2y^2 - r^2x^2 = 0$. Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan directeur, on obtient

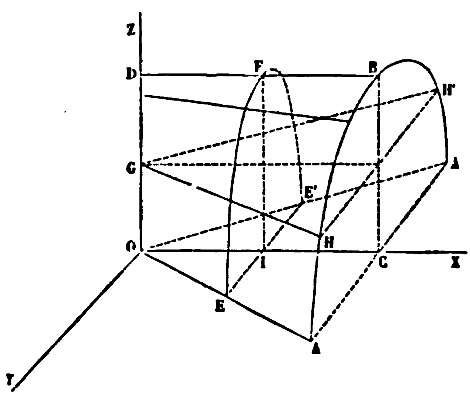


Fig. 284.

évidemment deux génératrices GH, GH'; l'angle de ces deux génératrices diminue à mesure que le plan sécant s'élève; enfin le conoïde se termine par une arête DB. Coupons la surface par un plan EFE' parallèle au plan du cercle; ce plan a pour équation $x = a'$; la courbe d'intersection $a'^2z^2 + a^2y^2 - r^2a'^2 = 0$ est une ellipse, dont le demi-axe IF est constamment égal à $r$ et dont l'autre axe EE' diminue jusqu'à zéro, quand le plan sécant se rapproche de l'axe du conoïde.

Comme second exemple de surface conoïde, considérons la surface engendrée par une droite qui se meut en restant parallèle à la base d'un cylindre circulaire droit, en s'appuyant sur l'axe du cylindre et sur une hélice tracée sur le cylindre. Prenons pour axe des $z$ l'axe du cylindre, pour axes des $x$ et des $y$ deux diamètres rectangulaires du cercle de base, et dont l'un, l'axe des $x$, rencontre l'hélice. Une génératrice de la surface se projette sur le plan de la base, suivant un rayon parallèle faisant avec l'axe des $x$ un angle variable $\theta$. Si l'on appelle $h$ le pas de l'hélice, le point de l'hélice a pour coordonnées

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = h\frac{\theta}{2\pi};$$

ces trois équations à quatre variables $\theta$, $x$, $y$, $z$ peuvent être regardées comme représentant l'hélice elle-même. La génératrice a pour équations

$$z = h\frac{\theta}{2\pi} \quad , \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta;$$

l'élimination de $\theta$ donnera l'équation de la surface hélicoïde à plan directeur,

$$z = \frac{h}{2\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

Cette équation, jointe à celle du cylindre $x^2 + y^2 = r^2$, représente aussi l'hélice.

### SURFACES DE RÉVOLUTION.

**468.** On appelle surface de révolution une surface engendrée par la rotation d'une ligne autour d'un axe fixe auquel elle est invariablement liée. Chaque point M de la génératrice décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe et qui a pour centre le pied P de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe (fig. 285). Les cercles décrits par les différents points de la génératrice ont été nommés les *parallèles* de la surface. Les sections faites par des plans qui passent par

l'axe sont égales entre elles; ce sont les *méridiens* de la surface. Ordinairement on choisit pour génératrice de la surface une courbe méridienne.

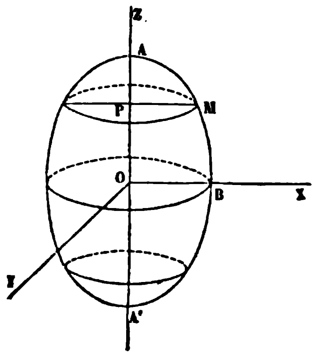


Fig. 285.

On peut aussi concevoir une surface de révolution comme engendrée par le mouvement d'un cercle, de rayon variable, dont le centre parcourt une ligne droite, dont le plan reste perpendiculaire à cette droite, et qui rencontre la génératrice donnée.

Supposons d'abord que l'on prenne l'axe de rotation pour axe des $z$, les coordonnées étant rectangulaires; un parallèle de la surface sera représenté par des équations de la forme

$$x^2+y^2=\alpha^2 \quad , \quad z=\beta;$$

en exprimant que ce cercle rencontre la génératrice donnée, on obtiendra une équation de condition $\varphi(\alpha,\beta)=0$ entre les deux paramètres variables $\alpha$ et $\beta$. Si l'on élimine $\alpha$ et $\beta$ entre cette équation et les deux équations du parallèle, on aura l'équation

$$(6) \qquad \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\,,\, z\right)=0$$

de la surface de révolution.

**469.** Cherchons, par exemple, l'équation de la surface engendrée par une droite AB, tournant autour d'un axe OZ (fig. 286). Prenons l'axe de rotation pour axe des $z$, la perpendiculaire commune entre l'axe et la droite AB dans une de ses positions pour axe des $y$, et une perpendiculaire au plan YOZ pour axe des $x$. La droite AB, dans cette position particulière, aura pour équations

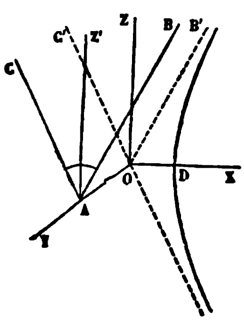


Fig. 286.

$$y=a \quad , \quad x=mz,$$

$a$ étant la plus courte distance OA, $m$ la tangente trigonométrique de l'angle ZOB' que fait l'axe OZ avec la droite OB' parallèle à AB. Pour que le parallèle $(x^2+y^2=\alpha^2,\ z=\beta)$ rencontre la droite AB, il

faut que l'équation de condition $\alpha^2 + m^2\beta^2 = a^2$, que l'on obtient en éliminant $x$, $y$, $z$ entre les équations de la droite et celles du cercle, soit vérifiée ; l'élimination des deux paramètres variables $\alpha$ et $\beta$ entre cette équation de condition et celles du cercle, donne l'équation de la surface de révolution

$$x^2 + y^2 - m^2z^2 = a^2.$$

Si l'on fait $y = 0$ dans cette équation, on obtient la trace de la surface sur le plan XOZ ; c'est une hyperbole $x^2 - m^2z^2 = a^2$, ayant son axe transverse OD dirigé suivant OX, et pour asymptotes les droites OB' et OC' également inclinées de part et d'autre sur OZ. On peut considérer la surface comme engendrée par cette hyperbole méridienne tournant autour de son axe imaginaire. C'est pourquoi on lui a donné le nom d'*hyperboloïde* de révolution à une nappe.

L'équation précédente ne renfermant le coefficient angulaire $m$ qu'au carré, il est clair que la même surface sera engendrée par les deux droites AB et AC, toutes deux perpendiculaires à OA, et également inclinées de part et d'autre sur la droite AZ' parallèle à OZ.

**470.** Considérons en particulier le cas où la génératrice est la courbe méridienne ; cette courbe, que l'on peut supposer placée dans le plan XOZ, est représentée par les équations $y = 0$, $\varphi(x, z) = 0$. Si l'on élimine $x$, $y$, $z$ entre ces deux équations et celles du parallèle $x^2 + y^2 = \alpha^2$, $z = \beta$, on obtient l'équation de condition $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. L'équation de la surface de révolution est donc

$$\varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \tag{7}$$

On l'obtient en remplaçant $x$ par $\sqrt{x^2 + y^2}$ dans l'équation du méridien.

Par exemple, si la courbe méridienne est l'hyperbole $x^2 - m^2z^2 = a^2$, l'hyperboloïde de révolution à une nappe aura pour équation $x^2 + y^2 - m^2z^2 = a^2$.

Comme second exemple, considérons le *tore*, c'est-à-dire la surface engendrée par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne passant pas par le centre. Si l'on prend pour axe des $z$ l'axe de révolution, et pour axe des $x$ une perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur l'axe, l'équation du cercle dans le plan $xz$ étant $(x - a)^2 + z^2 = r^2$, celle de la surface sera

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = r^2.$$

**471.** Supposons maintenant que l'axe de rotation OL (fig. 286), passant encore par l'origine, ait une direction quelconque dans l'espace.

Soient $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ les équations de cette droite. Tout parallèle de la surface sera donné par l'intersection d'une sphère décrite de l'origine comme centre et d'un plan perpendiculaire à l'axe; ce cercle sera donc représenté par les deux équations

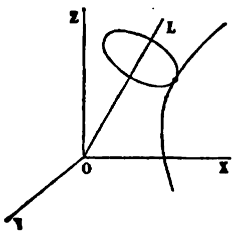


Fig. 287.

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2 \quad , \quad ax+by+cz=\beta.$$

En exprimant que le parallèle rencontre la génératrice donnée, on aura une équation de condition $\varphi(\alpha, \beta)=0$ entre les deux paramètres variables $\alpha$ et $\beta$. L'élimination de ces deux paramètres entre l'équation de condition et les deux équations du cercle conduira à l'équation de la surface de révolution

$$(8) \qquad \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ , ax+by+cz\right)=0.$$

C'est une équation entre le polynôme du second degré $x^2+y^2+z^2$ et un polynôme du premier degré.

Réciproquement, toute équation de cette forme représente une surface de révolution autour d'une droite passant par l'origine. Considérons, en effet, la droite OL qui a pour équations $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, et posons

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2 \quad , \quad ax+by+cz=\beta;$$

l'équation proposée (8) devient $\varphi(\alpha, \beta)=0$. A tout système de valeurs réelles de $\alpha$ et de $\beta$ vérifiant cette équation correspond un cercle donné par l'intersection d'une sphère ayant l'origine pour centre, et d'un plan perpendiculaire à la droite OL; le centre du cercle sera situé sur la droite OL, et le lieu des cercles formera une surface de révolution autour de cette droite.

Supposons enfin que l'axe de rotation ne passe pas par l'origine; prenons un point fixe $(x_0, y_0, z_0)$ sur cet axe dont les équations seront

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Tout parallèle de la surface sera donné par l'intersection d'une

sphère $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$, ayant son centre au point fixe, et d'un plan $ax+by+cz=\beta$ perpendiculaire à l'axe; l'équation de la surface de révolution sera donc de la forme

$$(9)\quad \varphi\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},\quad ax+by+cz\right)=0.$$

Lorsque la surface de révolution est du second degré, A. B, C désignant trois constantes, son équation est

$$(10)\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+A(ax+by+cz)^2+B(ax+by+cz)+C=0$$

TANGENTE.

**472.** Les trois coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point quelconque M d'une courbe peuvent être considérées comme des fonctions d'une même variable auxiliaire $t$, prise pour variable indépendante. Appelons $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ les variations de ces coordonnées, quand on donne à la variable $t$ un accroissement très-petit $\Delta t$, c'est-à-dire quand on passe du point M à un point voisin $M_1$ sur la courbe; la sécante $MM_1$ est représentée par les équations

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Lorsqu'on fait tendre $\Delta t$ vers zéro, les rapports $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ ont respectivement pour limites les dérivées $x'$, $y'$, $z'$ des fonctions $x$, $y$, $z$, par rapport à $t$. Il en résulte que la tangente au point M est représentée par les équations

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{z'}.$$

Supposons que $t$ augmentant, c'est-à-dire $\Delta t$ étant positif, le point M se déplace de M en $M_1$ : menons à la courbe la tangente MT dans le sens de ce déplacement, c'est-à-dire dans le sens dans lequel se meut M quand $t$ croît, et appelons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de la demi-droite MT par rapport aux axes coordonnés supposés rectangulaires. On a

$$\alpha=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\ \beta=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\ \gamma=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

le radical étant pris positivement. En effet, le cosinus de l'angle du segment $MM_1$ avec $Ox$ est

$$\cos(MM_1, x) = \frac{\Delta x}{MM_1} = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

Divisant les deux termes du rapport par $\Delta t$ et faisant tendre $\Delta t$ vers zéro, on trouve, comme limite du second membre, la valeur qui a été écrite plus haut pour $\alpha$ et qui est bien la valeur demandée, car MT est la limite de la direction $MM_1$.

473. Soient MT et $M_1T_1$ les tangentes à une courbe gauche en deux points voisins M et $M_1$ (fig. 288); par le point M menons une droite MH parallèle à $M_1T_1$; quand le point $M_1$ se meut sur la courbe, la droite MH décrit une surface conique; si le point $M_1$ se rapproche indéfiniment du point M, le plan TMH tend vers une position limite, qui est le plan tangent à la surface conique le long de l'arête MT; cette position limite du plan TMH s'appelle le plan *osculateur* à la courbe au point M.

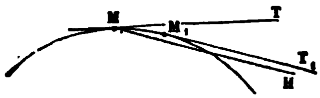



Fig. 288.

Le plan TMH, passant par le point M, a une équation de la forme

$$(1) \qquad A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

Pour qu'il contienne les deux droites MT, MH, on doit avoir les relations

$$(2) \qquad \begin{gathered} Ax' + By' + Cz' = 0. \\ A(x' + \Delta x') + B(y' + \Delta y') + C(z' + \Delta z') = 0; \end{gathered}$$

la dernière peut être remplacée par

$$A\frac{\Delta x'}{\Delta t} + B\frac{\Delta y'}{\Delta t} + C\frac{\Delta z'}{\Delta t} = 0,$$

et se réduit à

$$(3) \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

quand $\Delta t$ tend vers zéro, $x''$, $y''$, $z''$ étant les dérivées secondes des fonctions $x$, $y$, $z$ par rapport à $t$. Des relations (2) et (3) on déduit

$$\frac{A}{y'z''-z'y''}=\frac{B}{z'x''-x'z''}=\frac{C}{x'y''-y'x''},$$

et le plan osculateur a pour équation

$$(2)\qquad (y'z''-z'y'')(X-x)+(z'x''-x'z'')(Y-y) + (x'y''-y'x'')(Z-z)=0.$$

Lorsque la courbe est plane, le plan osculateur en chaque point est le plan même de la courbe. (Voyez aux nos 482 et 483 pour la longueur de l'arc et la courbure.)

## PLAN TANGENT

**474.** Considérons la surface représentée par l'équation

$$(5)\qquad f(x, y, z)=0;$$

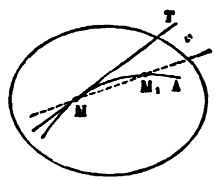



Fig. 289.

prenons sur la surface un point M ayant pour coordonnées $x$, $y$, $z$, et par ce point traçons sur la surface une courbe quelconque MA (fig. 289); quand un point mobile décrit cette courbe, les deux coordonnées $x$ et $y$ sont des fonctions de $z$, assujetties à vérifier la relation (5); leurs dérivées $x'$ et $y'$ vérifient la relation

$$(6)\qquad x'f'_x+y'f'_y+f'_z=0.$$

D'après ce que nous avons dit, la tangente à la courbe MA est représentée par les équations

$$(7)\qquad \frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}=\frac{Z-z}{1}.$$

Quand la courbe MA tracée sur la surface par le point M change, les deux fonctions $x$ et $y$ changent, ainsi que leurs dérivées. On obtiendra le lieu des tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface, en éliminant les deux paramètres variables $x'$ et $y'$ entre les équations (7) de la

tangente et l'équation de condition (6). Ce lieu a pour équation

$$(8) \qquad (X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0.$$

C'est un plan qu'on appelle *le plan tangent* à la surface au point M.

La *normale* à la surface au point M est la perpendiculaire menée par le point *m* au plan tangent à la surface en ce point; quand les axes sont rectangulaires, les équations de la normale sont

$$(9) \qquad \frac{X-x}{f'_x}=\frac{Y-y}{f'_y}=\frac{Z-z}{f'_z}.$$

Nous avons démontré qu'en général les tangentes aux diverses courbes tracées sur une surface par un point M sont dans un même plan; il y a exception lorsque les trois dérivées partielles $f'_x$, $f'_y$, $f'_z$ sont nulles au point M; car alors l'équation de condition (6) devient une identité, et, pour trouver le lieu des tangentes, il faut recourir à un calcul plus compliqué. Cette circonstance se présente au sommet d'un cône; les tangentes aux diverses courbes tracées sur la surface par ce point sont les arêtes du cône, et le lieu des tangentes est le cône lui-même. Lorsqu'une surface a un point singulier de cette sorte, le lieu des tangentes en ce point, au lieu d'être un plan, est un cône.

475. Supposons que la surface soit algébrique et du degré *m*. Si l'on remplace $x$, $y$, $z$ par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ et si l'on multiplie tous les termes par $t^m$, le premier membre devient une fonction homogène et du degré *m* des quatre variables $x$, $y$, $z$, $t$, fonction que nous représenterons par $f(x, y, z, t)$. D'après la propriété des fonctions homogènes, on a

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z+tf'_t=mf(x, y, z, t)=0,$$

et l'équation (8) se met sous la forme

$$(10) \qquad Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z+Tf'_t=0,$$

où l'on fera ensuite $t = T = 1$; les coordonnées du point de contact n'y entrent qu'au degré $m - 1$.

En appliquant cette formule aux surfaces du second degré, dont l'équation générale est

$$(11) \quad \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ &\quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0, \end{aligned}$$

on obtient pour l'équation du plan tangent,

$$(12) \quad \begin{aligned} &(Ax + B''y + B'z + C)X + (B''x + A'y + Bz + C')Y \\ &\quad + (B'x + By + A''z + C'')Z + (Cx + C'y + C''z + F) = 0. \end{aligned}$$

Comme on peut la mettre sous la forme

$$(13) \quad \begin{aligned} &(AX + B''Y + B'Z + C)x + (B''X + A'Y + BZ + C')y \\ &\quad + (B'X + BY + A''Z + C'')z + (CX + C'Y + C''Z + F) = 0. \end{aligned}$$

on remarque qu'elle ne change pas, quand on permute les lettres $x$ et $X$, $y$ et $Y$, $z$ et $Z$.

**476.** Proposons-nous maintenant de mener des plans tangents à une surface du second degré par un point donné P, non situé sur la surface et ayant pour coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$. Prenons pour inconnues les coordonnées $x$, $y$, $z$ de l'un des points de contact M; ces coordonnées doivent vérifier l'équation (11); d'autre part, le plan tangent en M devant passer par le point P, les coordonnées de ce point vérifient l'équation (12) ou l'équation (13), et l'on a

$$(14) \quad \begin{aligned} &(Ax_1 + B''y_1 + B'z_1 + C)x + (B''x_1 + A'y_1 + Bz_1 + C')y \\ &\quad + (B'x_1 + By_1 + A''z_1 + C'')z + (Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 + F) = 0. \end{aligned}$$

Le lieu du point de contact est la courbe plane suivant laquelle le plan (14) coupe la surface du second degré. Considérons le cône qui a pour sommet le point P et pour directrice cette courbe plane; par un point quelconque M de cette ligne passe une arête du cône, laquelle est située dans le plan tangent en M à la surface; ce plan, contenant aussi la tangente en M à la courbe directrice, n'est autre chose que le plan tangent au cône suivant l'arête PM; le cône est donc tangent à la surface du second degré en tous les points de la courbe directrice.

**477.** Nous terminerons par la démonstration de quelques propriétés des surfaces coniques et des surfaces réglées. Soit S le sommet d'une surface conique C, SA l'une quelconque des arêtes de la surface; menons le plan tangent au cône suivant cette arête et par le sommet une perpendiculaire SA' à ce plan. Lorsque la droite SA décrit la surface C, la droite SA' décrit une seconde surface conique C'. Considérons deux arêtes SA, SB de la première surface et les arêtes correspondantes SA', SB' de la seconde; la droite d'intersection SD des plans tangents suivant SA et SB est perpendiculaire au plan B'SA'. La droite SA restant fixe, si l'arête SB se rapproche indéfiniment de SA, la droite SD tend vers la position limite SA, et, en même temps, le plan B'SA' devient tangent au second cône suivant l'arête SA'; on en conclut que l'arête SA du premier cône est perpendiculaire au plan tangent au second cône suivant l'arête SA'. A cause de cette propriété, on dit que les deux cônes sont *réciproques* ou *supplémentaires*.

Lorsque l'origine des coordonnées est placée au sommet, une surface conique algébrique est représentée par une équation

$$f(x,y,z)=0, \tag{1}$$

dont le premier membre est une fonction entière et homogène de $x$, $y$, $z$. Si les axes sont rectangulaires, une normale menée par le sommet ayant pour équations

$$\frac{X}{f'_x}=\frac{Y}{f'_y}=\frac{Z}{f'_z}, \tag{2}$$

on obtiendra l'équation du cône supplémentaire en éliminant les rapports $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, entre l'équation (2) et l'équation (1), à laquelle on peut substituer l'équation $xX+yY+zZ=0$. Un cône du second degré

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0 \tag{3}$$

admet comme supplémentaire un cône du second degré

$$\begin{aligned}(A'A''-B^2)X^2+(A''A-B'^2)Y^2+(AA'-B''^2)Z^2+2(B'B''-AB)YZ\\ +2(B''B-A'B')ZX+2(BB'-A''B'')XY=0.\end{aligned} \tag{4}$$

Le calcul qu'il faut faire, pour passer de l'équation (3) à l'équation (4), est identique à celui que l'on fait en géométrie plane pour passer de l'équation d'une conique en coordonnées rectilignes à son équation en coordonnées tangentielles.

**478.** Si l'on rapporte le cône à un autre système d'axes rectangulaires, menés par le sommet, le premier membre de l'équation (3), qui est un polynôme homogène et du second degré en $x$, $y$, $z$, se transforme en un polynôme homogène et du second degré

$$A_1x'^2+A'_1y'^2+A''_1z'^2+2B_1y'z'+2B'_1z'x'+2B''_1x'y'$$

en $x'$, $y'$, $z'$, et, d'après les relations (7) et (8) du n° 423, on a

(5) $$A_1 + A'_1 + A''_1 = A + A' + A''.$$

De cette relation on déduit aisément la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation (3) pour que l'on puisse placer sur le cône les arêtes d'un angle trièdre trirectangle.

Supposons en effet la coïncidence établie ; si l'on prend les trois arêtes pour nouveaux axes des coordonnées, l'équation du cône devant se réduire à la forme

$$2B_1 y'z' + 2B'_1 z'x' + 2B''_1 x'y' = 0,$$

on aura $A_1 = A'_1 = A''_1 = 0$ et par suite

(6) $$A + A' + A'' = 0.$$

Réciproquement, quand cette condition est remplie, on peut placer l'angle trièdre trirectangle sur le cône d'une infinité de manières. Prenons en effet une arête quelconque du cône pour axe des $z'$ et dans le plan perpendiculaire à cette arête deux droites rectangulaires pour axes des $x'$ et des $y'$ ; l'équation du cône étant de la forme

$$A_1 x'^2 + A'_1 y'^2 + 2B_1 y'z' + 2B'_1 z'x' + 2B''_1 x'y' = 0.$$

on a $A''_1 = 0$ et par suite, en vertu de la relation (5), $A_1 + A'_1 = 0$, ce qui signifie que le plan des $x'y'$ coupe le cône suivant deux arêtes rectangulaires. On dit alors que *le cône est capable d'un angle trièdre trirectangle inscrit.*

Lorsqu'un angle trièdre trirectangle a ses trois faces tangentes au cône (3), ses arêtes sont situées sur le cône supplémentaire (4). La condition pour que ceci ait lieu est

$$A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0.$$

Quand cette condition est remplie, il existe une infinité d'angles trièdres trirectangles circonscrits au cône et l'on dit que *le cône est capable d'un angle trièdre trirectangle circonscrit.*

Problème. — Étant donné un cône du second degré représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0,$$

exprimer que le plan

(P) $$ux + vy + wz = 0$$

coupe ce cône suivant deux génératrices rectangulaires.

L'équation

(C) $$\varphi(x, y, z) - \lambda(ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z) = 0$$

représente, quels que soient $\lambda$, $u'$, $v'$, $w'$, un cône du second degré passant par les deux génératrices G et G' suivant lesquelles le plan P

coupe le cône donné. Déterminons $\lambda$ de façon que le cône C contienne l'axe du plan P qui a pour équations $\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}$ ; nous aurons

$$\varphi(u, v, w)-\lambda(u^2+v^2+w^2)(uu'+vv'+ww')=0.$$

La constante $\lambda$ étant ainsi déterminée, le cône auxiliaire C est capable d'un trièdre trirectangle inscrit, formé par les génératrices G et G′ et l'axe du plan P. On a donc, en écrivant, que, dans l'équation (C), la somme des coefficients des carrés $x^2, y^2, z^2$, est nulle

$$A+A'+A''-\lambda(uu'+vv'+ww')=0,$$

d'où, en remplaçant $\lambda$ $(uu'+vv'+ww')$ par sa valeur $\frac{\varphi(u, v, w)}{u^2+v^2+w^2}$,

$$\varphi(u, v, w)-(A+A'+A'')(u^2+v^2+w^2)=0$$

Telle est la condition demandée.

**479.** Si d'un point fixe O on même des parallèles $Og$ aux diverses positions de la géneratrice G d'une surface réglée, on forme un cône que l'on appelle ***cône directeur*** de la surface réglée et qui joue un rôle important dans l'étude de la surface. Nous avons dit (nº 460) que les surfaces réglées se divisent en deux grandes classes, celle des surfaces gauches et celle des surfaces développables. Étant données les équations de la génératrice

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c} \tag{8}$$

dans lesquelles $x, y, z, a, b, c$ sont des fonctions d'une même variable $t$, cherchons d'abord la condition pour que la surface soit développable, c'est-à-dire pour que la génératrice, dans toutes ses positions, soit tangente à une courbe C. En appelant $\rho$ la valeur commune des rapports (8) on a, pour les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice

$$X=x+a\rho \quad , \quad Y=y+b\rho \quad , \quad Z=z+c\rho \quad ;$$

appelons, en particulier, $\rho_0$ la valeur qu'il faut donner à $\rho$ pour obtenir le point de contact M de la droite avec la courbe et soient $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées de ce point; cette valeur $\rho_0$ sera une fonction de $t$ et l'on aura

$$x_0=x+a\rho_0 \quad , \quad y_0=y+b\rho_0 \quad , \quad z_0=z+c\rho_0.$$

En désignant par des accents les dérivées de toutes ces fonctions de $t$, on a

$$x_0'=x'+a'\rho_0+a\rho_0' \; , \; y_0'=y'+b'\rho_0+b\rho_0' \; , \; z_0'=z'+c'\rho_0+c\rho_0'. \tag{10}$$

Puisque la tangente à la courbe C, lieu du point M, coïncide avec la génératrice G, les quantités $x_0', y_0', z_0'$ doivent être proportionnelles

à $a, b, c$. On doit donc avoir, en désignant par $\lambda$ un coefficient de proportionnalité

$$(11) \qquad x' + a'\rho_0 + a(\rho'_0 - \lambda) = 0 \quad , \quad y' + b'\rho_0 + b(\rho'_0 - \lambda) = 0 \quad ,$$
$$z' + c'\rho_0 + c(\rho'_0 - \lambda) = 0.$$

Pour que la surface soit développable il faut que ces trois équations du premier degré en $\rho_0$ et $\rho'_0 - \lambda$ soient compatibles, c'est-à-dire que l'on ait

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie, le point M défini par les équations (9), dans lesquelles $\rho_0$ a la valeur tirée de (11), décrit une courbe C dont la tangente en M coïncide avec la génératrice G. La surface est donc développable, et la courbe C en est l'arête de rebroussement.

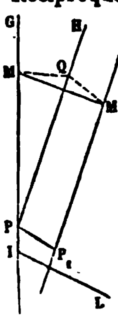


Fig 290.

**480.** Considérons maintenant une surface réglée quelconque. Soient G et $G_1$ deux positions voisines de la génératrice, correspondant aux valeurs $t$ et $t + \Delta t$ de la variable, $PP_1$ la perpendiculaire commune à ces deux droites (fig. 290). Si l'on désigne par $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ les valeurs des fonctions $a, b, c, x, y, z$ qui correspondent à la valeur $t + \Delta t$ de la variable, les équations des génératrices G et $G_1$ seront

$$(G) \qquad X = x + a\rho \quad , \quad Y = y + b\rho \quad , \quad Z = z + c\rho,$$
$$(G_1) \qquad X = x + \Delta x + (a + \Delta a)\,\rho_1 \;\ldots\ldots$$

La valeur de $\rho$ qui correspond au point P situé sur la génératrice G est donnée par la formule

$$\rho = \frac{\begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ a + \Delta a & b + \Delta b & c + \Delta c \\ b\Delta c - c\Delta b & c\Delta a - a\Delta c & a\Delta b - b\Delta a \end{vmatrix}}{(b\Delta c - c\Delta b)^2 + (c\Delta a - a\Delta c)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}$$

comme on le voit en suivant la méthode du n° 457. En divisant le numérateur et le dénominateur de $\rho$ par $\Delta t^2$ et faisant tendre $\Delta t$ vers zéro, on trouve que $\rho$ tend vers une limite $\rho_0$ donnée par la formule

$$(13) \qquad \rho_0 = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}$$

dans laquelle on a posé, pour abréger

(14) $A = bc' - cb'$ , $B = ca' - ac'$ , $C = ab' - ba'$ ;

on en conclut que le point P tend vers une position limite I sur la génératrice G.

Lorsque la surface est développable, le point I est le point où la génératrice G touche l'arête de rebroussement. Lorsque la surface est gauche, le point I s'appelle *point central* sur la génératrice G, et le lieu du point I *ligne de striction* de la surface. Quand le cône directeur de la surface se réduit à un plan, on voit facilement que la projection orthogonale de la ligne de striction sur ce plan est l'enveloppe des projections des diverses positions de la génératrice.

Si l'on désigne par $r$ la plus courte distance $PP_1$, de la formule (24) du n° 457 on déduit

(15) $$\lim\left(\frac{r}{\Delta t}\right) = \frac{Ax' + By' + Cz'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Lorsque la surface est développable, cette limite est nulle, quelle que soit la génératrice; mais, dans le cas contraire, elle ne s'annule que pour quelques positions particulières de la génératrice.

En appelant $\varphi$ l'angle des deux génératrices G et $G_1$, on a

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(b\Delta c - c\Delta b)^2 + (c\Delta a - a\Delta c)^2 + (a\Delta b - b\Delta a)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + (c + \Delta c)^2}}$$

d'où

(16) $$\lim\frac{\varphi}{\Delta t} = \lim\frac{\sin\varphi}{\Delta t} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{a^2 + b^2 + c^2}$$

et, par suite,

(17) $$\lim\frac{r}{\varphi} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(Ax' + By' + Cz')}{A^2 + B^2 + C^2} = k.$$

Lorsque la surface est gauche, le rapport $\frac{r}{\varphi}$ tend vers une limite $k$ différente de zéro, excepté pour certaines génératrices particulières.

**480 *bis*.** Par le point P menons une parallèle PH à la génératrice G; un plan mené par un point quelconque M de la génératrice G perpendiculairement à cette droite coupe les droites PH et $G_1$ aux points Q et $M_1$. Lorsque $G_1$ se rapproche de G, le plan GPH tend vers un plan limite T parallèle au plan tangent au cône directeur suivant l'arête $Og$ parallèle à G. Le plan $GPP_1$ perpendiculaire à GPH tend vers un plan limite $T_1$ perpendiculaire à T et le plan $PMM_1$ tend vers le plan tangent en M à la surface réglée. Nous désignerons par $\theta$ l'angle que fait ce plan tangent avec le plan fixe $T_1$. Le triangle $QMM_1$ donne

$$\cot QMM_1 = \frac{MQ}{M_1Q} = \frac{MP\tang\varphi}{PP_1} = MP\frac{\tang\varphi}{\varphi}\frac{\varphi}{r};$$

l'angle $QMM_1$ ayant pour limite le complément de $\theta$, on déduit de la relation précédente

$$\tag{18} \tang \theta = \frac{\rho}{k};$$

en désignant par $\rho$ la longueur IM.

Lorsque la surface est développable, $k$ étant nul, l'angle $\theta$ est droit, et, par conséquent, le plan tangent en un point quelconque M de la génératrice G coïncide avec le plan T, qui n'est autre chose que le plan osculateur à l'arête de rebroussement (n° 473). Lorsque la surface est gauche, le plan $T_1$ est le plan tangent au point central. Si le point M se meut sur la génératrice G, $\rho$ variant de $-\infty$ à $+\infty$, $\theta$ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et le plan tangent tourne autour de la génératrice, à mesure que le point M se déplace. Tout plan mené par cette droite est tangent en un point M et en un seul. Le nombre $k$ est le *paramètre de rotation du plan tangent* relatif à la génératrice G.

Considérons une seconde surface réglée ayant avec la première une génératrice commune G. Soient $\rho_0$ la distance des points centraux I et I′ sur cette génératrice, $\theta_0$ et $\theta$ les angles que font avec le plan $T_1$ les plans tangents à la seconde surface aux points I′ et M; on aura

$$\tag{19} \tang(\theta - \theta_0) = \frac{\rho - \rho_0}{k_1},$$

$k_1$ désignant le paramètre de rotation du plan tangent pour la *seconde* surface. On obtiendra les points de la génératrice G, où les deux surfaces ont le même plan tangent, en résolvant les deux équations simultanées (18) et (19). L'élimination de $\theta$ conduit à l'équation du second degré en $\rho$

$$\tag{20} \rho^2 \tang \theta_0 - (\rho_0 \tang \theta_0 + k_1 - k)\rho - k(\rho_0 - k_1 \tang \theta_0) = 0.$$

On en conclut que les deux surfaces ont le même plan tangent en deux points de la génératrice commune. Pour que les deux surfaces aient le même plan tangent en trois points de la génératrice, il faut que l'équation (20) devienne une identité; alors les deux surfaces ont le même plan tangent en tous les points de la génératrice; elles se *raccordent* suivant cette droite. Pour qu'il y ait raccordement, il faut que les points centraux coïncident, ainsi que les plans tangents en ce point, et en outre que les deux paramètres $k$ et $k_1$ soient égaux.

Lorsque les surfaces réglées sont des surfaces à plan directeur et que le plan directeur est le même pour les deux surfaces, l'angle $\theta_0$ est nul et l'équation (20) s'abaisse au premier degré; il n'existe sur la génératrice commune qu'un point où les deux surfaces ont le même plan tangent. Pour que les deux surfaces se raccordent, il faut que les points centraux coïncident et que les deux paramètres $k$ et $k_1$ soient égaux

### SIMILITUDE.

**481.** La définition de l'*homothétie* et de la *similitude* pour les figures à trois dimensions est la même que pour les figures à deux dimensions (liv. IV, chap. v). En Géométrie plane, si l'on fait abstraction de la position des systèmes, l'homothétie inverse ne donne pas d'autres figures que l'homothétie directe; il n'en est plus de même pour les figures dans l'espace. Considérons un premier système de points A, B, C..., et, après avoir choisi arbitrairement un centre de similitude, construisons un système A′, B′, C′,..., homothétique direct, et un système A″, B″, C″,... homothétique inverse, avec le même rapport de similitude $k$; ces deux systèmes sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de similitude. Il résulte de là que les systèmes homothétiques inverses du système donné sont les symétriques des systèmes homothétiques directs.

Une figure est semblable à une figure donnée lorsque, par un déplacement convenable, elle peut coïncider avec l'une des figures directement homothétiques à la figure donnée.

On sait que l'on obtient toutes les surfaces semblables à une surface donnée, en prenant arbitrairement un centre de similitude, et en construisant avec ce centre les diverses surfaces homothétiques directes qui correspondent aux valeurs de $k$ comprises entre o et $\infty$.

Exemple I. La surface donnée est une sphère. Prenons le centre de la sphère O pour centre de similitude; le rayon OA étant constant, le rayon OA′ sera également constant : *une surface semblable à une sphère est une autre sphère qui peut avoir un rayon quelconque.*

Exemple II. La surface donnée est un cône. Prenons le sommet pour centre de similitude; deux points homologues seront situés sur la même génératrice du cône. *La seule figure semblable à un cône est ce cône lui-même.*

Exemple III. Le surface est un cylindre. Prenons un point arbitraire O pour centre de similitude, et traçons sur le cylindre une courbe arbitraire C que nous prendrons pour directrice du cylindre. A la courbe C correspond une courbe homothétique C′ et à toute génératrice du premier cylindre une droite parallèle passant par le point

homologue du point où la courbe C est rencontrée par la première génératrice; ainsi, *deux cylindres sont homothétiques, lorsqu'ils ont pour directrices deux courbes homothétiques et leurs génératrices parallèles.*

Considérons deux cylindres homothétiques, ayant le point O pour centre de similitude; si l'on mène par ce point une parallèle OO′ aux génératrices des deux surfaces, tout point de cette droite est aussi un centre de similitude des deux surfaces. Il en résulte que les sections de deux cylindres homothétiques par le même plan sont des courbes homothétiques, ayant pour centre de similitude le point où le plan coupe la droite OO′. Comme les sections d'un cylindre par des plans parallèles sont égales, les sections de deux cylindres homothétiques par des plans parallèles sont homothétiques.

482. *Les sections d'une surface du second degré par des plans parallèles sont des courbes homothétiques.* L'équation générale des surfaces du second degré est

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0;$$

on obtient la projection sur le plan XOY de l'intersection de cette surface et du plan

$$(2) \qquad ax + by + cz = l,$$

en éliminant la variable $z$ entre les équations (1) et (2). Or, dans l'équation ainsi obtenue, les coefficients des termes du second degré sont indépendants de $l$; on en conclut que, lorsque $l$ varie, $a$, $b$, $c$ restant fixes, c'est-à-dire lorsque le plan se déplace parallèlement à lui-même, les projections sont homothétiques; les cylindres projetants, ayant pour directrices des courbes homothétiques, sont coupés par deux plans parallèles suivant des courbes homothétiques. Quand ces courbes sont des hyperboles, l'une peut être homothétique à la conjuguée de l'autre (n° 394).

## COURBES

483. *Longueur d'un arc de courbe.* Soit dans l'espace une courbe plane ou gauche, telle que les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe s'expriment en fonction d'un paramètre $t$ par les trois équations

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t)$$

Supposons que $t$ variant de $a$ à $b$ les fonctions $f$, $\varphi$, $\psi$ soient continues et admettent des dérivés, $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ également continues : enfin, supposons que $t$ variant de $a$ à $b$ $(a < b)$ le point M $(x, y, z)$ décrive un arc de courbe AB en se déplaçant toujours dans le même sens.

Prenons alors une série de valeurs de $t$ comprises dans l'intervalle $a$, $b$ et rangées par ordre de grandeurs croissantes

$$t_1, t_2 \ldots t_{n-1},$$

à ces valeurs de $t$ correspondent sur la courbe des points $M_1 M_2 \ldots M_{n-1}$. Nous allons démontrer que le contour polygonal $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ tend vers une limite quand, le nombre $n$ augmentant indéfiniment, toutes les différences

$$t_1 - a,\ t_2 - t_1,\ t_3 - t_2 \ldots,\ b - t_{n-1}$$

tendent vers zéro. Cette limite est ce que l'on appelle la *longueur de l'arc* AB. Pour démontrer l'existence de cette limite, remarquons que le côté $M_kM_{k+1}$ a pour longueur

$$M_kM_{k+1} = \sqrt{[f(t_{k+1}) - f(t_k)]^2 + [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2}$$

Or, les rapports

$$\frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k},\quad \frac{\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)}{t_{k+1} - t_k}, \text{ etc.}$$

tendent vers les dérivées $f'(t_k)$, $\varphi'(t_k) \ldots$ quand $t_{k+1} - t_k$ tend vers zéro et, par conséquent, le rapport $\frac{M_kM_{k+1}}{t_{k+1} - t_k}$ tend vers la limite

$$\sqrt{f'^2(t_k) + \varphi'^2(t_k) + \psi'^2(t_k)}$$

Nous pouvons donc écrire

$$M_kM_{k+1} = (t_{k+1} - t_k)\left[\sqrt{f'^2(t_k) + \varphi'^2(t_k) + \psi'^2(t_k)} + \varepsilon_k\right]$$

$\varepsilon_k$ étant une quantité qui tend vers zéro en même temps que $t_{k+1} - t_k$. Telle est l'expression de l'un des côtés du polygone inscrit dans la courbe. Pour avoir le périmètre P de ce polygone, faisons la somme des côtés $M_kM_{k+1}$, en donnant successivement à $k$ les valeurs 0, 1, 2… $n-1$ et remarquant que $t_0 = a$, et $t_n = b$. Nous aurons

$$P = \Sigma(t_{k+1} - t_k)\sqrt{f'^2(t_k) + \varphi'^2(t_k) + \psi'^2(t_k)} + \Sigma(t_{k+1} - t_k)\varepsilon_k.$$

Quand le nombre des points de division $t_1, \ldots t_{n-1}$ augmente indéfiniment, chaque différence $t_{k+1} - t_k$ tendant vers zéro, la première somme tend vers l'intégrale définie

$$(1) \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Quant à la deuxième, elle tend vers zéro : en effet, en appelant $\varepsilon$ un nombre positif égal en valeur absolue à celle des quantités $\varepsilon_k$ qui a la plus grande valeur absolue, on voit que la valeur absolue de $\Sigma(t_{k+1} - t_k)\varepsilon_k$ est moindre que $\varepsilon\Sigma(t_{k+1} - t_k)$, c'est-à-dire moindre que $\varepsilon(b-a)$, car

$$\Sigma(t_{k+1} - t_k) = t_1 - a + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + \ldots + b - t_{n-1} = b-a;$$

d'après les hypothèses faites sur la nature des fonctions $f, \varphi, \psi$, $\varepsilon$ tend vers zéro, quand toutes les différences $t_{k+1} - t_k$ tendent vers zéro et la somme $\Sigma(t_{k+1} - t_k)\varepsilon_k$ tend bien vers zéro. Le périmètre P tend donc vers l'intégrale définie (1) : cette limite de P est la longueur de l'arc de courbe considéré.

Si au lieu de calculer l'arc AB tout entier, on avait calculé la longueur $s$ d'un arc AM, M correspondant à une valeur de $t$ comprise entre $a$ et $b$, on aurait trouvé de même

$$s = \int_a^t \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt :$$

d'où, en différenciant et remarquant que

$$dx = f'(t)dt,\ dy = \varphi'(t)dt,\ dz = \psi'(t)dt$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Cette formule est aisée à retenir, car elle exprimé que l'élément infiniment petit de courbe joignant les points $(x, y, z)$ et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ est égal à la corde joignant ces deux points.

*Exemple :* Soit la *chaînette* construite au n° 348.

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Cette courbe étant plane, on a $z = 0$, $dz = 0$, puis

$$dy = y'dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)dx.$$

Donc

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

comme on le vérifie en formant $1 + y'^2$ et remarquant que cette expression est un carré parfait. La longueur de l'arc $s$ depuis le point le plus bas de la courbe (voyez fig. 222, n° 348) qui correspond à $x = o$ jusqu'en un point M d'abcisse $x$ est donc

$$s = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

cette formule peut s'écrire

$$s = ay' = a \tang \alpha$$

en appelant $\alpha$ l'angle de la tangente en M avec $Ox$; $s$ est donc un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'autre côté est $a$ et l'angle opposé $\alpha$.

*Cosinus directeurs de la tangente.* — Nous avons indiqué dans le n° 472 les expressions des cosinus directeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de la tangente MT menée à la courbe dans le sens des $t$ croissants : comme l'arc $s$ est compté positivement dans ce même sens, les valeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les cosinus directeurs de la tangente MT menée à la courbe dans le sens des arcs $s$ croissants : leurs expressions peuvent s'écrire sous la forme simple suivante :

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \ \beta = \frac{dy}{ds}, \ \gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$\text{car } dx = x'dt, \ ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt, \text{ etc...}$$

**484.** *Courbure.* Pour mesurer la courbure d'une courbe, on la compare à un cercle. Imaginons un cercle de rayon R sur lequel on a choisi un sens positif pour les arcs et le même sens positif pour les tangentes MT. Prenons un arc $MM_1$ de longueur $\Delta s$ dans ce sens positif et appelons $\Delta\sigma$ la valeur absolue de l'angle dont tourne la tangente MT au cercle quand le point de contact se déplace de M en $M_1$. D'après les propriétés élémentaires du cercle, on a

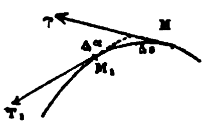


Fig. 290 bis.

$$\Delta s = R\Delta\sigma, \quad R = \frac{\Delta s}{\Delta\sigma}.$$

On a ainsi une expression du rayon : l'inverse $\frac{1}{R}$ s'appelle la courbure du cercle

$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$$

Passons maintenant à une courbe quelconque. — Pour traiter d'abord un cas simple, prenons une courbe plane sur laquelle on choisit un sens positif pour les arcs et le même sens MT pour les tangentes (fig. 290 *bis*). Soit encore $\Delta s$ un arc $MM_1$ compté dans le sens positif, et $\Delta\sigma$ la valeur absolue de l'angle dont tourne la tangente à la courbe quand le point de contact passe de M en $M_1$; on appelle, par analogie avec le cas du cercle, *courbure moyenne* de l'arc

$MM_1$ le rapport $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$, et courbure au point M la limite $\frac{d\sigma}{ds}$ vers laquelle tend ce rapport quand $\Delta s$ tend vers zéro. L'inverse de la courbure au point M, $\rho = \frac{ds}{d\sigma}$ s'appelle *rayon de courbure au point* M.

Comme $\Delta\sigma$, $\Delta s$ sont positifs, les éléments que nous venons de définir sont tous positifs.

Calculons l'expression de la courbure. Soit $\alpha$ l'angle que fait la tangente MT avec $Ox$, on a

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx}, \quad \alpha = \operatorname{arctang} \frac{dy}{dx}.$$

Quand on passe de M en $M_1$, l'angle $\alpha$ varie de $\Delta\alpha$ et la valeur absolue $\Delta\sigma$ de l'angle dont la tangente tourne est $\pm\Delta\alpha$ où il faut prendre $+$ ou $-$, suivant que $\Delta\alpha$ est positif ou négatif. La courbure moyenne de l'arc $MM_1$ est donc

$$\pm\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

le rayon de courbure $\rho$ au point M est donné par

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{d\alpha}{ds} = \pm\frac{d\operatorname{arctang}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

c'est-à-dire en effectuant la différenciation indiquée

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En particulier, si $x$ est pris comme variable indépendante, $d^2x = 0$, on a

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

en désignant les dérivées de $y$ par rapport à $x$, par $y'$ et $y''$. Le signe doit être choisi de telle façon que $\rho$ soit positif : il faut donc mettre $+$ quand $y'' > 0$, c'est-à-dire quand la courbe au point considéré tourne sa concavité vers les $y$ positifs, et $-$ dans le cas contraire. En un point d'inflexion, $\rho$ est infini.

Exemple. *Rayon de courbure d'une conique.* — Soit $n$ la longueur de la normale à une courbe plane comprise entre le point M et l'axe $Ox$:

$$n = \pm y\sqrt{1 + y'^2}.$$

On peut écrire, dans le cas général,

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{y''y^3}{n^3}$$

Or, pour une conique rapportée à son axe focal et à la tangente au sommet (263)

$$y = \sqrt{2px + qx^2}, \quad y'' = \frac{-p^2}{y^3},$$

donc

$$\rho = \frac{n^3}{p^2}.$$

**484 *bis*.** Établissons maintenant les formules générales qui s'appliquent aux courbes gauches et aux courbes planes.

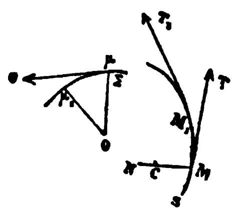


Fig. 290 ter.

Soit une courbe gauche ou plane S sur laquelle on a choisi un sens positif pour les arcs et le même sens pour les tangentes MT. Considérons une sphère de centre O et de rayon 1 : par le centre O, menons un rayon $O\mu$ parallèle à MT et de même sens que MT : quand le point M décrit la courbe S dans le sens des arcs croissants, le point $\mu$ décrit une courbe $\Sigma$ dont nous appellerons l'arc $\sigma$. Soit $MM_1 = \Delta s$ un arc de la courbe S, $\mu\mu_1 = \Delta\sigma$ l'arc correspondant de $\Sigma$; on appelle courbure moyenne de l'arc $MM_1$ le rapport $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ : la courbure $\frac{1}{\rho}$ en M est la limite du rapport précédent quand $M_1$ tend vers M.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds};$$

l'inverse $\rho$ est le rayon de courbure.

Cette définition est bien d'accord avec celle que nous avons donnée plus haut pour les courbes planes; car, si la courbe S est plane, la courbe $\Sigma$ l'est aussi. Cette courbe est alors un cercle de rayon 1 et l'arc $\Delta\sigma$ mesure l'angle des tangentes MT et $M_1T_1$.

Revenons au cas général; le point $\mu$ a pour coordonnées les cosinus directeurs de la tangente MT

$$(\mu) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

donc l'arc de courbe lieu du point $\mu$ a pour différentielle

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}$$

et on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Si l'on prend l'arc $s$ comme variable indépendante, on a

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\sigma}{ds}=\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

Si la variable indépendante n'est pas spécifiée, ces formules permettent d'exprimer $\rho$ en fonctions des différentielles premières et secondes des coordonnées $x, y, z$. Remarquons en effet que la relation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

et la relation qu'en en déduit par différentiation

$$\alpha d\alpha+\beta d\beta+\gamma d\gamma=0$$

permettent d'écrire

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2)-(\alpha d\alpha+\beta d\beta+\gamma d\gamma)^2 \\ &= (\gamma d\beta-\beta d\gamma)^2+(\alpha d\gamma-\gamma d\alpha)^2+(\beta d\alpha-\alpha d\beta)^2 \\ &= \gamma^4\left(d\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\alpha^4\left(d\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\beta^4\left(d\frac{\alpha}{\beta}\right)^2. \end{aligned}$$

Les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant égales à $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, le premier terme de la dernière expression est

$$\frac{dz^4}{ds^4}\left(d\frac{dy}{dz}\right)^2=\frac{(dzd^2y-dyd^2z)^2}{ds^4}.$$

On calcule de même les deux termes suivants et on trouve pour le carré de la courbure

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{(dzd^2y-dyd^2z)^2+(dxd^2z-dzd^2x)^2+(dyd^2x-dxd^2y)^2}{(dx^2+dy^2+dz^2)^3},$$

formule dans laquelle la variable indépendante n'est pas spécifiée.

*Normale principale.* — Soit $\mu\theta$ la tangente à la courbe sphérique $\Sigma$ menée dans le sens dans lequel se déplace le point $\mu$ quand le point M décrit la courbe S dans le sens positif des arcs. Par M menons une droite MN parallèle à $\mu\theta$ et dirigée dans le même sens que $\mu\theta$ : cette droite s'appelle la *normale principale ;* elle est normale à la courbe et située dans le plan osculateur. En effet, la droite $\mu\theta$ est perpendiculaire à la droite $O\mu$ qui est parallèle à la tangente MT et elle est située dans le plan tangent au cône lieu des droites $O\mu$ le long de $O\mu$, plan qui est parallèle au plan osculateur, d'après la définition même du plan osculateur. Le point C obtenu en prenant sur MN dans le sens MN une longueur $MC=\rho$ s'appelle le *centre de courbure* de la courbe au point M. Soient $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les cosinus directeurs de la normale principale MN ou de sa parallèle $\mu\theta$; en appliquant à la courbe $\Sigma$ lieu du point $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les formules qui donnent les cosinus directeurs de la tangente, on a

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma},\ \beta' = \frac{d\beta}{d\sigma},\ \gamma' = \frac{d\gamma}{d\sigma}$$

ou en remplaçant $d\sigma$ par $\dfrac{ds}{\rho}$

$$\alpha' = \rho\frac{d\alpha}{ds},\ \beta' = \rho\frac{d\beta}{ds},\ \gamma' = \rho\frac{d\gamma}{ds}.$$

Les coordonnées ($\xi$, $\eta$, $\zeta$,) du point C sont alors

$$\xi = x + \rho\alpha' = x + \rho^2\frac{d\alpha}{ds}, \text{ etc.}$$

Exercice. *Démontrer que le rayon de courbure $\rho$ est la limite vers laquelle tend le rayon d'un cercle passant par le point M et par deux points $M_1$ et $M_2$ de la courbe S infiniment voisins de $M_1$.*

D'après une formule élémentaire de trigonométrie, le diamètre du cercle circonscrit au triangle $M_1MM_2$ est

$$2R = \frac{M_1M_2}{\sin M_1MM_2}.$$

Donc, en appelant $x$, $y$, $z$, les coordonnées de $M_1$, $x_1, y_1, z_1$ et $x_2$, $y_2$, $z_2$ celles de $M_1$ et $M_2$, on a

$$2R = \frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+\ldots}\sqrt{(x_1-x)^2+\ldots}\sqrt{(x_2-x)^2+\ldots}}{\sqrt{[y_1-y)(z_2-z)-(z_1-z)(y_2-y)]^2+\ldots}}$$

Les coordonnées $x$, $y$, $z$ sont des fonctions données du paramètre $t$; celles du point voisin $M_1$ s'obtiennent en faisant croître $t$ de $h$; on a donc par la formule de Taylor

$$x_1 = x + \frac{h}{1}x' + \frac{h^2}{1.2}x'' + \ldots$$

$x'$ $x''$ ... désignant les dérivées de $x$: et deux formules analogues pour $y_1$ et $z_1$.

De même les cordonnées du point $M_2$ s'obtiennent en faisant croître $t$ de $k$

$$x_2 = x + \frac{k}{1}x' + \frac{k^2}{1,2}x'' + \ldots$$

et deux formules analogues pour $y_2$ et $z_2$. Substituant dans l'expression de $2R$, on voit que, au numérateur, dans le premier facteur $\sqrt{(x_1-x_2)^2+\ldots}$ on peut mettre $h-k$ en facteur, et dans les deux autres respectivement $h$ et $k$. De même au dénominateur on peut mettre en facteur $(h-k)\,hk$, Supprimant ces facteurs, puis faisant tendre $h$ et $k$ vers zéro, on trouve comme limite de $k$ la valeur

$$\rho = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}},$$

qui est bien le rayon de courbure trouvé plus haut.

On démontrera que le centre du cercle $M_1MM_2$ tend vers le centre de courbure C précédemment défini.

## EXERCICES

1° L'axe d'un cône de révolution passe à l'origine des coordonnées et fait avec les axes des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, l'angle du cône est $\theta$; trouver l'équation de la surface. Comme application, trouver les conditions pour que l'équation homogène du second degré représente un cône de révolution.

2° Étant donné un ellipsoïde de révolution aplati (surface engendrée par une ellipse tournant autour de son petit axe), *le cône*, engendré par une droite qui tourne autour du foyer de l'une des ellipses méridiennes en s'appuyant sur la section faite dans la surface par un plan passant par la directrice qui correspond à ce foyer, est un cône de révolution.

3° Étant donné un ellipsoïde de révolution allongé (surface engendrée par une ellipse tournant autour de son grand axe), le cône, qui a pour sommet l'un des deux foyers des sections méridiennes et pour base une section plane quelconque, est un cône de révolution.

4° La projection d'une section plane d'un cône circulaire droit sur un plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône a pour l'un de ses foyers le sommet du cône, et pour directrice correspondante la droite de rencontre des deux plans.

5° Lorsqu'une section plane d'un cône circulaire droit est une ellipse, la somme des arêtes qui aboutissent aux extrémités d'un diamètre de l'ellipse est constante.

6° Démontrer qu'un plan tangent au tore et passant par le centre coupe la surface suivant deux cercles.

La sphère qui a pour grand cercle un cercle tangent aux deux cercles qui forment l'un des méridiens du tore coupe la surface suivant deux cercles.

7° Trouver la section droite d'un cylindre circonscrit à un tore.

8° Démontrer que les six arêtes de deux trièdres trirectangles, ayant même sommet, appartiennent à un même cône du deuxième degré.

9° Étant donné un conoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan directeur et qui enveloppe une sphère, trouver les projections de la courbe de contact sur le plan directeur et sur le plan mené par l'axe et le centre de la sphère.

10° Étant donné un système d'axes rectangulaires, un tore a pour méridien dans le plan ZOX un cercle qui a son centre sur l'axe OX; cet axe rencontre le cercle en un point A, centre d'un nouveau cercle égal au premier et compris dans un plan parallèle à ZOY, une droite qui reste parallèle au plan XOY décrit un conoïde en s'appuyant sur ce second cercle et sur l'axe OZ; on demande la projection sur le plan XOY de la courbe de rencontre des deux surfaces.

11° On suppose que le plan du second cercle du problème précédent s'enroule sur un cylindre circonscrit au tore et ayant des arêtes parallèles à l'axe du tore, on remplace la directrice courbe du conoïde par la courbe en laquelle s'est transformé le cercle après l'enroulement du plan; trouver la projection sur le plan XOY de la ligne de rencontre du nouveau conoïde et du tore (spirale d'Archimède).

12° Une sphère a son centre à l'origine des coordonnées que l'on suppose rectangulaires, l'axe OX perce la sphère en un point A; dans le plan XOY, sur OA comme diamètre, on décrit un cercle qui sert de base à un cylindre dont les arêtes sont parallèles à OZ; trouver : 1° les projections sur les trois plans coordonnés de la courbe d'intersection du cylindre et de la sphère; 2° l'équation du cône qui a pour directrice cette courbe et pour sommet le point A (ce cône est un cône de révolution); 3° les traces sur les plans des coordonnées des tangentes à la courbe.

13° Étant donnés trois plans de coordonnées rectangulaires, puis dans le plan $xy$ une circonférence qui a son centre à l'origine des coordonnées, et dans les plans $zx$, $zy$ deux droites parallèles respectivement à l'axe des $x$ et à l'axe des $y$, à égale distance du plan des $xy$ de part et d'autre de ce plan, trouver l'équation de la surface gauche engendrée par une droite qui glisse sur les deux droites données et sur la circonférence. Étudier les sections faites dans la surface par des plans parallèles aux plans coordonnés.

14° Trouver l'équation de la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe d'un cône de révolution, d'une courbe tracée sur le cône et qui se transforme en une ligne droite lorsqu'on développe le cône sur un plan.

15° On donne un cône de révolution engendré par un angle de 30 degrés, un cylindre dont les génératrices parallèles à l'une des arêtes du cône ont pour directrice un cercle ayant son centre au sommet du cône et dont le plan est perpendiculaire à l'axe. Démontrer que la courbe d'intersection des deux surfaces se transforme en une ligne droite quand on développe le cône sur un plan.

16° Trouver l'équation du méridien d'une surface de révolution dé-

crite par un econique qui tourne autour d'une droite perpendiculaire à l'un des axes de la conique et qui rencontre cet axe.

17° Trouver l'équation du méridien d'une surface de révolution décrite par une conique qui tourne autour d'une droite située dans un plan perpendiculaire à celui de la conique et passant par l'un des axes de cette courbe.

18° Les points O et O′ sont les centres de deux circonférences égales dont les plans sont parallèles; trouver l'équation de la surface gauche décrite par une droite qui glisse sur les deux circonférences et sur la perpendiculaire à leurs plans menée par le milieu de la droite OO′.

19° On considère la courbe gauche décrite par le point $(x, y, z)$ dont les coordonnées sont exprimées en fonction d'un paramètre $t$ par les formules

$$x = \sqrt{\varphi'(t)} \quad , \quad y = t\sqrt{\varphi'(t)} \quad , \quad z = k\varphi(t)$$

$\varphi(t)$ désignant une fonction de $t$ et $\varphi'(t)$ la dérivée de cette fonction. Démontrer :

1° Que l'équation du plan osculateur au point $(x, y, z)$ de cette courbe est

$$Z - z = k(Xy - Yx);$$

2° Que les points de contact des plans osculateurs menés à cette courbe par un point P de l'espace sont sur un plan passant par le point.

On appliquera les formules aux deux cas particuliers suivants :

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} t$$

ou

$$\varphi(t) = -\frac{3}{t^3+1}.$$

20° Soient

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad , \quad \varphi(x, y, z, t) = 0. \tag{1}$$

les équations d'une courbe qui dépend d'un paramètre variable $t$. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une courbe C à laquelle la courbe (1) soit constamment tangente, est que les équations (1) et les équations

$$f'_t(x, y, z, t) = 0 \quad , \quad \varphi'_t(x, y, z, t) = 0 \tag{2}$$

soient compatibles en $x, y, z$ quel que soit $t$. Si cette condition est remplie, les valeurs de $x, y, z$ vérifiant ces quatre équations (1) et (2)

sont des fonctions de $t$ qui définissent les coordonnées d'un point de la courbe C.

En appliquant cette méthode pour exprimer que la droite

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c},$$

où $x$, $y$, $z$, $a$, $b$, $c$ sont des fonctions de $t$, est tangente à une courbe, on retrouvera la condition (12). N° 479.

21° Soit $n$ la longueur de la normale à une courbe plane depuis le point de la courbe jusqu'à l'axe O$x$, démontrer que dans la chaînette (n° 348) le rayon de courbure $\rho$ est égal à $n$; dans la parabole rapportée à sa directrice comme axe O$x$ et dans la cycloïde rapportée à sa base comme axe O$x$ il est égal à $2n$.

22° On considère la courbe plane enveloppe de la droite $x \sin \alpha - y \cos \alpha - \varphi(\alpha) = 0$, où $\alpha$ est un angle variable.

Démontrer que l'on a

$$\pm \rho = \frac{ds}{d\alpha} = \varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha).$$

23° On considère une hélice tracée sur un cylindre quelconque : démontrer que le plan osculateur est en chaque point normal au cylindre. Si le cylindre est de révolution, le rayon de courbure de l'hélice est constant.

# LIVRE VI

## SURFACES DU SECOND DEGRÉ.

---

## CHAPITRE PREMIER

### Centre et plans diamétraux.

**485.** L'équation générale du second degré entre les trois variables $x$, $y$, $z$, est de la forme

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0;$$

elle renferme dix termes, ou neuf paramètres arbitraires; nous représenterons le premier membre par $f(x, y, z)$. On pourrait, en suivant la marche adoptée en Géométrie plane pour l'étude des lignes du second degré, examiner les diverses formes du lieu défini par cette équation; mais, à cause du grand nombre des cas à considérer, cette discussion serait longue et pénible. Nous commencerons par simplifier l'équation (1) et nous ne considérerons ensuite que les équations réduites. Nous baserons cette réduction sur les propriétés du centre et des plans diamétraux dont nous allons nous occuper d'abord.

#### CENTRE.

**486.** Un point I est centre d'une surface, lorsque les points de la surface sont placés symétriquement, deux à deux, par rapport à ce point. Comme une droite ne rencontre une surface du second degré qu'en deux points, il faut, pour qu'un point I soit centre de la surface, que toutes les cordes menées par ce point y soient divisées en deux parties égales.

Lorsque l'origine des coordonnées est centre d'une surface du second degré, l'équation de la surface ne contient pas de termes du premier degré. En effet, les équations d'une droite menée par l'origine sont de la forme

$$(2) \qquad x = mz, \quad y = nz.$$

Les coordonnées $z$ des points de rencontre de la surface et de la droite sont données par l'équation

$$(3)\qquad (Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn)z^2 + 2(Cm + C'n + C'')z + F = 0,$$

que l'on obtient en éliminant $x$ et $y$ entre les équations (1) et (2). Si l'origine est centre, l'équation (3) a ses racines égales et de signes contraires, ce qui exige que le coefficient $Cm + C'n + C''$ soit nul ; et comme ceci doit avoir lieu pour une infinité de valeurs de $m$ et de $n$ prises arbitrairement, il faut que l'on ait séparément

$$C = 0,\quad C' = 0,\quad C'' = 0.$$

La réciproque est vraie.

**487.** D'après cela, pour déterminer le centre d'une surface du second degré, on transportera l'origine en un point I de l'espace, dont nous désignerons les coordonnées par $a, b, c$, et l'on verra s'il est possible de choisir ces valeurs de manière que la nouvelle équation ne contienne pas de termes du premier degré par rapport aux coordonnées nouvelles.

Lorsqu'on déplace les axes parallèlement à eux-mêmes, les formules de transformation sont $x = a + x'$, $y = b + y'$, $z = c + z'$, et l'équation (1) devient

$$(4)\qquad Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'z'x' + 2B''x'y' + x'f'_a(a, b, c) + y'f'_b(a, b, c) + z'f'_c(a, b, c) + f(a, b, c) = 0.$$

Les coordonnées du centre sont déterminées par les trois équations du premier degré

$$f'_a(a, b, c) = 0,\quad f'_b(a, b, c) = 0,\quad f'_c(a, b, c) = 0,$$

ou, en remplaçant $a, b, c$ par $x, y, z$,

$$(5)\qquad f'_x(x, y, z) = 0,\quad f'_y(x, y, z) = 0,\quad f'_z(x, y, z) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad \begin{cases} Ax + B''y + B'z + C = 0,\\ B''x + A'y + Bz + C' = 0,\\ B'x + By + A''z + C'' = 0.\end{cases}$$

Ainsi, *on obtient les coordonnées du centre en égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de l'équation de la surface, prises par rapport aux variables* x, y, z.

Si l'on regarde $x$, $y$, $z$ comme étant les coordonnées d'un

point variable, chacune des équations (5) définit un plan; le centre de la surface est le point commun aux trois plans. Plusieurs cas peuvent se présenter.

1° Les trois plans se coupent en un seul point; la surface admet un centre unique.

2° Les trois plans se coupent deux à deux suivant des droites parallèles, ou deux d'entre eux au moins sont parallèles; dans ce cas, les trois plans n'ont pas de point commun, et la surface n'a pas de centre.

3° Les trois plans se coupent suivant la même droite, ou se confondent en un seul; tous les points de la droite ou du plan sont centres de la surface.

Le déterminant relatif aux équations (5) est

$$\Delta = AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''.$$

Lorsque ce déterminant est différent de zéro, les équations étant vérifiées par un système de valeurs finies et par un seul, la surface admet un centre unique. Lorsque $\Delta$ est nul, il y a impossibilité ou indétermination, et, par conséquent, la surface est dépourvue de centre, ou elle en admet une infinité.

488. Supposons que tous les points de la droite CC' (fig. 291) soient des centres. Si l'on joint un point M de la surface à un point quelconque I de la droite CC', et que l'on prolonge d'une longueur IN égale à MI, le point N appartient à la surface; en joignant ainsi le point M à tous les points de CC', on obtient une droite NN' parallèle à CC'. Si l'on joint maintenant le point N à tous les points de CC', on forme de même une seconde droite MM' parallèle à NN'. La surface se compose donc de droites parallèles à CC', situées deux à deux dans un même plan avec cette droite et à égale distance de part et d'autre; c'est un cylindre qui a pour axe CC', et, comme la trace du cylindre sur un plan non parallèle aux arêtes est une courbe du second degré ayant son centre sur l'axe, le cylindre est elliptique ou hyperbolique.

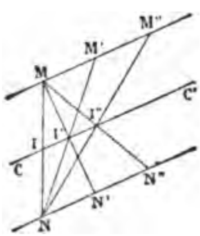


Fig. 291.

Le raisonnement précédent démontre que, dans le cas que nous considérons, l'équation (1) ne peut pas représenter d'autres surfaces courbes que des cylindres elliptiques ou hyperboliques; mais il peut arriver que cette équation représente une seule droite ou deux plans qui se coupent, et enfin qu'elle n'ait pas de solutions réelles. Il est évident d'ailleurs que tout cylindre elliptique ou hyperbolique a une infinité de centres en ligne droite.

On démontre de la même manière que, lorsque tous les points d'un plan sont des centres, l'équation (1) représente, ou deux plans parallèles, ou un plan unique, ou qu'elle n'admet pas de solutions réelles.

**489.** Lorsque la surface admet un centre, si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en ce point, l'équation (4) se réduit à

$$(7)\qquad Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + 2B'z'x' + 2B''x'y' + H = 0,$$

dans laquelle le terme constant H est égal à $f(a, b, c)$. Mais on peut simplifier l'expression de ce terme; car, si l'on rend l'équation proposée homogène, comme nous l'avons expliqué au n° 475, on a

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + tf'_t = 2f(x, y, z, t);$$

en remplaçant $x$, $y$, $z$ par les coordonnées $a$, $b$, $c$ du centre, on obtient la relation

$$(8)\qquad 2f(a, b, c, t) = tf'_t(a, b, c, t),$$

d'où l'on déduit $H = Ca + C'b + C''c + F.$

Lorsque le nouveau terme constant H est égal à zéro, l'équation (7) étant homogène par rapport à $x'$, $y'$, $z'$, représente un cône ayant pour sommet l'origine (n° 464); cependant le lieu peut se réduire à deux plans, à une droite, ou à un point. Si l'on désigne par D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix}$$

que l'on appelle *discriminant* de l'équation (1), et par $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{a}''$, $2\mathbf{b}, 2\mathbf{b}', 2\mathbf{b}'', 2\mathbf{c}, 2\mathbf{c}', 2\mathbf{c}'', \mathbf{f}$ les dérivées partielles de D par rapport aux coefficients A, A', A'', B, B', B'', C, C', C'', F.

$$\mathbf{a} = D'_A \quad , \quad 2\mathbf{b} = D'_B, \ldots,$$

on voit que $\mathbf{f} = \Delta$, et l'on a, pour les coordonnées du centre

$$a = \frac{\mathbf{c}}{\Delta} \quad , \quad b = \frac{\mathbf{c}'}{\Delta} \quad , \quad c = \frac{\mathbf{c}''}{\Delta},$$

et pour le terme constant H

$$H = \frac{C\mathbf{c} + C'\mathbf{c}' + C''\mathbf{c}'' + F\Delta}{\Delta} = \frac{D}{\Delta},$$

formules analogues à celles de la géométrie plane (n° 129).

**490.** Nous avons vu (n° 474) que les tangentes aux diverses courbes tracées par un même point sur une surface sont situées dans un même plan; il n'y a d'exception que lorsque les coordonnées du point annulent à la fois les trois dérivées partielles du premier membre de l'équation par rapport à $x, y, z$. Dans le cas des surfaces du second degré, un pareil point est centre de la surface; ce point étant aussi situé sur la surface, quand on y transporte l'origine des coordonnées, la constante H est nulle; ainsi, pour les surfaces du second degré, l'exception n'a lieu que dans le cas du cône, quand le point est le sommet.

### PLANS DIAMÉTRAUX.

**491.** Une ligne droite ne perce une surface du second degré qu'en deux points; la surface, lieu des milieux des cordes parallèles, est appelée surface diamétrale.

Soient $m$, $n$ et $p$ les paramètres constants qui définissent la direction des cordes. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque de l'espace, ayant pour coordonnées $a, b, c$, l'équation (1) prend la forme (4). Une droite menée par la nouvelle origine dans la direction donnée, est représentée par les équations $\frac{x'}{m} = \frac{y'}{n} = \frac{z'}{p} = \rho$. On obtient

l'équation qui donne les $\rho$ des points de rencontre de la droite et de la surface, en remplaçant dans l'équation (4) $x'$, $y'$ et $z'$ par $m\rho$, $n\rho$ et $p\rho$; on a ainsi

$$(9)\qquad (Am^2 + A'n^2 + A''p^2 + 2Bnp + 2B'mp + 2B''mn)\rho^2 + (mf'_a + nf'_b + pf'_c)\rho + f(a, b, c) = 0.$$

Pour que le point $(a, b, c)$ soit le milieu de la corde menée par ce point dans la direction donnée, il faut que l'équation précédente ait ses deux racines égales et de signes contraires, ce qui exige que les coordonnées $a$, $b$, $c$ vérifient la relation

$$mf'_a + nf'_b + pf'_c = 0.$$

Cette équation, étant vérifiée par les coordonnées du point milieu de l'une quelconque des cordes parallèles, représente le lieu cherché.

Si l'on remplace $a, b, c$ par $x, y, z$, cette équation devient

$$(10)\qquad mf'_x + nf'_y + pf'_z = 0,$$

ou, en développant,

$$(11)\qquad (Am + B''n + B'p)x + (B''m + A'n + Bp)y + (B'm + Bn + A''p)z + (Cm + C'n + C''p) = 0;$$

comme elle est du premier degré, elle représente un plan. Ainsi, *dans les surfaces du second degré, la surface diamétrale est un plan.*

**492.** Remarque I. L'équation (10) est vérifiée, quelles que soient $m$, $n$ et $p$ par les valeurs de $x$, $y$, $z$ qui satisfont à la fois aux trois équations (5); il en résulte que tous les plans diamétraux passent par le centre de la surface, quand il y en a un, ou par le lieu des centres, quand il y en a une infinité.

Remarque II. Lorsque les paramètres $m$, $n$ et $p$ satisfont à la relation

$$(12)\qquad Am^2 + A'n^2 + A''p^2 + 2Bnp + 2B'mp + 2B''mn = 0,$$

l'équation (9) s'abaisse au premier degré, c'est-à-dire que chacune des droites parallèles à la direction donnée ne perce la surface qu'en un point. Dans ce cas, le plan représenté par l'équation (11) est le lieu des points tels que les droites menées par chacun d'eux parallèlement à la direction donnée ne rencontrent pas la surface, ou sont situées entièrement sur

la surface. On voit aisément que ce plan est parallèle à la direction donnée et par conséquent contient toutes les droites dont nous venons de parler.

REMARQUE III. Quand la surface est cylindrique, si dans l'équation (9) on remplace $m, n$ et $p$ par les coefficients angulaires des génératrices, les coefficients de $\rho^2$ et de $\rho$ doivent être nuls quels que soient $a, b, c$. Le coefficient de $\rho$ étant mis sous la forme (11), les quatre termes seront nuls séparément On en conclut que les coefficients angulaires des génératrices satisfont aux quatre relations

$$Am+B''n+B'p=0\ ,\ B''m+A'n+Bp=0\ ,\ B'm+Bn+A''p=0\ ,$$
$$Cm+C'n+C''p=0.$$

Le coefficient de $\rho^2$ doit être aussi nul; mais cette dernière relation (12) est une conséquence des trois premières.

REMARQUE IV. Quand la surface est dépourvue de centre, les trois plans définis par les équations (5) sont parallèles, ou la droite d'intersection de deux d'entre eux est parallèle au troisième. Dans le premier cas, on a

$$f'_x=\alpha f'_z+\alpha'\ ,\ f'_y=\beta f'_z+\beta',$$

$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, désignant des constantes; l'équation (10) se réduit à

$$(\alpha m+\beta n+p)\,f'_z+m\alpha'+n\beta'=0\,;$$

elle représente, pour toutes les valeurs de $m, n$ et $p$, des plans parallèles entre eux. Dans le second cas, si les plans définis par les deux équations $f'_x=0$, $f'_y=0$ se coupent suivant une droite parallèle au plan $f'_z=0$, l'équation générale des plans qui passent par la droite d'intersection des deux premiers étant $\alpha f'_x+\beta f'_y=0$, on a

$$f'_z=\alpha f'_x+\beta f'_y+r,$$

$\alpha, \beta, r$ étant des constantes; et, par suite, l'équation (10) prend la forme

$$(m+p\alpha)\,f'_x+(n+p\beta)\,f'_y+pr=0;$$

elle représente des plans parallèles à la droite d'intersection des deux plans

$$f'_x=0,\quad f'_y=0.$$

Ainsi, *les surfaces dépourvues de centre ont leurs plans diamétraux parallèles à une même droite ou parallèles entre eux.*

**493.** Considérons une direction ne satisfaisant pas à la relation (12); si l'on prend pour axe des $z$ une des cordes, pour axe des $x$ et des $y$ deux droites situées dans le plan diamétral correspondant, l'équation de la surface devra être vérifiée par deux valeurs de $z$ égales et de signes contraires, pour chaque système de valeurs attribuées aux variables $x$ et $y$; elle aura donc la forme

$$Pz^2 + \varphi(x, y) = 0,$$

$\varphi(x, y)$ désignant une fonction des deux variables $x$ et $y$ dont le degré ne dépasse pas deux. Déplaçons maintenant les axes des $x$ et des $y$ dans le plan diamétral, en conservant à l'axe des $z$ sa direction; ce changement des coordonnées s'effectuera par les formules de la Géométrie plane. Lorsque la fonction $\varphi(x, y)$ est du second degré, nous avons vu (liv. III, chap. II) que l'on peut choisir d'une infinité de manières les nouveaux axes des $x$ et des $y$, de telle sorte que cette fonction se réduise à l'une des trois formes

$$Mx^2 + Ny^2 + H \quad , \quad Ny^2 + Qx \quad , \quad Ny^2 + H,$$

et alors l'équation de la surface sera elle-même ramenée à l'une des trois formes

$$(\alpha) \qquad Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + H = 0,$$

$$(\beta) \qquad Ny^2 + Pz^2 + Qx = 0,$$

$$(\gamma) \qquad Ny^2 + Pz^2 + H = 0.$$

Si la fonction $\varphi$ est du premier degré, on la ramène par le même changement à la forme $Qx$, et l'équation de la surface devient

$$(\delta) \qquad Pz^2 + Qx = 0.$$

Enfin, si la fonction $\varphi$ se réduit à une constante, l'équation de la surface est

$$(\varepsilon) \qquad Pz^2 + H = 0$$

Les lettres M, N, P, Q désignent des constantes différentes de zéro, et H une constante qui peut être nulle.

**494.** Considérons d'abord l'équation ($\alpha$). En égalant à zéro les dérivées partielles de son premier membre, on a trois équations qui admettent la solution $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et celle-là seulement; la surface a donc un centre unique. Chacun des plans des coordonnées divise en deux parties égales

les cordes parallèles à l'intersection des deux centres; pour cette raison, on dit qu'ils forment un système de *trois plans diamétraux conjugués*.

Considérons maintenant l'équation (β). La dérivée partielle $f'_x$, qui se réduit ici à Q, n'étant pas nulle, la surface est dépourvue de centre; ce n'est pas un cylindre parabolique, car un plan parallèle au plan des $yz$ la coupe suivant une ellipse ou une hyperbole. Le plan des $xz$ divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'axe des $y$ et le plan des $xy$ les cordes parallèles à l'axe des $z$; mais les droites parallèles à l'axe des $x$ ne percent la surface qu'en un point, et il n'y a pas de plan diamétral correspondant. Tous les plans diamétraux sont parallèles à une même droite, le nouvel axe des $x$.

L'équation (γ) représente un cylindre elliptique ou hyperbolique, dont les génératrices sont parallèles au nouvel axe des $x$; la surface admet une infinité de centres situés sur l'axe des $x$ et tous les plans diamétraux passent par cette droite. La surface peut se réduire à deux plans se coupant suivant cette droite ou à cette droite elle-même.

L'équation (δ) représente un cylindre parabolique, ayant ses génératrices parallèles à l'axe des $y$; la surface est dépourvue de centre; tous les plans diamétraux sont parallèles au plan des $xy$.

Enfin l'équation (ε) représente deux plans parallèles, qui peuvent se confondre ou être imaginaires. Tous les points du plan des $xy$ sont des centres.

Remarquons que les surfaces représentées par les cinq équations précédentes se distinguent les unes des autres par des propriétés incompatibles entre elles, de sorte qu'une même surface ne peut être représentée par deux équations de types différents. Les surfaces représentées par les trois dernières équations, étant engendrées par une droite qui se meut parallèlement à elle-même, appartiennent à la famille des surfaces cylindriques. On en conclut que toutes les surfaces du second degré, autres que les cylindres, sont comprises dans les deux formes (α) et (β); la première convient aux surfaces à centre unique, la seconde aux surfaces dépourvues de centre.

DIAMÈTRES.

**495.** Nous avons vu que les sections faites par des plans parallèles dans une surface du second ordre sont des courbes homothétiques (n° 484); quand ces courbes sont des courbes à centre, le lieu des centres s'appelle *diamètre*.

Enfin l'équation ($\varepsilon$) représente deux plans parallèles, qui peuvent se confondre ou être imaginaires. Tous les points du plan des $xy$ sont des centres.

Remarquons que les surfaces représentées par les cinq équations précédentes se distinguent les unes des autres par des propriétés incompatibles entre elles, de sorte qu'une même surface ne peut être représentée par deux équations de types différents. Les surfaces représentées par les trois dernières équations, étant engendrées par une droite qui se meut parallèlement à elle-même, appartiennent à la famille des surfaces cylindriques. On en conclut que toutes les surfaces du second degré, autres que les cylindres, sont comprises dans les deux formes ($\alpha$) et ($\beta$); la première convient aux surfaces à centre unique, la seconde aux surfaces dépourvues de centre.

Le plan sécant est représenté par une équation

$$ax + by + cz = l, \tag{13}$$

dans laquelle $a$, $b$, $c$ sont des constantes, et $l$ un paramètre variable; si dans l'équation de la surface $f(x, y, z) = 0$, on remplace $z$ par sa valeur

$$z = \frac{l - ax - by}{c} \tag{14}$$

tirée de l'équation du plan, on obtient l'équation de la projection de la courbe d'intersection sur le plan des $xy$; pour avoir le centre de la courbe de projection, il faudra ensuite égaler à zéro les dérivées relatives à $x$ et à $y$. Mais on peut obtenir ces dérivées sans faire la substitution; il suffit d'appliquer à la fonction $f(x, y, z)$ le théorème des fonctions composées, en regardant $z$ comme une fonction des deux variables $x$ et $y$ donnée par la formule (14) on a ainsi les deux équations

$$f'_x - \frac{a}{c} f'_z = 0, \quad f'_y - \frac{b}{c} f'_z = 0. \tag{15}$$

Quand on projette une courbe à centre sur un plan, il est évident que le centre de la courbe proposée se projette au centre de la courbe-projection; les équations (15), jointes à l'équation du plan, détermineront donc le centre de la courbe d'intersection. Comme les équations (15) ne contiennent pas le paramètre variable $l$, elles représentent le lieu des centres des sections parallèles; ainsi le diamètre est la droite représentée par les équations

$$(16) \qquad \frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{c}.$$

Tous les diamètres passent par le centre de la surface quand elle a un centre unique; ils coïncident avec la ligne des centres quand la surface admet pour centres tous les points d'une droite, c'est le cas des cylindres elliptiques et hyperboliques; enfin, si la surface admet comme centres tous les points d'un plan, les équations (15) se confondent et représentent ce plan. Quand la surface est dépourvue de centre et n'est pas un cylindre parabolique, on reconnaît à l'aide de l'équation ($\beta$), que tous les diamètres sont parallèles au nouvel axe des $x$. Dans les cylindres paraboliques, les sections planes étant des paraboles, il n'y a pas de diamètre.

**496.** REMARQUE I. L'équation ($\alpha$) représente les surfaces à centre unique; chacun des nouveaux axes des coordonnées est le lieu des centres des sections parallèles au plan des deux autres; pour cette raison, on dit que ces droites forment un système de *trois diamètres conjugués*. Il est aisé de voir que, réciproquement, si l'on rapporte la surface à trois diamètres conjugués, l'équation est de la forme ($\alpha$); car soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + H = 0$$

l'équation de la surface; si l'on y fait $x = a$, on obtient la section de la surface par un plan parallèle au plan des $yz$; la projection de cette section sur le plan des $yz$ devant avoir pour centre l'origine, les deux coefficients B′ et B″ sont nuls; de même le coefficient B est nul et l'équation se réduit à la forme ($\alpha$). Il en résulte que l'on peut considérer les diamètres conjugués comme les droites d'intersection d'un système de trois plans diamétraux conjugués. Ceci nous permet d'établir

les relations qui existent entre les paramètres directeurs $(m, n, p)$, $(m', n', p')$, $(m'', n'', p'')$ de trois diamètres conjugués, quand la surface est rapportée à des axes de coordonnées quelconques; en écrivant que le plan diamétral qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'un d'eux est parallèle à chacun des deux autres, on obtient, d'après l'équation (11), les trois relations

$$
(17)\left\{\begin{array}{l}
Amm' + A'nn' + A''pp' + B(np' + n'p) + B'(mp' + m'p) + B''(mn' + m'n) = 0,\\
Am'm'' + A'n'n'' + A''p'p'' + B(n'p'' + n''p') + B'(m'p'' + m''p') + B''(m'n'' + m''n') = 0,\\
Am''m + A'n''n + A''p''p + B(n''p + np'') + B'(m''p + mp'') + B''(m''n + mn'') = 0,
\end{array}\right.
$$

REMARQUE II. Les autres surfaces n'admettent pas de systèmes de diamètres conjugués; cependant les axes des coordonnées qui ont servi à mettre leurs équations sous les formes simples $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\delta)$, $(\epsilon)$ satisfont encore aux trois relations précédentes. En ce qui concerne les formes $(\beta)$ et $(\gamma)$, il suffit d'écrire que le plan diamétral qui divise en deux parties égales les cordes parallèles au nouvel axe des $y$, c'est-à-dire à la direction $(m', n')$, est parallèle à chacune des deux autres, et de même pour le plan diamétral des cordes parallèles à la direction $(m'', n'')$. Quant aux formes $(\delta)$ et $(\epsilon)$, on obtient les deux dernières relations en remarquant que le plan diamétral qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à la direction $(m'', n'', p'')$ est parallèle à chacune des deux autres; le premier membre de la première relation est

$$m(Am' + B''n' + B'p') + n(B''m' + A'n' + Bp') + p(B'm' + Bn' + A''p');$$

or on sait (n° 492) que la direction $(m', n', p')$ des génératrices du cylindre annule les trois parties séparément.

### PLANS PRINCIPAUX.

**497.** Parmi les plans diamétraux d'une surface du second degré, on distingue en particulier ceux qui sont perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales; ce sont des plans de symétrie de la figure; on les appelle *plans principaux*. Dans ce qui précède, les axes des coordonnées étaient quelconques; dans la recherche des plans principaux, nous supposerons les axes rectangulaires. Si l'on désigne par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus des angles que fait avec les axes une direction

donnée, les equations des cordes peuvent se mettre sous la forme

$$(18)\qquad \frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}=\rho,$$

$a$, $b$, $c$ étant les coordonnées d'un point particulier I de cette corde, et $x$, $y$, $z$ celles d'un point quelconque de cette même corde. La lettre $\rho$ désigne la distance du premier point au second, affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est comptée dans la direction donnée ou dans la direction opposée.

On obtient l'équation qui donne les distances du point I aux points de rencontre de la corde et de la surface en remplaçant dans l'équation (4) du n° 487 les lettres $x'$, $y'$, $z'$ par $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$; cette équation devient ainsi

$$(19)\qquad S\rho^2+T\rho+R=0,$$

en posant, pour abréger,

$$(20)\quad \begin{cases} S=A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\gamma\alpha+2B''\alpha\beta,\\ T=\alpha f'_a(a,b,c)+\beta f'_b(a,b,c)+\gamma f'_c(a,b,c),\\ R=f(a,b,c).\end{cases}$$

Si l'on suppose le point I fixe et que l'on fasse varier les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on peut regarder l'équation (19) comme représentant la surface en coordonnées polaires. Le coefficient S de $\rho^2$ ne dépend que de la direction du rayon vecteur, le terme constant R ne dépend que de la position du point I, tandis que le coefficient T varie à la fois avec la direction du rayon vecteur et la position du point I.

**498.** L'équation du plan diamétral des cordes parallèles à la direction ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) prend la forme

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0,$$

c'est-à-dire

$$(21)\qquad \begin{aligned}&(A\alpha+B''\beta+B'\gamma)x+(B''\alpha+A'\beta+B\gamma)y\\ &+(B'\alpha+B\beta+A''\gamma)z+C\alpha+C'\beta+C''\gamma=0.\end{aligned}$$

Soient $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ les cosinus des angles que fait avec les axes des coordonnées la normale à ce plan diamétral, $\theta$ l'angle de la normale avec la direction des cordes, on a

$$\frac{\alpha_1}{A\alpha+B''\beta+B'\gamma}=\frac{\beta_1}{B''\alpha+A'\beta+B\gamma}=\frac{\gamma_1}{B'\alpha+B\beta+A''\gamma}=$$
$$\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1}{\alpha(A\alpha+B''\beta+B'\gamma)+\beta(B''\alpha+A'\beta+B\gamma)+\gamma(B'\alpha+B\beta+A''\gamma)}=\frac{\cos\theta}{S}.$$

Pour que le plan diamétral soit un plan principal, il faut que la normale au plan coïncide avec la direction des cordes; on doit donc avoir les relations

$$(22)\quad \frac{\alpha}{A\alpha+B''\beta+B'\gamma}=\frac{\beta}{B''\alpha+A'\beta+B\gamma}=\frac{\gamma}{B'\alpha+B\beta+A''\gamma}=\frac{1}{S};$$

alors l'équation (21) du plan principal devient

$$(23)\quad S(\alpha x+\beta y+\gamma z)+C\alpha+C'\beta+C''\gamma=0.$$

**499.** Des équations (22) on déduit les suivantes

$$(24)\quad \begin{cases} (A-S)\alpha+B''\beta+B'\gamma=0, \\ B''\alpha+(A'-S)\beta+B\gamma=0, \\ B'\alpha+B\beta+(A''-S)\gamma=0; \end{cases}$$

en y joignant la relation

$$(25)\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

on a à résoudre un système de quatre équations à quatre inconnues.

Les trois inconnues $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ne pouvant être nulles en même temps, puisque la somme de leurs carrés doit être égale à l'unité, pour que les trois équations (24) homogènes et du premier degré par rapport à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ soient vérifiées par un système de valeurs dont une au moins soit différente de zéro, il est nécessaire que le déterminant soit nul. Mais, si l'on compare les équations (24) aux équations (6), qui donnent les coordonnées du centre, on reconnaît que le déterminant se déduit du déterminant $\Delta$, en remplaçant dans celui-ci $A$, $A'$, $A''$ par $A-S$, $A'-S$, $A''-S$; on obtient ainsi l'équation du troisième degré

$$(26)\quad (A-S)(A'-S)(A''-S)-(A-S)B^2-(A'-S)B'^2 \\ -(A''-S)B''^2+2BB'B''=0,$$

à laquelle doit satisfaire l'inconnue auxiliaire S. Le terme indépendant de S est $\Delta$.

**500.** Lorsque les trois coefficients $B$, $B'$, $B''$ sont différents de zéro, on arrive à une forme d'équation plus commode à discuter, en faisant l'élimination d'une autre manière : multiplions les termes des équations (24) respectivement par $B$, $B'$, $B''$ et retranchons les résultats deux à deux, il vient

$$(27)\quad [(S-A)B+B'B'']\alpha=[(S-A')B'+B''B]\beta=[(S-A'')B''+BB']\gamma,$$

ou

$$\frac{\alpha}{\frac{1}{(S-A)B+B'B''}}=\frac{\beta}{\frac{1}{(S-A')B'+B''B}}=\frac{\gamma}{\frac{1}{(S-A'')B''+BB'}}.$$

Si l'on substitue dans l'une des mêmes équations, la première par exemple, à la place de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les quantités proportionnelles, on a

$$\frac{(A-S)}{(S-A)B+B'B''}+\frac{B''}{(S-A')B'+B''B}+\frac{B'}{(S-A'')B''+BB'}=0,$$

ou

$$(28)\quad \frac{B'B''}{(S-A)B+B'B''}+\frac{B''B}{(S-A')B'+B''B}+\frac{BB'}{(S-A'')B''+BB'}-1=0.$$

Si l'on désigne par $a$, $b$, $c$ les quantités

$$A-\frac{B'B''}{B},\quad A'-\frac{B''B}{B'},\quad A''-\frac{BB'}{B''},$$

les équations (27) et (28) deviennent

$$(29)\qquad B(S-a)\alpha=B'(S-b)\beta=B''(S-c)\gamma,$$

$$(30)\quad \frac{1}{B^2(S-a)}+\frac{1}{B'^2(S-b)}+\frac{1}{B''^2(S-c)}-\frac{1}{BB'B''}=0.$$

### DISCUSSION DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

**501.** Considérons d'abord le cas le plus général, celui où aucun des coefficients B, B′, B″ n'est nul. Prenons l'équation en S sous la forme (30).

I. Supposons que les trois quantités $a$, $b$, $c$ soient différentes et rangées par ordre de grandeur croissante. Substituons successivement à la place de S, dans le premier membre de l'équation (30), les quantités $a\pm\varepsilon$, $b\pm\varepsilon'$, $c\pm\varepsilon''$, ($\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$) désignant des quantités positives très-petites. Par la première substitution, le premier terme de l'équation prend la valeur $\pm\frac{1}{B^2\varepsilon}$, très-grande numériquement, tandis que les autres termes conservent des valeurs finies; ce premier terme donne donc son signe au polynôme. De même, par la seconde substitution, le second terme prend la valeur $\pm\frac{1}{B'^2\varepsilon'}$, et donne son signe au polynôme. De même, par la troisième substitution, le troisième terme $\pm\frac{1}{B''^2\varepsilon''}$ donne son signe au polynôme.

Quand S varie de $a+\varepsilon$ à $b-\varepsilon'$, le premier membre reste fini et varie d'une manière continue ; puisque ces deux nombres donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent entre eux une racine réelle de l'équation. On reconnaît de la même manière que l'équation a une seconde racine entre $b$ et $c$. La troisième est plus grande que $c$ ou plus petite que $a$, suivant que la quantité BB'B'' est positive ou négative ; en effet, quand on donne à S une valeur très-grande numériquement, le premier membre de l'équation (30) se réduit à $-\frac{1}{BB'B''}$; donc, si la quantité BB'B'' est positive, le premier membre change de signe, quand S varie de $c+\varepsilon''$ à $+\infty$, et, par suite, l'équation a une racine réelle plus grande que $c$ ; lorsque la quantité BB'B'' est négative, le premier membre change de signe quand S varie de $-\infty$ à $a-\varepsilon$; dans ce cas, la troisième racine est plus petite que $a$.

Ainsi, dans le cas que nous considérons, les trois racines de l'équation sont réelles et inégales. A chacune de ces racines correspond une direction unique des cordes ; car, si dans les relations (29) on remplace S par l'une des racines, les trois coefficients de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant différents de zéro, on obtient pour les trois cosinus des valeurs déterminées.

II. Supposons que deux des trois quantités $a$, $b$, $c$, par exemple $a$ et $b$, soient égales. Les trois racines sont encore réelles et inégales ; mais l'une d'elles est égale à $a$. En effet, l'équation (30), mise sous forme entière, devient

$$(31)\qquad B'^2B''^2(S-b)(S-c)+B''^2B^2(S-c)(S-a) \\ +B^2B'^2(S-a)(S-b)-BB'B''(S-a)(S-b)(S-c)=0.$$

Quand $a=b$, le premier membre est divisible par $S-a$, et l'on a l'équation du second degré

$$B''^2(B^2+B'^2)(S-c)+B^2B'^2(S-a)-BB'B''(S-a)(S-c)=0.$$

Le premier membre prenant des valeurs de signes contraires, quand on attribue à S les valeurs $a$ et $c$, cette équation a ses deux racines réelles, et l'une est comprise entre $a$ et $c$.

Si dans les relations (29) on remplace S successivement par

chacune des racines de l'équation du second degré, aucun des coefficients ne s'annule, et chaque racine donne une direction unique. Pour la première racine $a$, les deux premiers coefficients sont nuls, sans que le dernier le soit; il en résulte $\gamma=0$; pour vérifier les équations (24), il faut prendre en outre $B'\alpha+B\beta=0$, ce qui détermine encore une direction unique parallèle au plan des $xy$.

III. Enfin, si les trois quantités $a, b, c$ sont égales, deux racines de l'équation (31) deviennent égales à $a$, et la troisième est donnée par l'équation du premier degré

$$(B'^2B''^2+B''^2B^2+B^2B'^2)-BB'B''(S-a)=0.$$

A cette racine simple correspond une direction unique. Pour la racine double, les trois équations (24) se réduisent à une seule, $B'B''\alpha+B''B\beta+BB'\gamma=0$, et il y a indétermination; toutes les directions parallèles au plan $B'B''x+B''By+BB'z=0$ conviennent à cette racine double.

**502.** Considérons maintenant le cas où les trois coefficients $B, B', B''$ ne sont pas différents de zéro.

I. Un seul coefficient est nul, par exemple $B''$. L'équation du troisième degré (26) devient

$$(S-A)(S-A')(S-A'')-(S-A)B^2-(S-A')B'^2=0.$$

Soit $A<A'$; les substitutions de $-\infty, A, A', +\infty$ dans le premier membre donnent des résultats affectés respectivement des signes $-, +, -, +$; donc l'équation a ses trois racines réelles et inégales. Les équations (24) donnent pour chacune d'elles une direction déterminée; car des deux premières on déduit des valeurs finies pour les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$.

II. Deux coefficients sont nuls, par exemple $B'$ et $B''$. L'équation du troisième degré (26) se réduit à

$$(S-A)[(S-A')(S-A'')-B^2]=0;$$

elle admet la racine A et deux racines réelles et inégales données par une équation du second degré. Si la quantité $(A-A')(A-A'')-B^2$ est différente de zéro, aucune des deux

racines de l'équation du second degré n'est égale à A, et, par conséquent, les trois racines sont inégales. Pour $S=A$, les équations (24) se réduisent à

$$(A'-A)\beta+B\gamma=0, \quad B\beta+(A''-A)\gamma=0,$$

et ne peuvent être vérifiées que par les valeurs $\beta=0$, $\gamma=0$, d'où $\alpha=1$, ce qui donne une direction bien déterminée. Pour chacune des deux autres racines, ces équations se réduisent à $\alpha=0$, $(A'-S)\beta+B\gamma=0$, ce qui donne encore une direction bien déterminée.

Si l'on a $(A-A')(A-A'')-B^2=0$, l'une des racines de l'équation du second degré étant égale à A, l'équation admet la racine double A et une racine simple. A la racine simple correspond une direction unique; pour la racine double A, les équations (24) se réduisent à une seule

$$(A'-A)\beta+B\gamma=0,$$

ce qui donne toutes les directions parallèles au plan

$$(A'-A)y+Bz=0.$$

III. Lorsque les trois coefficients $B, B', B''$ sont nuls à la fois, l'équation (26) se réduit à

$$(S-A)(S-A')(S-A'')=0,$$

et admet pour racines $A, A', A''$. Quand ces trois racines sont inégales, les équations (24) montrent qu'à ces racines correspondent des directions respectivement parallèles à chacun des trois axes coordonnés. Si $A=A'$, à cette racine double correspondent toutes les directions parallèles au plan des $xy$. Enfin, si $A=A'=A''$, à cette racine triple correspondent toutes les directions de l'espace, il y a ici indétermination absolue, car les équations (24) deviennent alors des identités.

Ainsi, en résumé, *l'équation du troisième degré en S a toujours ses trois racines réelles. A une racine simple correspond une direction unique; à une racine double, toutes les directions parallèles à un plan; à une racine triple, toutes celles de l'espace.*

**503.** Soient $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$ les cosinus des angles que font avec les axes des coordonnées les directions qui correspon-

dent à deux racines différentes S et S'. On a, en vertu des équations (24),

$$(32)\quad \begin{cases} A\alpha + B''\beta + B'\gamma = S\alpha, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma = S\beta, \\ B'\alpha + B\beta + A''\gamma = S\gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma' = S'\alpha', \\ B''\alpha' + A'\beta' + B\gamma' = S'\beta', \\ B'\alpha' + B\beta' + A''\gamma' = S'\gamma'. \end{cases}$$

Multiplions les deux membres des premières équations respectivement par $\alpha', \beta', \gamma'$, ceux des secondes par $-\alpha, -\beta, -\gamma$, et ajoutons membre à membre ; il vient

$$(S - S')(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0,$$

ou

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Donc *les directions qui correspondent à deux racines différentes sont perpendiculaires entre elles.*

Il en résulte que les directions qui correspondent à une racine double sont toutes perpendiculaires à celle qui correspond à la troisième racine.

Le plan diamétral des cordes parallèles à la direction $(\alpha, \beta, \gamma)$ est donnée par l'équation (21)

$$S(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0.$$

Ainsi, *à chaque direction des cordes donnée par une racine* S *différente de zéro correspond un plan principal.*

Si une racine S est nulle, le plan principal n'existe plus. Cependant si l'on a $C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0$, l'équation (23) devient une identité, et la position du plan principal est indéterminée ; tout plan perpendiculaire à la direction des cordes est un plan principal ; dans ce cas, la surface est cylindrique. D'après l'équation (19), si une racine S est nulle, les droites correspondantes ne rencontrent la surface qu'en un seul point.

Il est bon d'observer que l'équation en S a toujours au moins une racine différente de zéro ; car les trois racines ne sont égales que si l'on a $B = B' = B'' = 0$ ; alors ces racines, étant égales à $A, A', A''$, ne sont pas toutes trois nulles, sans quoi l'équation proposée ne serait pas du second degré. On peut, d'ailleurs, démontrer cette propriété de l'équation (26), indépendamment de l'étude que nous en avons faite ; en effet, si les trois racines étaient nulles, on aurait, en égalant à zéro les coefficients de $S^2$ et de S,

$$A + A' + A'' = 0, \quad A'A'' + A''A + AA' - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0;$$

si du carré de la première quantité on retranche le double de la seconde, il vient

$$A^2+A'^2+A''^2+2B^2+2B'^2+2B''^2=0,$$

d'où $A=A'=A''=B=B'=B''=0$, et l'équation ne serait plus du second degré. Ainsi, *toute surface du second degré a au moins un plan principal.*

**504.** Nous avons vu (n° 493) que les équations des surfaces du second degré peuvent être ramenées d'une infinité de ma nières aux cinq types ($\alpha$), ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$), ($\epsilon$). Concevons que le plan diamétral qui a servi à opérer la transformation soit un plan principal ; comme on peut effectuer les réductions ultérieures à l'aide de deux axes rectangulaires situés dans ce plan, chacune des cinq équations représentera la surface rapportée à des coordonnées rectangulaires.

Les surfaces à centre unique ($\alpha$) admettent trois plans principaux, les trois nouveaux plans des coordonnées. Les surfaces dépourvues de centre ($\beta$) en admettent deux, le plan des $xy$ et celui des $xz$. Les cylindres elliptiques ou hyperboliques ($\gamma$) en admettent deux, les plans des $xy$ et des $xz$, et en outre un plan indéterminé perpendiculaire à l'axe des $x$. c'est-à-dire aux génératrices. Le cylindre parabolique ($\delta$) en admet un, le plan des $xy$, et en outre un plan indéterminé perpendiculaire aux génératrices.

## AXES.

**505.** Nous avons appelé diamètre (n° 495) le lieu des centres des sections parallèles ; lorsque le diamètre est perpendiculaire aux plans des sections, c'est un *axe* de symétrie de la surface. Désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus des angles que fait un tel diamètre avec les axes des coordonnées, supposés rectangulaires. Le plan sécant étant représenté par l'équation

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=l,$$

le diamètre correspondant, d'après les équations (16), est

$$\frac{Ax+B''y+B'z+C}{\alpha}=\frac{B''x+A'y+Bz+C'}{\beta}=\frac{B'x+By+A''z+C''}{\gamma}.$$

Une parallèle menée par l'origine à ce diamètre a pour équations

$$\frac{Ax+B''y+B'z}{\alpha}=\frac{B''x+A'y+Bz}{\beta}=\frac{B'x+By+A''z}{\gamma};$$

si elle est perpendiculaire au plan, les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un quelconque de ses points étant proportionnelles à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on aura les relations

$$\frac{A\alpha+B''\beta+B'\gamma}{\alpha}=\frac{B''\alpha+A'\beta+B\gamma}{\beta}=\frac{B'\alpha+B\beta+A''\gamma}{\gamma},$$

qui sont identiques aux relations (22). On en conclut que les directions des axes de la surface sont les mêmes que celles des cordes principales. La question rentre donc dans celle que nous venons de traiter.

CONDITION POUR QU'UN PLAN SOIT TANGENT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE.

503 *bis*. La méthode employée en géométrie plane (n° 126) pour exprimer qu'une droite est tangente à une conique permet d'exprimer de la même façon que le plan

$$ux+vy+wz+1=0$$

est tangent à la surface du second ordre représentée par l'équation générale (1). Cette condition est, sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & u \\ B'' & A' & B & C' & v \\ B' & B & A'' & C'' & w \\ C & C' & C'' & F & 1 \\ u & v & w & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

ou, en développant et suivant les notations du n° 489,

$$(33)\quad \mathrm{a}u^2+\mathrm{a}'v^2+\mathrm{a}''w^2+2\mathrm{b}vw+2\mathrm{b}'wu+2\mathrm{b}''uv+2\mathrm{c}u$$
$$+2\mathrm{c}'v+2\mathrm{c}''w+\Delta=0.$$

Cette condition s'appelle *équation tangentielle* de la surface. On démontre, comme on l'a fait en géométrie plane pour une proposition analogue (n° 308), que si $D=0$ le premier membre de l'équation (33) est un carré parfait.

# CHAPITRE II

## Réduction de l'équation du second degré.

Nous supposons que l'équation proposée est rapportée à des axes rectangulaires. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'équation du second degré peut se ramener à l'une des formes simples

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + H = 0, \quad Ny^2 + Pz^2 + Qx = 0,$$
$$Ny^2 + Pz^2 + H = 0, \quad Pz^2 + Qx = 0, \quad Pz^2 + H = 0,$$

en coordonnées rectangulaires.

Nous allons donner quelques détails sur la marche à suivre pour effectuer la réduction.

PREMIER CAS. $\Delta \gtrless 0$.

**506.** On commence par transporter les axes, parallèlement à eux-mêmes, au centre de la surface ; l'équation générale du second degré

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0$$

devient

$$(2) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + H = 0;$$

les coefficients des termes du second degré ne changent pas, et nous avons appris à calculer la constante H (n° 489).

Supposons d'abord les trois racines de l'équation du troisième degré en S différentes et désignons-les par S, S′, S″ ; soient, de plus, $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les cosinus des angles que font avec les axes les directions qui correspondent à ces trois racines. Si l'on change les axes des coordonnées en prenant ces trois directions pour celles des nouveaux axes, les formules de transformation sont

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\ y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z', \end{cases}$$

et l'équation de la surface aura la forme

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Pz'^2 + H = 0,$$

puisqu'elle ne doit plus contenir les produits des variables. Mais on a

$$M = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta,$$

c'est-à-dire $M = S$ (n° 497). Par la même raison, on a $N = S'$ et $P = S''$. Ainsi, dans ce cas, l'équation réduite est

$$(4) \qquad Sx'^2 + S'y'^2 + S''z'^2 + H = 0.$$

Il est facile de vérifier que les coefficients des rectangles des variables dans la nouvelle équation sont nuls. Par exemple, le coefficient du terme en $2x'y'$ est

$$B''_1 = A\alpha\alpha' + A'\beta\beta' + A''\gamma\gamma' + B(\beta\gamma' + \gamma\beta') + B'(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + B''(\alpha\beta' + \beta\alpha').$$

Si l'on ajoute membre à membre les trois premières équations (32) du n° 503, après les avoir multipliées respectivement par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, on a

$$B''_1 = S(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0.$$

Ceci est d'ailleurs une conséquence des relations (17) du n° 496.

Lorsque deux racines de l'équation du troisième degré sont égales, à la racine simple correspond un plan principal déterminé, et à la racine double une infinité de directions de cordes parallèles à ce plan; si l'on prend pour nouveaux axes deux droites rectangulaires situées dans le plan principal et la perpendiculaire au plan, la méthode précédente est applicable, et l'on obtient l'équation

$$S(x'^2 + y'^2) + S''z'^2 + H = 0,$$

qui représente une surface de révolution autour de l'axe des $z'$. Enfin, si les trois racines sont égales, en prenant trois nouveaux axes rectangulaires quelconques, l'équation est toujours $S(x'^2 + y'^2 + z'^2) + H = 0$; elle représente une sphère.

DEUXIÈME CAS. $\Delta = 0$.

**507.** Dans ce cas, nous commencerons par changer la direction des axes, en prenant pour nouveaux axes les directions

qui correspondent aux racines de l'équation du troisième degré, ou, si cette équation a des racines égales, un des systèmes en nombre infini de trois directions rectangulaires déterminés par ses racines. On démontre, comme on l'a fait algébriquement dans le cas précédent, que $B_1 = B'_1 = B''_1 = 0$ ; les coefficients des carrés des variables ont encore pour valeurs S, S', S''. Si donc une seule racine S est nulle, et que l'on prenne pour axe des $x'$ la direction déterminée par cette racine, l'équation de la surface est

$$S'y'^2 + S''z'^2 + 2C_1x' + 2C'_1y' + 2C''_1z' + F = 0.$$

Les coefficients $C_1$, $C'_1$, $C''_1$ ont pour valeurs

$$C_1 = C\alpha + C'\beta + C''\gamma,$$
$$C'_1 = C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma',$$
$$C''_1 = C\alpha'' + C'\beta'' + C''\gamma''.$$

En déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on ramène l'équation précédente à la forme

$$S'y^2 + S''z^2 + 2C_1x = 0,$$

si $C_1$ est différent de zéro, et à la forme

$$S'y^2 + S''z^2 + F_1 = 0,$$

si $C_1$ est nul. Le coefficient $C_1$, qui subsiste dans l'équation réduite, est celui qui correspond à la racine simple $S = 0$.

Si deux racines S et S' sont égales à zéro, par la première transformation l'équation devient

$$S''z'^2 + 2C_1x' + 2C'_1y' + 2C''_1z' + F = 0.$$

Nous avons vu que, pour cette racine double $S = 0$, les relations (24) du n° 499 se réduisent à une. Afin de déterminer l'une des directions correspondantes, on peut joindre à cette équation une seconde équation choisie à volonté ; nous prendrons

$$C'_1 = C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma' = 0.$$

L'autre direction sera ensuite complétement déterminée, ainsi que le coefficient $C''_1$. Cela posé, en déplaçant les axes parallèlement à eux-mêmes, on ramènera l'équation à la forme

$$S''z^2 + 2C_1x = 0,$$

si $C_1$ est différent de zéro, et si $C_1$ est nul, à la forme

$$S''z^2 + H = 0.$$

508. Remarque. Lorsque deux racines $S'$ et $S''$ sont égales sans être nulles, la surface est de révolution. Si les trois coefficients $B$, $B'$, $B''$ sont différents de zéro, les conditions, pour qu'il y ait une racine double, sont (n° 501)

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

et la direction de l'axe est donnée par les formules

$$\frac{\alpha}{B'B''} = \frac{\beta}{B''B} = \frac{\gamma}{BB'}.$$

Lorsqu'un seul des coefficients $B, B', B''$ est égal à zéro l'équation en $S$ n'a jamais de racine double. Si deux coefficients $B'$, $B''$ sont nuls, la condition pour l'existence d'une racine double est (n° 502)

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0;$$

et l'on a

$$\alpha = 0, \quad \frac{\beta}{A' - A} = \frac{\gamma}{A}.$$

509. On peut résoudre la même question, en coordonnées rectangulaires ou obliques, par une méthode analogue à celle employée au livre III, chapitre III. Le polynôme homogène et du second degré

(5) $$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

par rapport aux trois variables $x, y, z$ est égal au produit de deux polynômes du premier degré par rapport à ces mêmes variables lorsque le discriminant

$$\Delta = AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''$$

est nul.

Concevons que, sans changer l'origine, on substitue au premier système d'axes, qui font deux à deux des angles représentés respectivement par $\lambda, \mu, \nu$, un second système d'axes rectangulaires tel que le polynôme (5) se réduise à

$$(6) \qquad Mx'^2 + Ny'^2 + Pz'^2.$$

En effectuant la même transformation pour la fonction

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$

elle se changera en

$$x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

car, ces deux expressions représentent le carré de la distance de l'origine à un même point pris arbitrairement dans l'espace. Il en résulte que, le polynôme homogène

$$(7) \qquad (A - S)x^2 + (A' - S)y^2 + (A'' - S)z^2$$
$$+ 2(B - S\cos\lambda)yz + 2(B' - S\cos\mu)zx + 2(B'' - S\cos\nu)xy,$$

dans lequel S désigne une constante arbitraire, devient

$$(8) \qquad (M - S)x'^2 + (N - S)y'^2 + (P - S)z'^2.$$

Les valeurs de S, pour lesquelles l'un des polynômes (7) ou (8) est égal au produit de deux fonctions homogènes et du premier degré des variables dont il dépend étant évidemment les mêmes, les deux équations

$$(9) \qquad (A - S)(A' - S)(A'' - S)$$
$$-(A-S)(B-S\cos\lambda)^2 - (A'-S)(B'-S\cos\mu)^2 - (A''-S)(B''-S\cos\nu)^2$$
$$+ 2(B - S\cos\lambda)(B' - S\cos\mu)(B'' - S\cos\nu) = 0,$$

$$(10) \qquad (M - S)(N - S)(P - S) = 0,$$

admettent les mêmes racines. On en conclut que les coefficients M, N, P, du polynôme (6) sont respectivement égaux aux racines $S_1$, $S_2$, $S_3$ de l'équation du troisième degré (9).

Quand on attribue à S l'une des valeurs $S_1$, $S_2$, $S_3$, par exemple $S = S_1 = M$, l'équation obtenue en égalant à zéro le polynôme (7), dans lequel on a remplacé S par $S_1$, représente, dans le premier système d'axes, deux plans qui se coupent suivant la droite OX' intersection des deux plans définis dans le second système par l'équation $(S_2 - S_1)y'^2 + (S_3 - S_1)z'^2 = 0$. On forme les équations de cette droite, dans le premier système d'axes, en égalant à zéro deux des dérivées partielles du premier ordre du polynôme (7). Quand les deux équations ainsi obtenues représentent le même plan, la direction OX' est une direction arbitraire comprise dans ce plan.

## SUR LES FONCTIONS DES COEFFICIENTS DE L'ÉQUATION D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE QUI RESTENT INVARIABLES QUAND ON FAIT UN CHANGEMENT D'AXES.

**810.** Posons, pour abréger,

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

et considérons une surface qui a pour équation par rapport à un système d'axes *rectangulaires*

$$\varphi(x,y,z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0. \tag{11}$$

Si l'on passe de ce système d'axes à un autre système d'axes rectangulaires, les formules de transformation sont de la forme

$$\begin{aligned} x &= a + lx_1 + my_1 + nz_1 \\ y &= b + l'x_1 + m'y_1 + n'z_1 \\ z &= c + l''x_1 + m''y_1 + n''z_1 \end{aligned}$$

et l'équation de la surface devient

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) + 2C_1x_1 + 2C'_1y_1) + 2C''_1z_1 + F_1 = 0 \tag{12}$$

en posant

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = A_1x_1^2 + A'_1y_1^2 + A''_1z_1^2 + 2B_1y_1z_1 + 2B'_1x_1z_1 + 2B''_1x_1y_1.$$

Nous allons montrer que les quatre quantités

$$K = A + A' + A'', \quad L = A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \tag{13}$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix}$$

conservent les mêmes valeurs quand on passe de l'ancien système d'axes au nouveau. En d'autres termes, si l'on appelle $K_1$, $L_1$, $\Delta_1$, $D_1$ les valeurs que prennent K, L, $\Delta$, D quand on y

remplace les coefficients A, A', A'',... F par $A_1$, $A'_1$, $A''_1$,.. $F_1$, on a

$$K_1 = K \ , \ L_1 = L \ , \ \Delta_1 = \Delta, D_1 = D.$$

Considérons d'abord les trois quantités K, L, Δ qui ne dépendent que des coefficients des termes du second degré. Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point $O_1$ en faisant

$$x = a + x' \quad , \quad y = b + y' \quad , \quad z = c + z',$$

l'ensemble des termes du second degré de la nouvelle équation de la surface est $\varphi(x', y', z')$; donc les coefficients des termes du second degré et, par suite, les quantités K, L, Δ ne changent pas. Ensuite, si l'on fait tourner les axes, il faudra employer les formules de transformation

$$(14) \quad x' = lx_1 + my_1 + nz_1 \quad , \quad y' = l'x_1 + m'y_1 + n'z_1 , \\ z' = l''x_1 + m''y_1 + n''z_1 ,$$

et, en appelant $\varphi_1(x_1, y_1, z_1)$ l'ensemble des termes du second degré de la nouvelle équation, on aura identiquement, en vertu des formules (14)

$$\varphi(x', y', z') = \varphi_1(x_1, y_1, z_1);$$

d'autre part, l'on a identiquement, en vertu de ces mêmes formules

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 ,$$

car les deux membres de cette relation expriment le carré de la distance du même point à l'origine $O_1$. On a donc, en multipliant la seconde de ces identités par S et la retranchant de la première,

$$(15) \quad \varphi(x', y', z') - S(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1) \\ - S(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2).$$

Si l'on détermine S de telle façon que le premier membre de cette identité se décompose en un produit de facteurs linéaires en $x', y', z'$, le second membre, en vertu des relations (14), se décomposera en un produit de facteurs linéaires en $x_1, y_1, z_1$; et réciproquement. Donc les valeurs de S pour lesquelles le premier membre de l'identité (15) est un produit

de facteurs linéaires, sont égales aux valeurs de S pour lesquelles le second membre est un produit de facteurs linéaires; or les premières valeurs de S sont racines de l'équation en S

$$S^3 - KS^2 + LS - \Delta = 0,$$

et les secondes sont racines de la nouvelle équation en S

$$S^3 - K_1 S^2 + L_1 S - \Delta_1 = 0;$$

ces deux équations ayant les mêmes racines, on a

$$K_1 = K \ , \ L_1 = L \ , \ \Delta_1 = \Delta.$$

Nous avons ainsi démontré que les quantités K, L, $\Delta$ ne changent pas; il en est de même de D. En effet, supposons $\Delta$ différent de zéro; alors, en transportant l'origine des coordonnées au centre de la surface, on a une équation dont le terme constant a pour valeur $\frac{D}{\Delta}$ (n° 489). Comme ce terme constant reste le même, quelle que soit l'orientation du trièdre des axes coordonnés, et comme $\Delta$ ne change pas quand on fait un changement d'axes, D ne change pas non plus et l'on a

$$D_1 = D.$$

Cette relation devient identique si l'on y remplace $A_1$, $A'_1$, $A''_1$,... $F_1$ par leurs expressions en fonction des anciens coefficients A, A', A''... F, telles qu'elles résultent des formules de transformation : elle a donc lieu quels que soient A, A', A''.... F, c'est-à-dire même si $\Delta$ est nul.

Les quatre quantités

$$(16) \qquad K \ , \ L \ , \ \Delta \ , \ D$$

sont, par rapport aux coefficients A, A', A'', B, B', B'', C, C', C'', F, homogènes et de degrés respectifs 1, 2, 3, 4. Si donc on multiplie le premier membre de l'équation de la surface par une constante $\lambda$, la première des quantités (16) est multipliée par $\lambda$, la deuxième par $\lambda^2$, la troisième par $\lambda^3$, la quatrième par $\lambda^4$. On en conclut qu'une combinaison des quantités (16), homogène et de degré zéro par rapport aux coefficients A, A', A''... F, ne change pas quand on multiplie le premier membre

de l'équation de la surface par la constante $\lambda$. Telles sont par exemple les trois combinaisons

$$(17)\qquad \frac{K\Delta}{D},\quad \frac{L\Delta^2}{D^2},\quad \frac{\Delta^4}{D^3}.$$

On a ainsi trois quantités qui ne changent pas quand on fait un changement d'axes rectangulaires et qu'on multiplie ou divise tous les coefficients par un même facteur.

Les quantités (16) jouent, dans la théorie des surfaces du second degré, le même rôle que les quantités

$$\frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta},\quad \frac{f}{\sin^2\theta},\quad \frac{\Delta}{\sin^2\theta}$$

dans la théorie des coniques (n$^{os}$ 144 et 214).

On appelle cône des directions asymptotiques d'une surface, le cône dont on obtient l'équation en égalant à zéro l'ensemble des termes de degré le plus élevé dans l'équation de la surface. Pour une surface du second degré, ce cône a pour équation

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

La condition $K=0$ exprime que ce cône est capable d'un trièdre trirectangle inscrit (n° 478).

La condition $L=0$ exprime que ce cône est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit (n° 478).

La condition $\Delta=0$, que ce cône se décompose en deux plans.

Enfin la condition $D=0$ que la surface du second ordre est un cône, un cylindre, ou un système de plans.

Remarque. La réalité des racines de l'équation en S, l'invariabilité des fonctions K, L, $\Delta$, pour les changements d'axes rectangulaires et les significations géométriques des équations $K=0$, $L=0$, $\Delta=0$ sont des conséquences immédiates des théorèmes qui ont été établis pour l'équation en $\lambda$ relative à deux coniques (n$^{os}$ 332 et suiv.). En effet, considérons les deux coniques qui auraient pour équations en coordonnées planes homogènes

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

$$(18)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

ou, en coordonnées cartésiennes $X = \frac{x}{z}$, $Y = \frac{y}{z}$,

$$AX^2 + A'Y^2 + A'' + 2BY + 2B'X + 2B''XY = 0$$
$$X^2 + Y^2 + 1 = 0.$$

L'équation en $\lambda$ relative à ces deux coniques n'est autre chose que l'équation en S dans laquelle on remplacerait S par $-\lambda$; comme la seconde des coniques considérées est entièrement imaginaire, les quatre points d'intersection des deux coniques sont imaginaires et les racines de l'équation en $\lambda$, c'est-à-dire aussi celles de l'équation en S, sont réelles.

Si l'on fait une substitution de la forme

$$\begin{aligned} x &= lx_1 + my_1 + nz_1 \\ y &= l'x_1 + m'y_1 + n'z_1 \\ z &= l''x_1 + m''y_1 + n''z_1, \end{aligned}$$

les racines de l'équation en $\lambda$ ne changent pas. Or, si cette substitution correspond à un changement d'axes rectangulaires dans l'espace, $x^2 + y^2 + z^2$ se change en $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, et la nouvelle équation en $\lambda$ est encore la nouvelle équation en S dans laquelle on remplacerait S par $-\lambda$. Les racines de l'équation en S restent donc invariables quand on fait un changement d'axes rectangulaires : les coefficients K, L, $\Delta$ de cette équation sont donc invariables.

Enfin on a vu que, si dans l'équation en $\lambda$ relative aux deux coniques (18), le terme en $\lambda^2$ manque, il existe un triangle inscrit dans la première des coniques $\varphi(x, y, z) = 0$ et conjugué à la seconde $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. En appelant $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les coordonnées homogènes des sommets de ce triangle, on a, puisque ces sommets sont sur la première conique

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad , \quad \varphi(\alpha', \beta', \gamma') = 0 \quad , \quad \varphi(\alpha'', \beta'', \gamma'') = 0,$$

et, puisqu'ils sont conjugués par rapport à la seconde

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \quad , \quad \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0 \quad , \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Ces conditions sont donc remplies si le coefficient K de l'équation en S est nul : or elles expriment que, dans l'espace, les

trois droites dont les paramètres directeurs sont $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ forment un trièdre trirectangle inscrit au cône des directions asymptotiques de la surface.

On retrouverait de même la signification de l'équation $L = 0$.

# CHAPITRE III

## De l'ellipsoïde.

**611.** Nous avons ramené l'équation des surfaces du second degré qui ont un centre unique à la forme

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + H = 0,$$

en rapportant la surface à ses trois plans principaux.

Supposons d'abord que les trois racines aient le même signe, par exemple le signe $+$. Si le terme constant H est positif, l'équation n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point de l'espace. Si le terme constant H est égal à zéro, l'équation n'est satisfaite que pour $x = y = z = 0$; elle représente un seul point, l'origine. Considérons enfin le cas où H est négatif et posons

$$a = \sqrt{\frac{-H}{S}}, \quad b = \sqrt{\frac{-H}{S'}}, \quad c = \sqrt{\frac{-H}{S''}};$$

l'équation se met sous la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La coordonnée $x$ ne peut varier que de $-a$ à $+a$, $y$ de $-b$ à $+b$, $z$ de $-c$ à $+c$; prenons sur l'axe des $x$, de part et d'autre de l'origine, des longueurs OA et OA' égales à $a$, sur l'axe des $y$ des longueurs OB et OB' égales à $b$, sur l'axe des $z$ des longueurs OC et OC' égales à $c$ (fig. 292). Par les points A et A', B et B', C et C', imaginons des plans respectivement parallèles aux plans YOZ, ZOX, XOY, la surface sera entièrement comprise dans le parallélipipède rectangle ainsi formé. On a donné à cette surface le nom d'*ellipsoïde*.

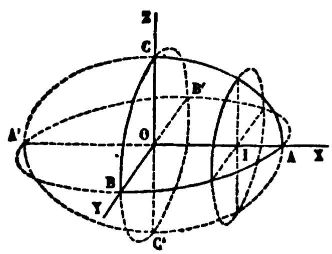


Fig. 292.

**812.** L'origine est *centre* de l'ellipsoïde. Les plans coordonnés, qui sont les trois *plans principaux* de l'ellipsoïde, coupent la surface suivant trois ellipses ABA', BCB', CAC', que l'on appelle *sections principales* de l'ellipsoïde.

Si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan YOZ, on obtient pour section l'ellipse

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

dont le centre I est sur l'axe des $x$ (fig. 292). Les points de la courbe étant deux à deux symétriques par rapport au centre I, les points de la surface sont symétriques deux à deux par rapport à la droite OX, qui est un *axe* de symétrie de la surface. A mesure que le plan sécant s'éloigne du plan principal YOZ, c'est-à-dire quand $x$ varie de o à $a$, l'ellipse d'intersection reste toujours semblable à l'ellipse CBC', mais diminue jusqu'à se réduire à un point. Il en est de même des sections parallèles à chacun des deux autres plans principaux. Ainsi l'ellipsoïde admet trois axes qui sont les intersections des plans principaux deux à deux. Les extrémités des axes sont les *sommets* de l'ellipsoïde. Si l'on suppose $a>b>c$, $2a$ sera l'axe majeur, $2b$ l'axe moyen, $2c$ l'axe mineur.

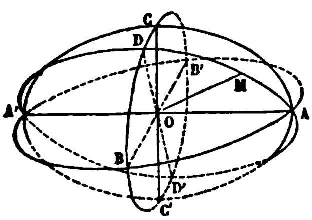


Fig. 293.

Soit M un point quelconque de l'ellipsoïde (fig. 293); par ce point et le grand axe faisons passer un plan; ce plan coupe la surface suivant une courbe du second degré fermée, par conséquent, suivant une ellipse; à cause de la symétrie, les axes de cette ellipse sont la droite AA' et le diamètre DD' suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse principale CBC'B'; le rayon OD, compris entre les deux axes $b$ et $c$ de cette ellipse principale, est plus grand que $c$; mais d'un autre côté le rayon OM est compris entre OD et $a$; ce rayon est donc compris entre $c$ et $a$. On conclut de là que le plus grand rayon de l'ellipsoïde est le demi-grand axe OA, le plus petit, le demi-petit axe OC.

### PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

**513.** Considérons une série de cordes parallèles à la droite

(2) $$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma};$$

le plan diamétral qui les divise en deux parties égales a pour équation (n° 491)

(3) $$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0$$

Réciproquement, tout plan passant par le centre est un plan diamétral; soit, en effet, le plan

(4) $$Ax+By+Cz=0;$$

ce plan coïncidera avec le plan diamétral précédent, si l'on a

(5) $$\frac{\alpha}{a^2A}=\frac{\beta}{b^2B}=\frac{\gamma}{c^2C}.$$

Telles sont les relations qui existent entre la direction des cordes et celle du plan diamétral conjugué. Il est évident que le plan diamétral coupe la surface suivant une courbe fermée du second degré, et, par conséquent, suivant une ellipse. Chaque point de cette ellipse est le point de contact d'une droite parallèle aux cordes et tangente à la surface ; ces tangentes forment un cylindre tangent à l'ellipsoïde, tout le long de cette ellipse et l'enveloppant.

**514.** Nous savons que les sections faites par des plans parallèles dans l'ellipsoïde sont des ellipses homothétiques (n° 484). Soit $Ax+By+Cz=l$ l'équation d'un plan, dans laquelle A, B, C sont des cofficients constants, $l$ un paramètre variable; le lieu des centres de ces ellipses, ou le diamètre, est la droite (n° 495)

(6) $$\frac{x}{a^2A}=\frac{y}{b^2B}=\frac{z}{c^2C}$$

passant par le centre de la surface.

Le diamètre est parallèle aux cordes que le plan diamétral parallèle aux plans sécants divise en deux parties égales; car les coefficients de la droite et ceux du plan vérifient les relations (5).

Réciproquement, toute droite (2) passant par le centre est un diamètre; car si l'on mène le plan diamétral (3) conjugué de cette direction, et des plans sécants parallèles, le lieu des centres coïncidera avec la droite donnée.

L'équation du plan tangent (n° 475) se réduit ici à

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1. \tag{7}$$

Ce plan tangent est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui va du centre au point de contact; car ce diamètre ayant pour équation $\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}$, ses coefficients et ceux du plan tangent vérifient les relations (5).

### DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

**515.** Nous avons dit (n° 496) que trois diamètres forment un système de *diamètres conjugués*, quand chacun d'eux est conjugué du plan des deux autres, et nous avons déjà reconnu l'existence de pareils systèmes. Menons arbitrairement un premier diamètre OD (fig. 294) et considérons le plan diamétral conjugué; ce plan coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse; prenous deux diamètres conjugués quelconques OE, OF de cette ellipse; les trois diamètres OD, OE, OF formeront un système de diamètres conjugués; car si l'on prend pour axes des coordonnées les trois droites OD, OE, OF et que l'on appelle $a'$, $b'$, $c'$ les longueurs des trois rayons OD, OE, OF, d'après le raisonnement qui a été fait précédemment (n° 493), l'équation de l'ellipsoïde se mettra sous la forme

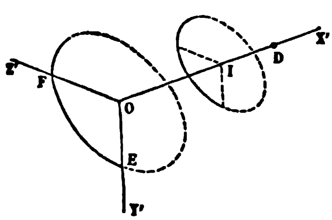


Fig. 294.

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1.$$

On en conclut que les trois axes des coordonnées forment un système de diamètres conjugués, ou, ce qui revient au même,

que les trois plans des coordonnées forment un système de plans diamétraux conjugués.

On voit bien, à l'aide de cette équation, comment varient les sections parallèles; si l'on coupe la surface par un plan parallèle au plan diamétral Y'OZ', on a une ellipse

$$\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1-\frac{x'^2}{a'^2},$$

homothétique à l'ellipse diamétrale EOF et ayant son centre au point I sur le diamètre OD; cette ellipse va en diminuant à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan diamétral; elle se réduit au point D quand le plan sécant passe par ce point, et alors le plan est tangent à la surface; au delà, le plan ne rencontre plus la surface; en d'autres termes, il la coupe suivant une ellipse imaginaire, dont le centre est réel et situé sur le prolongement de OD. Il en est de même de l'autre côté.

Quand l'ellipsoïde est rapporté à ses axes, les relations qui existent entre les coefficients de trois diamètres conjugués (n° 496) se simplifient et deviennent

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{mm'}{a^2}+\dfrac{nn'}{b^2}+\dfrac{pp'}{c^2}=0, \\ \dfrac{m'm''}{a^2}+\dfrac{n'n''}{b^2}+\dfrac{p'p''}{c^2}=0, \\ \dfrac{m''m}{a^2}+\dfrac{n''n}{b^2}+\dfrac{p''p}{c^2}=0. \end{cases}$$

Elles ont aussi la même forme quand l'ellipsoïde est rapporté à un système quelconque de diamètres conjugués.

Considérons deux systèmes de diamètres conjugués ODEF, OD'E'F' (fig. 295). Soit OG le diamètre suivant lequel se coupent les deux plans EOF, E'OF', OH et OH' les diamètres conjugués de OG dans ces deux plans. Si, conservant OD, on remplace les diamètres conjugués OE, OF par deux autres diamètres conjugués OG, OH de la même ellipse, la somme des carrés ne change pas;

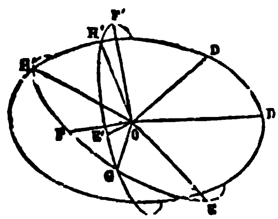


Fig. 295.

de même, si, conservant OD′, on remplace les deux diamètres conjugués OE′, OF′ par deux autres diamètres conjugués OG, OH′ de la même ellipse, la somme des carrés ne change pas. On a alors deux systèmes de diamètres conjugués OGHD, OGH′D′, qui ont un diamètre commun OG; les deux autres, étant situés dans le plan diamétral conjugué de OG, appartiennent à la même ellipse; donc la somme des carrés est la même. Ainsi, *la somme des carrés de trois diamètres conjugués est constante, et, par conséquent, égale à la somme des carrés des axes.*

On démontre de la même manière que *le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués est constant;* lorsqu'on remplace le système ODEF par le système ODGH, le volume ne change pas; car les deux parallélipipèdes ont des bases équivalentes, les parallélogrammes EOF, GOH, et même hauteur, la perpendiculaire abaissée du point D sur le plan des bases.

**510.** On peut démontrer ces théorèmes par une méthode analogue à celle du n° 509.

Imaginons l'ellipsoïde rapporté d'abord à ses axes, puis à un système de diamètres conjugués faisant entre eux des angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Par les formules de transformation des coordonnées, le trinôme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$

se change en

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}.$$

De même le trinôme

$$x^2+y^2+z^2$$

devient

$$x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\lambda+2z'x'\cos\mu+2x'y'\cos\nu.$$

Il en résulte que le polynôme homogène

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{1}{k}(x^2+y^2+z^2),$$

ou

$$(9)\qquad \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{k}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{k}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{k}\right)z^2,$$

dans lequel $k$ désigne une constante arbitraire, se transforme en

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-\frac{1}{k}(x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\lambda+2z'x'\cos\mu+2x'y'\cos\nu),$$

ou

$$(10)\qquad \left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{k}\right)x'^2+\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{k}\right)y'^2+\left(\frac{1}{c'^2}-\frac{1}{k}\right)z'^2 \\ -\frac{2\cos\lambda}{k}y'z'-\frac{2\cos\mu}{k}z'x'-\frac{2\cos\nu}{k}x'y'.$$

Les valeurs de $k$, pour lesquelles l'un des polynômes (9) ou (10) se réduit à une somme de deux carrés, étant les mêmes, les deux équations

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{k}\right)=0,$$

ou

$$(11)\qquad (k-a^2)(k-b^2)(k-c^2)=0,$$

et

$$\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{c'^2}-\frac{1}{k}\right)-\frac{2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}{k^3} \\ -\left(\frac{1}{a'^2}-\frac{1}{k}\right)\frac{\cos^2\lambda}{k^2}-\left(\frac{1}{b'^2}-\frac{1}{k}\right)\frac{\cos^2\mu}{k^2}-\left(\frac{1}{c'^2}-\frac{1}{k}\right)\frac{\cos^2\nu}{k^2}=0,$$

où

$$(12)\qquad k^3-(a'^2+b'^2+c'^2)k^2+(b'^2c'^2\sin^2\lambda+c'^2a'^2\sin^2\mu+a'^2b'^2\sin^2\nu)k \\ -a'^2b'^2c'^2\Omega=0,$$

ont les mêmes racines; il en résulte que les racines de l'équation (12) sont égales respectivement à $a^2$, $b^2$, $c^2$; on en déduit les trois relations

$$(13)\qquad a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2,$$

$$(14)\qquad b'^2c'^2\sin^2\lambda+c'^2a'^2\sin^2\mu+a'^2b'^2\sin^2\nu=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2,$$

$$(15)\qquad a'^2b'^2c'^2\Omega=a^2b^2c^2.$$

La première indique que la somme des carrés des trois diamètres conjugués est constante; d'après la signification de la quantité $\Omega$ (n° 419), la troisième indique que le volume du parallélipipède construit sur les trois diamètres conjugués est constant; la seconde exprime que la somme des carrés des faces de ce parallélipipède est constante.

## SECTIONS CIRCULAIRES.

**517.** Parmi les sections planes de l'ellipsoïde, il importe d'examiner en particulier les sections circulaires.

Supposons qu'une série de plans parallèles coupent l'ellipsoïde suivant des cercles et considérons le diamètre correspondant. Le plan mené par ce diamètre perpendiculairement aux plans parallèles, divisant chacun des cercles en deux parties symétriques par rapport à ce plan même, est un plan principal de l'ellipsoïde. Ainsi, les plans des sections circulaires sont perpendiculaires à un plan principal, et par conséquent les plans diamétraux qui coupent l'ellipsoïde suivant des cercles passent par l'un des axes de la surface. Cet axe est l'axe moyen BB' de l'ellipsoïde; car nous avons vu (n° 512) que, lorsque le plan sécant passe par le grand axe AA', les deux axes de l'ellipse diffèrent nécessairement; il en est de même quand le plan sécant passe par le petit axe CC'.

Lorsque le plan sécant passe par l'axe moyen BB', les deux axes de l'ellipse d'intersection sont l'axe BB' et le diamètre DD' suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse principale ACA' (fig. 296). La longueur de ce diamètre DD', variant de CC' à AA', pourra être égale à BB', et alors la section sera un cercle. Du point O comme centre, avec un rayon égal à $b$ et dans le plan principal ACA', décrivons un arc de cercle qui coupera l'ellipse principale en D et E; menons les diamètres OD et OE; les deux plans diamétraux BOD, BOE couperont l'ellipsoïde suivant des cercles. On conclut de là que *l'ellipsoïde à trois axes inégaux admet deux séries de sections circulaires.*

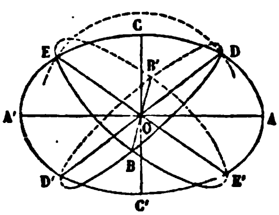


Fig. 296.

Quand l'ellipsoïde est de révolution, les deux plans BOD, BOE se confondent avec le plan principal perpendiculaire à l'axe de révolution, c'est-à-dire avec l'équateur de la surface. On n'a plus alors qu'une série de sections circulaires.

On peut résoudre la question par l'analyse. Considérons la courbe d'intersection de l'ellipsoïde

$$(16) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et d'une sphère concentrique

$$(17) \qquad \frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}-1=0.$$

L'équation

$$(18) \qquad \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}\right)z^2=0,$$

que l'on obtient en retranchant ces deux équations membre à membre, représente un cône passant par la ligne d'intersection de l'ellipsoïde et de la sphère. Lorsque la condition

$$(19) \qquad \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}\right)=0$$

est satisfaite, le premier membre de l'équation (18) est la somme de deux carrés, ou le produit de deux facteurs du premier degré, et par conséquent le cône se réduit à deux plans. Cette condition indique que le rayon de la sphère est égal à l'un des axes de l'ellipsoïde. On obtient ainsi six plans *cycliques*, mais deux seulement sont réels; ce sont ceux qui correspondent à la solution $R^2=b^2$, et qui sont représentés par l'équation

$$(20) \qquad \left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)z^2-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2=0.$$

Nous verrons plus tard (n° 587) que cette méthode donne bien tous les plans cycliques,

### AXES D'UNE SECTION PLANE.

**517** *bis*. Considérons un plan

$$(P) \qquad ux+vy+wz=0$$

passant par le centre O de l'ellipsoïde, appelons $x', y', z$, les coordonnées d'un sommet M' de la section faite par ce plan dans la surface et R la longueur de l'axe OM'. La sphère représentée par l'équation (17) coupe le plan (P) suivant un

cercle bitangent à la section plane : donc le cône (18) passant par l'intersection de cette sphère et de l'ellipsoïde, est tangent au plan (P) le long de la génératrice OM'. Pour exprimer cette condition, identifions l'équation du plan tangent au cône en M'

$$xx'\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)+yy'\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)+zz'\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}\right)=0$$

avec celle du plan (P); nous aurons

$$\text{(A)} \qquad \frac{x'}{u}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)=\frac{y'}{v}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)=\frac{z'}{w}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}\right),$$

d'où, en portant ces valeurs de $x'$, $y'$, $z'$ dans l'équation $ux'+vy'+wz'=0$ qui exprime que le point M' est dans le plan (P),

$$\frac{u^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}}+\frac{v^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}}+\frac{w^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}}=0,$$

équation du second degré en $R^2$ qui admet pour racines les carrés des longueurs des axes de la section plane $R^2=a'^2$, $R^2=b'^2$. Les équations (A) dans lesquelles on remplace $R^2$ successivement par ces racines $a'^2$ et $b'^2$, et $x', y', z'$ par des coordonnées courantes seront les équations des axes de la section plane.

*Application.* Chercher le lieu des points obtenus en portant, sur la perpendiculaire élevée en O au plan de chaque section diamétrale, des longueurs égales aux axes de cette section. Ce lieu qui est une surface du quatrième ordre coupée par chacun des plans de coordonnées suivant deux coniques s'appelle *surface des ondes*.

### PLAN TANGENT.

**518.** L'équation du plan tangent à l'ellipsoïde au point $(x', y', z')$ est

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$$

On peut lui donner une autre forme qu'il est bon de connaître. Représentons le plan tangent par l'équation

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=l,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les cosinus des angles que la normale au plan fait avec les axes, et $l$ la distance du plan à l'origine. En identifiant ces deux équations, on a les relations

$$\frac{\frac{x'}{a}}{a\alpha}=\frac{\frac{y'}{b}}{b\beta}=\frac{\frac{z'}{c}}{c\gamma}=\frac{1}{l}=\frac{1}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}};$$

on en déduit la valeur de $l$, et l'équation du plan tangent devient

$$(21)\qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}.$$

Pour en montrer une application, considérons trois plans tangents perpendiculaires entre eux

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y+\gamma z&=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2},\\ \alpha' x+\beta' y+\gamma' z&=\sqrt{a^2\alpha'^2+b^2\beta'^2+c^2\gamma'^2},\\ \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z&=\sqrt{a^2\alpha''^2+b^2\beta''^2+c^2\gamma''^2},\end{aligned}$$

les neuf cosinus vérifiant les relations (7) et (8) établies au n° 423. Si l'on élève au carré les deux membres de chacune de ces équations et si l'on ajoute, on obtient l'équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2;$$

d'où l'on conclut que *le lieu des sommets des angles trièdres trirectangles circonscrits à un ellipsoïde est une sphère.*

# CHAPITRE IV

## Des hyperboloïdes.

Considérons maintenant le cas où les trois racines de l'équa tion en S n'ont pas le même signe; supposons, par exemple, que les deux racines S et S' soient positives, et la troisième négative.

### CÔNE.

**619.** Si le terme constant H est nul, l'équation

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = 0,$$

étant homogène par rapport à $x$, $y$, $z$, représente un cône (n° 464). Si l'on pose

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\frac{-S'}{S}}, \quad \operatorname{tang} \beta = \sqrt{\frac{-S''}{S}},$$

l'équation prend la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\operatorname{tang}^2 \alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tang}^2 \beta} - z^2 = 0.$$

Le plan principal XOZ coupe la surface suivant deux droites OA, OA' faisant avec OZ un angle égal à $\alpha$, le plan principal YOZ suivant deux droites OB, OB' faisant avec OZ un angle égal à $\beta$ (fig. 297). Le plan principal XOY coupe la surface en un seul point O. Tout plan parallèle au plan XOY donne une ellipse ABA' ayant pour équation

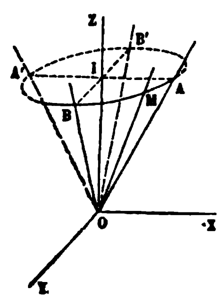


Fig. 297.

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang}^2 \alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tang}^2 \beta} = z^2;$$

cette ellipse, qui a son centre I sur l'axe OZ, augmente indéfiniment à mesure que le plan sécant s'éloigne du sommet. Ainsi, on peut regarder le cône comme en-

gendré par une droite OM, qui tourne autour du point O en glissant sur l'ellipse ABA'. En supposant S plus grand que S' et par conséquent $\alpha$ plus petit que $\beta$, on voit que l'angle que fait la génératrice OM avec l'axe OZ croît de $\alpha$ à $\beta$. Le cône est formé de deux nappes égales situées de part et d'autre du sommet. L'équation des cônes du second degré se ramenant à la forme (1), il en résulte que tout cône du second degré peut être considéré comme un cône droit à base elliptique.

Les plans perpendiculaires à chacun des deux autres axes OX et OY coupent le cône suivant des hyperboles ayant leurs centres sur ces axes. Les trois axes des coordonnées sont des axes du cône ; OZ est situé à l'intérieur du cône, les deux autres à l'extérieur. Par rapport à chacun de ceux-ci, un point quelconque du cône a son symétrique sur l'autre nappe ; par rapport au premier, un point a son symétrique sur la même nappe.

Lorsqu'on a $S = S'$, ou $\alpha = \beta$, le cône est de révolution autour de la droite OZ.

### HYPERBOLOIDE A UNE NAPPE.

**520.** Supposons que le terme constant H ait une valeur négative et posons

$$a = \sqrt{\frac{-H}{S}}, \quad b = \sqrt{\frac{-H}{S'}}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{S''}},$$

l'équation de la surface prendra la forme

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

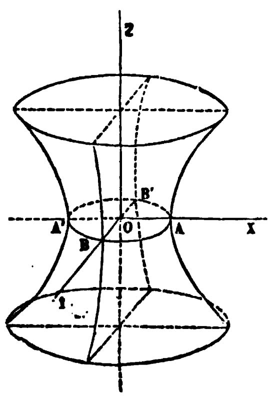



Fig. 298.

Le plan principal XOY coupe la surface suivant une ellipse ABA' (fig. 298); le plan principal XOZ suivant une hyperbole dont A'A est l'axe transverse et OZ l'axe imaginaire; le plan principal YOZ coupe de même la surface suivant une hyperbole dont BB' est l'axe transverse et OZ l'axe imaginaire. Si l'on coupe

la surface par des plans parallèles au plan XOY, on a des ellipses homothétiques

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},$$

qui ont leurs centres sur OZ, et qui vont en augmentant indéfiniment, à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan principal, d'un côté ou de l'autre; l'ellipse minimum ABA', déterminée par le plan principal, s'appelle *ellipse de gorge*. On voit par là que la surface est formée d'une seule nappe continue qui s'étend indéfiniment, en s'ouvrant de plus en plus de chaque côté du plan de l'ellipse de gorge. On a donné à cette surface le nom d'*hyperboloïde à une nappe*.

Les plans parallèles au plan XOZ coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur OY ; de même, les plans parallèles au plan YOZ coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques ayant leurs centres sur OX; il résulte de là que l'hyperboloïde à une nappe admet trois axes, deux réels AA', BB', un imaginaire OZ. Les deux axes réels sont les axes de l'ellipse de gorge; l'axe imaginaire OZ est situé à l'intérieur de la surface.

Lorsque les deux axes réels deviennent égaux, les sections parallèles au plan XOY étant des cercles, la surface est de révolution; elle est engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe imaginaire OZ.

### HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES.

**521.** Examinons enfin le cas où le terme constant H a une valeur positive; si l'on pose

$$a=\sqrt{\frac{H}{S}},\quad b=\sqrt{\frac{H}{S'}},\quad c=\sqrt{\frac{-H}{S''}},$$

l'équation prend la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{3}$$

Les deux plans principaux XOZ, YOZ coupent la surface suivant

des hyperboles dont l'axe transverse CC′ a une longueur égale à $2c$ et est dirigé suivant OZ (fig. 299). Le plan principal XOY ne rencontre pas la surface. La section faite par un plan parallèle au plan XOY est une ellipse

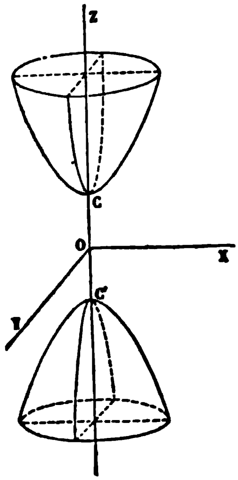


Fig. 299.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1;$$

mais cette ellipse n'est réelle que si la valeur absolue de $z$ est plus grande que $c$; si donc par chacun des points C et C′ on mène un plan parallèle au plan XOY, il n'y aura aucun point du lieu situé entre ces deux plans. Si le plan sécant s'éloigne à partir du point C, l'ellipse, qui est d'abord réduite à un point, augmente indéfiniment; et de même de l'autre côté, à partir du point C′. On voit par là que la surface se compose de deux nappes infinies et séparées l'une de l'autre; on lui a donné le nom d'*hyperboloïde à deux nappes*. La surface a trois axes, un réel CC′, deux imaginaires OX et OY.

Quand les deux axes imaginaires $2a$ et $2b$ deviennent égaux, la surface est de révolution; elle est engendrée par une hyperbole tournant autour de son axe transverse CC′.

### CÔNE ASYMPTOTE.

**522.** On dit que deux hyperboloïdes sont *conjugués* lorsqu'ils ont même centre et mêmes axes en grandeur et en direction, et que les axes réels de l'un sont imaginaires dans l'autre; il est clair que les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1,$$

représentent deux hyperboloïdes conjugués. Un plan sécant mené par l'axe OZ coupe ces deux surfaces suivant des hyperboles; l'hyperbole située sur l'hyperboloïde à deux nappes a pour axe transverse CC′; celle qui est située sur l'hyper-

boloïde à une nappe a pour axe transverse le diamètre suivant lequel le plan sécant coupe l'ellipse de gorge. Soit $y = mx$ l'équation du plan sécant; l'équation

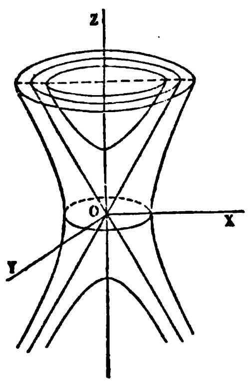


Fig. 300.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

provenant de l'élimination de $y$, donne les projections des courbes d'intersection sur le plan XOZ; ces courbes projections sont des hyperboles conjuguées, ayant pour asymptotes communes les deux droites représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Si, à cette équation, on joint celle du plan sécant $y = mx$, on aura les asymptotes des hyperboles dans l'espace. Imaginons actuellement que le plan sécant tourne autour de l'axe OZ; ces asymptotes décriront un cône que nous appellerons *cône asymptote* des hyperboloïdes; on obtient son équation en éliminant le paramètre variable $m$ entre les deux équations précédentes, ce qui donne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Ainsi, les deux hyperboloïdes conjugués ont même cône asymptote. L'hyperboloïde à deux nappes est situé à l'intérieur du cône, l'hyperboloïde à une nappe à l'extérieur (fig. 300).

**523.** Plus généralement, le cône asymptote est le lieu des asymptotes de toutes les hyperboles que l'on obtient en coupant les deux surfaces par des plans passant par le centre. En effet, soit $z = mx + ny$ l'équation du plan sécant; les courbes d'intersection ont pour projections sur le plan XOY

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(mx + ny)^2}{c^2} = \pm 1;$$

les asymptotes sont représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{(mx + ny)^2}{c^2} = 0,$$

jointe à celle du plan sécant. Il arrive ici que l'on peut éliminer à la fois les deux paramètres variables $m$ et $n$ entre ces équations, ce qui reproduit le cône asymptote

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Nous ferons remarquer que, lorsqu'un hyperboloïde est rapporté à ses axes, si dans l'équation on supprime le terme constant, on obtient le cône asymptote, et que, si l'on change le signe de ce terme constant, on obtient l'hyperboloïde conjugué. Il est clair, d'après les formules de transformation des coordonnées, que la même propriété a lieu quand la surface est rapportée à des axes de coordonnées quelconques passant par le centre.

### SECTIONS PLANES.

**524.** Considérons les surfaces représentées par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda, \tag{4}$$

dans laquelle $\lambda$ est un paramètre arbitraire. On a deux hyperboloïdes conjugués et leur cône asymptote, quand on attribue au paramètre $\lambda$ les valeurs $\pm 1$ ou la valeur $0$. Si l'on coupe ces surfaces par un même plan

$$Ax+By+Cz=l,$$

les projections des courbes d'intersection sur le plan XOY ont pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(l-Ax-By)^2}{c^2C^2}=\lambda;$$

le paramètre $\lambda$ n'entrant que dans le terme constant, il en résulte que les courbes projections, et, par suite, les courbes dans l'espace, sont homothétiques ; car ce sont les intersections de cylindres homothétiques par des plans parallèles (n° 483) ; elles sont en outre concentriques, si elles ont un centre ; quand ce sont des paraboles, elles ont même paramètre, et par conséquent sont égales.

**525.** Il résulte de là que, pour reconnaître l'espèce de la

section d'un hyperboloïde par un plan P, il suffit d'étudier la section du cône asymptote par le plan. On sait d'ailleurs que les sections parallèles sont homothétiques.

Par le centre, menons un plan P′ parallèle au point P ; il y a trois cas à distinguer. 1° Si le plan P′ ne coupe le cône qu'en un seul point, les deux nappes du cône sont situées, l'une d'un côté de ce plan, la seconde de l'autre côté ; il est clair que le plan parallèle P coupera toutes les droites d'une même nappe, et, par conséquent, déterminera sur le cône une courbe fermée qui sera une ellipse ; les sections faites par ce même plan dans les hyperboloïdes seront aussi des ellipses. 2° Si le plan P′ coupe le cône suivant deux droites, il partage chacune des nappes en deux parties situées de part et d'autre de ce plan ; le plan parallèle P rencontrera la partie de chacune des nappes qui est du même côté du plan P′ que le plan P, et, par conséquent, coupera le cône suivant deux branches séparées, constituant une hyperbole. Si une génératrice du cône se rapproche de l'une des génératrices situées dans le plan P′, elle devient parallèle au plan P, et le point d'intersection s'éloigne à l'infini ; l'hyperbole a donc ses asymptotes parallèles aux droites situées dans le plan P′. 3° Enfin, si le plan P′ est tangent au cône asymptote, l'une des nappes du cône est située tout entière d'un côté de ce plan, l'autre nappe de l'autre côté, excepté l'arête de contact, qui est dans le plan ; le plan parallèle P ne rencontrera que la nappe qui est du même côté du plan P′ que le plan P, et la coupera suivant une branche infinie, et, par conséquent, suivant une parabole.

Nous examinerons plus tard en détail les diverses variétés que présentent ces courbes, et leur déformation quand on fait mouvoir le plan sécant.

### PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

**526.** Si l'on considère les surfaces représentées par l'équation (4), le plan diamétral conjugué de la droite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \tag{5}$$

a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta x}{b^2}-\frac{\gamma z}{c^2}=0. \tag{G}$$

Ce plan est le même dans les deux hyperboloïdes et dans le cône asymptote. On pourrait d'ailleurs le reconnaître *à priori*. En effet, considérons une sécante qui rencontre le cône en deux points; le plan mené par cette sécante et le centre coupe le cône suivant les asymptotes des hyperboles déterminées par ce plan dans les hyperboloïdes; les portions de cette sécante comprises entre les hyperboles et les asymptotes étant égales (n° 192), il en résulte que les cordes ont le même point milieu.

**527.** L'espèce de la section déterminée par le plan diamétral dépend de la direction des cordes. Par le centre, menons une parallèle aux cordes; si cette droite est située à l'intérieur du cône asymptote, il est évident que chaque sécante rencontre les deux nappes du cône et que, par conséquent, le point milieu est entre les deux nappes; le plan diamétral, ayant tous ses points entre les deux nappes, coupe le cône suivant un point. L'hyperboloïde à une nappe, étant situé à l'extérieur du cône asymptote, sera coupé par le plan diamétral suivant une ellipse réelle; cette ellipse est la courbe de contact d'un cylindre ayant ses génératrices parallèles aux sécantes et circonscrit a l'hyperboloïde; ce cylindre est situé à l'intérieur de l'hyperboloïde. L'hyperboloïde à deux nappes étant situé, au contraire, à l'intérieur du cône asymptote, le plan diamétral ne rencontre pas la surface; aucune des sécantes ne devient tangente, et il n'existe pas de cylindre circonscrit dans cette direction.

Si la droite, menée par le centre, est située à l'extérieur du cône asymptote, une parallèle rencontrant le cône percera une même nappe en deux points, et, par conséquent, le point milieu sera situé à l'intérieur du cône; le plan diamétral, pénétrant à l'intérieur du cône, coupera ce cône suivant deux droites, et, par conséquent, les hyperboloïdes suivant des hyperboles conjuguées. Chacune de ces hyperboles sera la courbe de contact d'un cylindre circonscrit ayant ses arêtes parallèles à la direction donnée.

**528.** Il est un cas où il n'y a plus de plan diamétral ; c'est lorsque la droite menée par le centre appartient au cône asymptote ; dans ce cas, toute parallèle ne rencontre la surface qu'en un point, et le point milieu est à l'infini. Cependant l'équation (6) représente encore un plan passant par le centre ; c'est la position limite vers laquelle tend le plan diamétral, quand la droite (5) se rapproche de plus en plus du cône. Le plan tangent au cône au point $(x, y, z)$ a pour équation

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0\,;$$

si le point de contact appartient à la droite (5), cette équation devient

$$\frac{\alpha X}{a^2}+\frac{\beta Y}{b^2}-\frac{\gamma Z}{c^2}=0\,;$$

c'est l'équation (6) ; ainsi, quand les sécantes deviennent parallèles à une arête du cône asymptote, le plan (6) coïncide avec le plan tangent au cône suivant cette arête.

**529.** Les sections faites dans les hyperboloïdes et dans le cône asymptote par un même plan étant concentriques, le lieu des centres des sections parallèles est le même dans les hyperboloïdes et dans le cône ; or il est évident, à cause de la similitude, que dans le cône ce lieu est une droite passant par le sommet du cône.

Lorsque les sections sont des ellipses, le lieu des centres, ou le diamètre, étant situé à l'intérieur du cône, rencontre l'hyperboloïde à deux nappes, mais ne rencontre pas l'hyperboloïde à une nappe. Lorsque les sections sont des hyperboles, le diamètre, étant à l'extérieur du cône, rencontre, au contraire, l'hyperboloïde à une nappe, et ne rencontre pas l'hyperboloïde à deux nappes.

On obtient un système de trois diamètres conjugués de l'hyperboloïde à une nappe en prenant un diamètre quelconque, et, dans le plan diamétral conjugué, deux diamètres conjugués de la section. Il est aisé de voir que, de ces trois diamètres conjugués, deux OD, OE sont réels, un OF imaginaire. En effet, si le premier diamètre est réel, le plan diamé-

tral, comme nous l'avons dit (n° 527), coupe la surface suivant une hyperbole, dans laquelle un second diamètre sera réel, le troisième imaginaire. Si, au contraire, le premier diamètre est imaginaire, le plan diamétral conjugué coupe la surface suivant une ellipse réelle, dans laquelle deux diamètres conjugués sont réels. L'équation de la surface rapportée à ces diamètres conjugués prend la forme

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}=1.$$

Deux hyperboloïdes conjugués, ayant le même diamètre pour la même série de plans sécants, admettent les mêmes systèmes de diamètres conjugués ; seulement, un diamètre, réel dans l'un, est imaginaire dans l'autre, de sorte que, dans l'hyperboloïde à deux nappes, de trois diamètres conjugués, deux sont imaginaires et un réel.

Pour former un système de diamètres conjugués, nous avons mené par le centre une première droite arbitrairement ; il faut, toutefois, que cette droite n'appartienne pas au cône asymptote.

**530.** Il nous est facile maintenant de compléter l'étude des sections planes des hyperboloïdes. Imaginons la surface rapportée à un système de plans diamétraux conjugués dont l'un soit parallèle au plan sécant ; l'équation prendra la forme

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=\pm 1.$$

Considérons d'abord l'hyperboloïde à une nappe. Si le plan sécant est parallèle au plan DOE, la section est une ellipse

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1+\frac{z^2}{c'^2}$$

toujours réelle, dont le centre est sur le diamètre imaginaire OF, et qui augmente indéfiniment à mesure que le plan sécant s'éloigne du plan diamétral, d'un côté ou de l'autre. Si le plan sécant est parallèle au plan EOF, la section est une hyperbole

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1-\frac{x^2}{a'^2}$$

dont le centre est situé sur le diamètre réel OD, et dont les asymptotes sont parallèles à celles de l'hyperbole déterminée

par le plan diamétral $x=0$ ; cette hyperbole admet aussi deux diamètres conjugués respectivement parallèles à OE et à OF. Quand $x$ varie de o à $a'$, le diamètre réel est parallèle à OE, et diminue de $b'$ à o ; pour $x=a'$, l'hyperbole se réduit à deux droites passant par le point D, et le plan devient tangent à la surface au point D ; quand $x$ croît ensuite à partir de $a'$, le diamètre réel est au contraire parallèle à OF et augmente de zéro à l'infini ; l'hyperbole a changé de disposition ; d'abord située dans les angles des asymptotes qui comprennent le diamètre OE, elle a passé dans les angles supplémentaires. La transition s'opère par le système des deux droites.

**531.** Considérons maintenant l'hyperboloïde à deux nappes. Les sections parallèles au plan DOE sont des ellipses

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=\frac{z^2}{c'^2}-1,$$

dont les centres sont situés sur le diamètre réel OF ; quand $z$ varie de o à $c'$, l'ellipse est imaginaire ; pour $z=c'$, elle se réduit à un point; quand $z$ croît à partir de $c'$, l'ellipse devient réelle et augmente indéfiniment. Les sections parallèles au plan EOF sont des hyperboles

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=-1-\frac{x^2}{a'^2},$$

dont le diamètre réel est toujours parallèle à OF et augmente indéfiniment. L'hyperbole conserve la même disposition.

**532.** Nous n'avons parlé jusqu'à présent que des sections elliptiques ou hyperboliques. La transformation précédente ne peut plus être effectuée, lorsque le plan sécant est parallèle à un plan tangent au cône asymptote ; dans ce cas, la section est une parabole, égale à celle que détermine le plan sécant sur le cône asymptote, et il est évident, d'après la similitude, que le paramètre de la parabole tracée sur le cône par le plan sécant augmente proportionnellement à la distance de ce plan au centre.

Pour étudier la position de la courbe, nous nous servirons d'une autre forme très-simple, sous laquelle on peut mettre l'équation de l'hyperboloïde. Prenons pour axe des $y$ l'arête

suivant laquelle le plan tangent au cône asymptote touche ce cône (fig, 300), pour axe des $z$ une autre arête du cône asymptote, et pour axe des $x$ le diamètre conjugué du plan YOZ; l'équation des hyperboloïdes se réduira à la forme

$$Ax^2 + Byz = \pm 1; \tag{7}$$

car elle ne doit pas contenir de terme du premier degré en $x$, et, lorsqu'on y fait $x = 0$, on doit obtenir l'équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. On peut toujours supposer les deux constantes A et B positives. La surface est un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, suivant que le second membre est positif ou négatif, puisque le plan $z = 0$ coupe la surface dans le premier cas et ne la rencontre pas dans le second cas. Les sections des deux surfaces par le plan YOZ sont des hyperboles conjuguées. L'équation du cône asymptote est

$$Ax^2 + Byz = 0;$$

elle montre que les plans XOY, XOZ sont tangents au cône suivant les arêtes OY et OZ. Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, elle est coupée par le plan $z = 0$, suivant deux droites AB, A'B' parallèles à OY (fig. 301); tout plan parallèle $z = \gamma$ coupe la surface suivant une parabole $Ax^2 + B\gamma y = 1$, qui a pour diamètre la trace CD du plan sécant sur le plan YOZ. L'extrémité C de ce diamètre appartient à l'hyperbole GH,

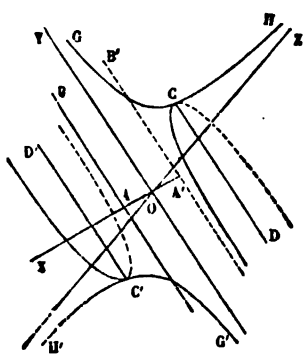



Fig. 301.

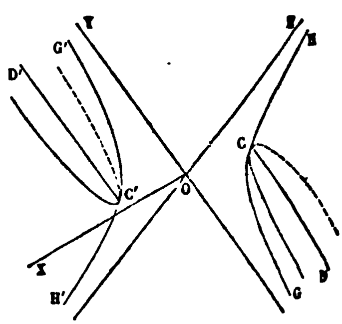



Fig. 302.

G'H', suivant laquelle le plan YOZ coupe la surface. La direction du diamètre change avec le signe de $\gamma$. Les sections

faites dans l'hyperboloïde à une nappe par les plans $z = \pm\gamma$ ont la disposition indiquée sur la fig. 301. Quand les deux plans sécants se rapprochent du plan XOY, les points C et C' s'éloignent indéfiniment sur les branches d'hyperbole CG, C'G', et les deux paraboles tendent vers le système des deux droites parallèles AB, A'B'.

Si la surface est un hyperboloïde à deux nappes, le plan $z = 0$ ne rencontre pas la surface, et les deux paraboles données par les plans $z = \pm\gamma$ ont la disposition indiquée par la figure 302. Quand $\gamma$ tend vers zéro, les deux paraboles s'éloignent à l'infini.

### SECTIONS CIRCULAIRES.

**533.** Considérons d'abord l'hyperboloïde à une nappe. D'après les raisonnements qui ont été faits à propos de l'ellipsoïde (n° 517), on reconnaît qu'un plan diamétral, qui coupe l'hyperboloïde suivant un cercle, doit passer par l'un des axes réels de la surface.

Lorsqu'un plan AOD (fig. 303), mené par l'axe OA, coupe la surface suivant une ellipse, l'un des axes de l'ellipse est OA, l'autre la trace OD du plan sécant sur le plan YOZ; mais la longueur de OD est plus grande que OB; pour que OD soit égal à OA, il est nécessaire que OA soit plus grand que OB. Ainsi, le plan sécant passera par le plus grand axe OA de l'ellipse de gorge.

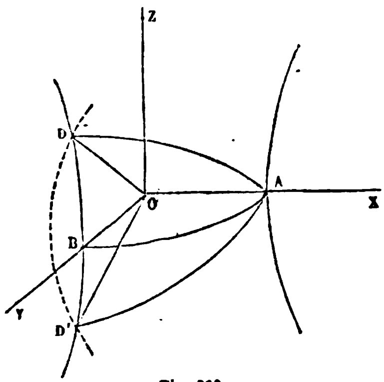


Fig. 303.

Du point O comme centre, avec OA pour rayon, décrivons dans le plan YOZ un cercle qui coupera l'hyperbole en deux points D, D'; les deux plans AOD, AOD' couperont l'hyperboloïde suivant des cercles.

Tout plan parallèle à l'un de ces plans coupera suivant des cercles l'hyperboloïde proposé, le cône asymptote et l'hyper-

boloïde conjugué. Lorsque la surface est de révolution, les deux séries de sections circulaires se confondent et deviennent perpendiculaires à l'axe de rotation.

L'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

du cône peut être mise sous la forme

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)z^2=0.$$

Elle signifie que le produit des sinus des angles que fait une arête quelconque du cône avec les deux plans cycliques

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)z^2=0$$

est constant.

Si l'on prend pour plans des $zx$ et des $zy$ les deux plans cycliques et pour plan des $xy$ un plan quelconque coupant le cône suivant deux arêtes $om$, $om'$, l'équation du cône prend la forme

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2B''xy=0,$$

$\lambda$ et $\mu$ désignant les angles $yoz$, $xoz$. La trace du cône sur le plan $xoy$ est définie par l'équation

$$x^2+y^2+2B''xy=0.$$

Le produit des coefficients angulaires des deux droites $om$, $om'$ étant égal à l'unité, on en conclut qu'elles font respectivement avec $ox$ et $oy$ des angles égaux. Ainsi, *lorsqu'un plan sécant mené par le centre coupe le cône suivant deux arêtes, ces arêtes font des angles égaux avec les traces du plan sécant sur les plans cycliques*. Quand le plan devient tangent, l'arête de contact fait des angles égaux avec les traces du plan tangent sur les plans cycliques.

**534.** Il résulte de ce qui précède que tout cône du second degré peut être considéré, de deux manières différentes, comme un cône oblique à base circulaire. Lorsqu'on considère un cône circulaire oblique, les plans parallèles à la base donnent une première série de sections circulaires; il est facile de démontrer géométriquement l'existence d'une

seconde série de sections circulaires. Soit S le sommet d'un cône oblique ayant pour base le cercle AB (fig. 304); par la droite SO, qui va du sommet au centre O de la base, menons un plan ASB perpendiculaire au plan de la base; tout plan parallèle à la base coupant le cône suivant un cercle qui a pour diamètre la trace du plan sécant sur le plan ASB, il en résulte que ce plan ASB divise le cône en deux parties symétriques; c'est donc un plan principal et le système des deux droites SA et SB est la section principale correspondante. Dans le plan principal ASB menons la ligne B'A' anti-parallèle à AB, c'est-à-dire telle que l'angle SA'B' soit égal à SAB; puis, par la droite A'B', faisons passer un plan perpendiculaire au plan principal ASB; la section du cône par ce plan sera un cercle B'HA'. En effet, par un point quelconque H de la courbe B'HA' menons un plan parallèle à la base; ce plan coupe le cône suivant un cercle, et le plan B'HA' suivant une ligne HI perpendiculaire à la section principale. Dans le cercle DHE on a $\overline{HI}^2 = DI \times IE$. D'autre part, les triangles semblables DIB', EIA' donnent $DI \times IE = B'I \times IA'$; donc $\overline{HI}^2 = B'I \times IA'$, et, par conséquent, le point H est un point du cercle décrit sur B'A' comme diamètre. Les sections parallèles à B'HA' sont dites anti-parallèles à la base.

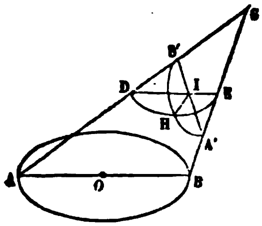


Fig. 304.

La bissectrice de l'angle ASB est l'axe intérieur du cône; la bissectrice de l'angle supplémentaire est un second axe; une perpendiculaire menée par le sommet S au plan principal ASB est le troisième axe. On connaît ainsi les trois axes et les trois plans principaux du cône.

### AXES D'UNE SECTION PLANE.

**534 *bis*.** On démontre comme dans le n° 517 *bis* que les carrés des longueurs des axes de la section faite par le plan $ux + vy + wz = 0$ dans l'hyperboloïde à une nappe (2) sont racines de l'équation en $R^2$

$$\frac{u^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}}+\frac{v^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}}-\frac{w^2}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{R^2}}=0,$$

et, dans l'hyperboloïde à deux nappes (3), racines de l'équation

$$\frac{u^2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{R^2}}+\frac{v^2}{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{R^2}}-\frac{w^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}}=0.$$

Ces deux équations se déduisent l'une de l'autre par le changement de signe de $R^2$.

### GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

**535.** Nous avons vu (n° 426) que, lorsqu'une droite a plus de deux points situés sur une surface du second ordre, elle est tout entière située sur la surface. D'après cela, on comprend qu'il est impossible de placer sur un ellipsoïde une portion de droite réelle, si petite qu'elle soit; car, si cette portion de droite avait seulement trois points communs avec la surface, la droite indéfinie serait située tout entière sur la surface, et il est évident qu'une droite indéfinie ne peut appartenir à une surface limitée comme l'ellipsoïde. Il est impossible aussi de placer une droite sur l'hyperboloïde à deux nappes; nous remarquons d'abord que cette droite ne peut être perpendiculaire à l'axe réel, puisque toutes les sections perpendiculaires à cette droite sont des ellipses; la droite irait donc d'une nappe à l'autre, et il y aurait une portion intermédiaire qui n'appartiendrait pas à la surface. La même impossibilité n'existe pas pour l'hyperboloïde à une nappe. Nous avons déjà reconnu, en étudiant les sections planes (n° 530), que, lorsque le plan sécant mené par un point de la surface est parallèle au plan diamétral conjugué du diamètre qui passe en ce point, la section se réduit à deux droites; il en résulte que par tout point de la surface passent deux droites situées tout entières sur la surface. Nous allons étudier les propriétés des droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe; mais nous reprendrons d'abord la démonstration du théorème fondamental.

**536.** Soit M un point quelconque de la surface; prenons pour axe des $x$ le diamètre qui passe en ce point, et pour axes des $y$ et des $z$ deux diamètres conjugués de la section diamétrale correspondante; l'équation de l'hyperboloïde aura la forme

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

En coupant la surface par le plan $x=a'$, on a deux droites

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Ainsi, *par tout point* M *de la surface passent deux droites situées sur la surface.*

Nous avons déjà fait observer (n° 490) que les tangentes à toutes les courbes tracées par un même point sur une surface du second degré sont situées dans le même plan; il n'y a d'exception que pour le cône et au sommet. Par un point M passent deux droites situées sur la surface; le plan de ces deux droites est le plan tangent. Il est impossible de mener par le point M une troisième droite située sur la surface; car cette droite serait aussi contenue dans le plan tangent $x=a'$, et ce plan ne coupe la surface que suivant deux droites.

Nous ferons remarquer aussi que la surface est coupée par le plan tangent; une partie est située d'un côté de ce plan, l'autre partie de l'autre côté.

**537.** Dans le même système de coordonnées, le cône asymptote a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0:$$

si l'on coupe le cône par le plan $x=0$, on a les deux arêtes

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Ces deux arêtes sont respectivement parallèles aux deux droites déterminées par le plan $x=a'$ sur la surface de l'hyperboloïde. Ainsi, *les droites situées sur l'hyperboloïde sont respectivement parallèles aux arêtes du cône asymptote.*

Si l'on coupe la surface par le plan $x=-a'$, on a deux droites parallèles aux précédentes; ainsi, les droites qui passent par deux points M et M', symétriques par rapport au

centre, sont respectivement parallèles entre elles, et aux mêmes arêtes du cône asymptote.

**838.** Nous allons faire voir que les droites situées sur l'hyperboloïde peuvent être distinguées en deux séries, dont chacune constitue toute la surface. On opère commodément cette distinction, et l'on se rend bien compte de la position des droites, à l'aide de l'ellipse de gorge.

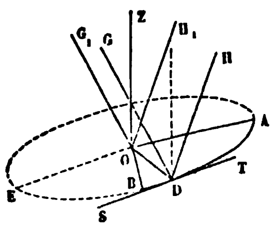



Fig. 305.

Puisque par tout point de la surface passent deux droites, il est clair que par tout point de l'ellipse de gorge passent deux droites DG, DH situées sur la surface (fig. 305).

Si, conservant pour axe des $z$ l'axe imaginaire de la surface, on prend pour axe des $x$ le diamètre OD de l'ellipse de gorge, et pour axe des $y$ le diamètre conjugué OE, l'hyperboloïde a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Le plan $x=a'$, mené par le point D parallèlement au plan ZOE, a pour trace sur le plan de l'ellipse de gorge la tangente ST à cette ellipse; ce plan coupe l'hyperboloïde suivant deux droites

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

qui se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant la tangente ST. Ainsi, *toute tangente à l'ellipse de gorge est la projection de deux droites situées sur l'hyperboloïde.*

Le cône asymptote a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

il est coupé par le plan $x=0$ suivant deux droites $OG_1$, $OH_1$ qui ont pour équation

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

et qui sont respectivement parallèles aux deux droites DG, DH situées sur l'hyperboloïde. Les deux axes des coordonnées OE et OZ étant rectangulaires, il résulte de ce qui précède que les deux droites DG, DH font des angles égaux avec le plan de l'ellipse de gorge, ou avec la parallèle à l'axe OZ menée par le point D; si l'on appelle $\gamma$ ce dernier angle, on a

$$\tang \gamma = \frac{b'}{c}.$$

**539.** Imaginons maintenant que le point D parcoure l'ellipse de gorge dans le sens AB; toutes les droites, dont les parties supérieures au plan de l'ellipse de gorge font avec les tangentes prises dans le sens du mouvement des angles aigus, formeront un premier système; toutes celles dont les parties supérieures font avec cette même tangente des angles obtus, formeront un second système. Ainsi, la droite DG appartient au premier système, la droite DH au second. Il est clair que ces deux systèmes, tels que nous venons de les définir, comprennent toutes les droites situées sur la surface; nous remarquons d'abord qu'une droite quelconque située sur la surface n'est pas parallèle au plan de l'ellipse de gorge, puisque les sections parallèles à ce plan sont des ellipses; cette droite percera donc le plan en un point D de l'ellipse; or, par le point D, passent seulement deux droites DG, DH, appartenant, l'une au premier système, l'autre au second; la droite considérée coïncidera avec l'une de ces deux droites.

Si, en même temps que le point D se meut sur l'ellipse, l'angle $\gamma$ varie d'après la formule $\tang \gamma = \frac{b'}{c}$, la droite DG coïncidera successivement avec toutes les droites du premier système, la droite DH avec toutes celles du second système. Il est visible que chacune d'elles engendre la surface entière de l'hyperboloïde. Ainsi, l'hyperboloïde à une nappe est une surface réglée, qui peut être engendrée de deux manières par le mouvement d'une ligne droite. Voilà pourquoi les droites de chaque système ont été appelées les *génératrices rectilignes* de l'hyperboloïde.

Il est bon de se rendre compte de la variation de l'angle $\gamma$. Cet angle acquiert sa valeur minimum quand la droite passe par l'une des extrémités A du grand axe de l'ellipse de gorge, et sa valeur maximum quand elle passe par l'une des extrémités B du petit axe. Le point D allant de A en B, l'angle $\gamma$ croît de sa valeur minimum à sa valeur maximum; cet angle décroît ensuite pour croître de nouveau, etc. Lorsque $a=b$, c'est-à-dire lorsque l'ellipse de gorge devient un cercle, l'angle $\gamma$ est constant, et la surface est engendrée par chacune des deux droites DG, DH tournant autour de OZ; c'est l'hyperboloïde de révolution à une nappe que nous avons déjà considéré comme exemple des surfaces de révolution (n° 469).

**540.** Chacune des droites mobiles engendrant la surface entière, il est clair que *les deux droites qui passent par un point quelconque de la surface appartiennent, l'une au premier système de génératrices, l'autre au second système*. On le reconnaît d'ailleurs d'une manière très-nette, en construisant ces deux droites à l'aide de l'ellipse de gorge. Soit M un point de la surface, que nous supposerons situé au-dessus du plan de l'ellipse de gorge (fig. 306); ce point se projette sur ce plan en un point $m$ extérieur à l'ellipse; par le point $m$ menons des tangentes $m$D, $m$E à l'ellipse; par le point de contact D de la première tangente, menons la droite DG du premier système, et par le point de contact E de la seconde tangente la droite EL du second système. Les plans projetants GD$m$, LE$m$ de ces deux droites se coupent suivant une droite MM' perpendiculaire au plan de l'ellipse de gorge; la perpendiculaire élevée par le point $m$ perce la surface en deux points; l'un est le point M situé au-dessus du plan de l'ellipse, l'autre est le point symétrique M' situé au-dessous. La droite DG, faisant avec D$m$ un angle aigu, rencontre la partie supérieure $m$M de la droite MM', et elle passe au point M, puisque cette partie supérieure ne rencontre la surface qu'en un point. De même la droite EL, faisant avec le prolongement de $m$E

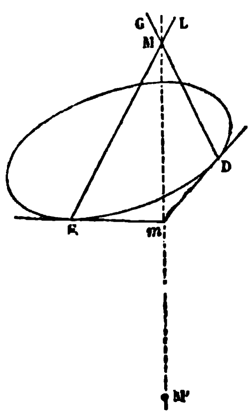


Fig. 306.

un angle obtus, ou avec E$m$ un angle aigu, rencontre la partie supérieure $m$M de la même droite au même point M. Ainsi, par le point M passent les deux droites MD, ME, qui appartiennent, l'une au premier système, l'autre au second.

**541.** Nous avons vu (n° 538) que les génératrices rectilignes de la surface se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant des tangentes à cette ellipse. La même propriété a lieu par rapport à chacun des plans principaux.

Considérons le plan principal COA mené par l'axe imaginaire OC et l'un des axes OA de l'ellipse de gorge (fig. 307); on démontrera, comme précédemment, que la tangente $MD_1$ au point M à l'hyperbole principale est la projection de deux droites MD, MD' situées sur la surface. Quand le point M s'éloigne à l'infini sur l'hyperbole, la tangente $D_1M$ tend vers l'asymptote $OH_1$; cette asymptote est la projection des deux droites BH, B'H', qui passent par les extrémités de l'autre axe de l'ellipse de gorge. L'autre asymptote $OG_1$ est la projection des droites BG, B'G', qui passent par ces mêmes points.

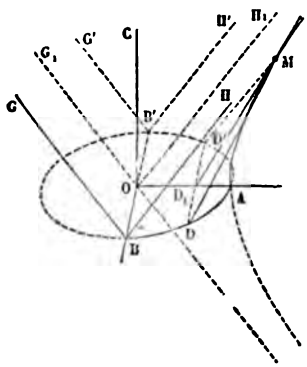


Fig. 307.

**542.** Les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde jouissent de quelques autres propriétés remarquables que nous allons démontrer. Soient DG, EL (fig. 308) deux génératrices de systèmes différents; ces droites se projettent sur le plan de l'ellipse de gorge suivant des tangentes D$m$, E$m$ à cette ellipse; en général, les deux tangentes se coupent en un point $m$ et les deux plans projetants se coupent suivant une droite MM' perpendiculaire au plan de l'ellipse. Comme nous l'avons expliqué plus haut, les deux droites DG, EL, appartenant à des systèmes différents, rencontrent la perpendiculaire MM' d'un même côté du

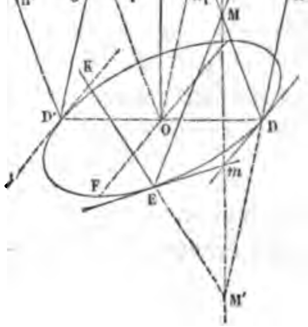


Fig. 308.

plan de l'ellipse de gorge, et, par conséquent, se coupent au point M, où cette perpendiculaire perce la surface. Ainsi, en général, deux génératrices de systèmes différents se rencontrent.

Il peut arriver que les projections des deux droites soient parallèles; ceci a lieu quand les deux droites, telles que DG, D'H', passent par deux points D et D' diamétralement opposés de l'ellipse de gorge. Dans ce cas, les deux plans projetants sont parallèles; un plan parallèle mené par le centre coupera le cône suivant deux arêtes $OG_1$, $OH_1$; il est clair que les deux génératrices DG, D'H' sont parallèles à la même arête $OG_1$ du cône asymptote, et, par conséquent, sont parallèles entre elles. On conclut de là que *deux génératrices de systèmes différents se rencontrent ou sont parallèles*, c'est-à-dire *sont toujours dans un même plan.*

843. Considérons maintenant deux génératrices DG, EK du même système. Les plans projetants de ces deux droites se coupent suivant la droite MM' perpendiculaire au plan de l'ellipse de gorge. La droite DG, faisant avec sa projection D*m* un angle aigu, rencontre la droite MM' au-dessus du plan de l'ellipse de gorge; la droite EK, faisant avec le prolongement de *m*E un angle aigu, rencontre cette même droite au-dessous du plan; le plan DMM', qui contient la première droite DG et un point M' de la seconde, ne contient pas cette seconde droite; ainsi les deux droites ne sont pas dans un même plan.

Il peut arriver que les projections soient parallèles; soient les deux droites DG, D'G' du même système, passant par deux points diamétralement opposés de l'ellipse de gorge; ces deux droites sont parallèles respectivement aux deux arêtes $OG_1$, $OH_1$ du cône asymptote; le plan GDD', qui contient la première et un point D' de la seconde, ne contient pas cette seconde droite; ainsi, les deux droites ne sont pas dans un même plan. On conclut de là que *deux génératrices du même système ne sont jamais dans un même plan.*

844. Chaque arête $OG_1$ du cône asymptote est parallèle à deux génératrices DG, D'H' de systèmes différents; on les obtien-

drait de cette manière : soit OF la trace du plan $ZOG_1$ sur le plan de l'ellipse de gorge ; menons le diamètre DD' conjugué de OF ; les tangentes en D et D' étant parallèles à OF, les plans tangents GDH, G'D'H' en ces points sont parallèles au plan $ZOG_1$ qui coupe le cône suivant deux arêtes $OG_1$, $OH_1$ ; les deux génératrices DG, D'H', de systèmes différents, sont parallèles à $OG_1$ ; les deux autres génératrices DH, D'G' sont parallèles à $OH_1$. Il est impossible qu'une troisième génératrice de l'hyperboloïde soit parallèle à l'arête $OG_1$ ; car si trois génératrices de l'hyperboloïde étaient parallèles à une même arête du cône, deux appartiendraient au même système et seraient parallèles entre elles, ce qui ne peut pas être

Le diamètre OD étant conjugué du plan ZOF, ou $G_1OH_1$, on sait (n° 532) que le plan $DOG_1$ est tangent au cône suivant l'arête $OG_1$. Ainsi, le plan de deux génératrices parallèles DG, D'H' est tangent au cône asymptote.

Remarquons encore que trois génératrices du même système ne peuvent être parallèles à un même plan ; car en menant par le centre des parallèles à ces génératrices, on aurait trois arêtes différentes du cône asymptote situées dans le même plan, ce qui est impossible.

**545.** Ce qui précède nous permet de distinguer les deux systèmes de génératrices par un autre procédé. Soit DH une droite quelconque située sur la surface, toutes les droites telles que DG, EK,... qui rencontrent cette droite fixe, avec une droite D'G' qui lui est parallèle, constituent l'un des systèmes, par exemple le premier système. Toutes les autres constituent le second système.

**546.** Nous savons qu'il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une ligne droite (n° 460). Prenons comme directrices trois droites fixes A, B, C, appartenant au second système, et supposons qu'une droite mobile glisse sur ces trois directrices ; si par un point quelconque M de la droite A et chacune des droites B et C on fait passer un plan, l'intersection de ces deux plans déterminera la position de la droite mobile

qui passe en ce point ; la droite mobile, coïncidant ainsi successivement avec toutes les droites du premier système, engendrera l'hyperboloïde à une nappe. De même, une droite mobile, glissant sur trois droites fixes appartenant au premier système, engendrera l'hyperboloïde.

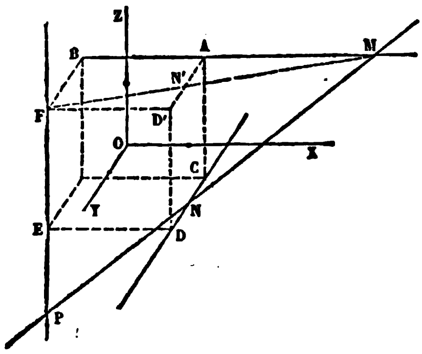


Fig. 309.

**547.** Nous allons faire voir que, réciproquement, une droite mobile qui glisse sur trois droites fixes quelconques, non parallèles à un même plan, engendre un hyperboloïde. Soient AB, CD, EF les trois directrices données (fig. 309). Si par chacune d'elles on fait passer un plan parallèle à l'une des deux autres, on a six plans qui forment un parallélipipède ; prenons pour origine le centre du parallélipipède et pour axes des coordonnées des parallèles aux arêtes, dont nous désignerons les longueurs par $2a$, $2b$, $2c$. Les équations des trois directrices sont, pour la disposition adoptée dans la figure 309,

$$\text{AB}\begin{cases} y=-b, \\ z=c, \end{cases} \quad \text{CD}\begin{cases} z=-c, \\ x=a, \end{cases} \quad \text{EF}\begin{cases} x=-a, \\ y=b. \end{cases}$$

Une droite MN qui rencontre les deux droites AB, CD peut être regardée comme l'intersection de deux plans menés, l'un par la droite AB, l'autre par la droite CD ; ces deux plans ont des équations de la forme

$$(8) \qquad \begin{cases} z-c-\lambda(y+b)=0, \\ z+c-\lambda'(x-a)=0, \end{cases}$$

dans lesquelles $\lambda$ et $\lambda'$ désignent des paramètres arbitraires. Mais la droite MN doit rencontrer la troisième directrice EF ; il en résulte entre les deux paramètres $\lambda$ et $\lambda'$ la relation

$$(9) \qquad \lambda' a+\lambda b+c=0.$$

On obtiendra l'équation de la surface engendrée par la droite

MN en éliminant les deux paramètres $\lambda$ et $\lambda'$ entre les equations (8) et (9), ce qui donne

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0. \tag{10}$$

Le lieu est une surface du second degré ayant un centre unique ; ce n'est pas un cône, puisqu'elle ne passe pas par le centre ; c'est donc un hyperboloïde à une nappe.

Les trois directrices appartenant à la surface, les trois axes des coordonnées, qui leur sont parallèles, sont des arêtes du cône asymptote ; on peut remarquer que les trois arêtes AC, DE, BF qui, dans le parallélipipède, sont parallèles et opposées aux directrices, appartiennent aussi à la surface ; par exemple, la droite AC, qui rencontre les deux directrices AB et CD, et qui est parallèle à EF, est une position particulière de la génératrice, et, par conséquent, appartient à la surface. Il résulte de là que les faces parallèles ABF, CDE du parallélipipède sont tangentes à la surface aux points B et D, et de même les autres. Les trois directrices et les trois arêtes opposées forment un hexagone gauche ACDEFBA situé sur la surface.

548. Étant donné un hyperboloïde à une nappe, soient AB et CD deux droites quelconques du même système (fig. 309) ; A un point fixe pris à volonté sur la première droite, C le point correspondant de la seconde, c'est-à-dire le point où cette seconde droite est rencontrée par la génératrice mobile de l'autre système, quand elle passe par le point A ; à l'aide de la droite EF du premier système qui est parallèle à AC, on peut former le parallélipipède considéré précédemment. La génératrice mobile, dans une de ses positions, rencontre les deux droites fixes en M et N ; elle a décrit sur ces deux droites, à partir de sa position initiale AC, des longueurs AM et CN, nous désignerons par $\alpha$ et $\beta$ ces deux longueurs affectées du signe + quand elles sont portées dans les directions AB ou CD du signe — quand elles sont portées dans les directions opposées. Si l'on projette la droite MNP sur le plan ABF, parallèlement à la droite EF, la longueur CN se projettera en vraie grandeur suivant AN'. En prenant pour axes des coordonnées les

droites AB et AD', et exprimant que la droite mobile MN tourne autour du point F, on a la relation

$$\frac{2a}{\alpha}+\frac{2b}{\beta}=1. \tag{11}$$

Cette relation exprime que les deux points mobiles M et N déterminent sur les droites AB, CD deux systèmes de points homographiques (n° 310).

Réciproquement, lorsqu'une droite mobile MN décrit sur deux droites fixes AB, CD, à partir d'une position initiale, des longueurs qui vérifient la relation (11), cette droite engendre un hyperboloïde à une nappe. En effet, soit AC la position initiale de la génératrice; par le point A menons une parallèle AD' à la droite CD, formons le parallélogramme AD'FB, dont les côtés AB et AD' sont égaux à $2a$ et à $2b$, et par le point F menons une parallèle FE à la droite AC; si l'on prend AB et AD' pour axes des coordonnées dans le plan du parallélogramme, la relation (11) signifie que la droite MN' projection de la droite MN sur le plan du parallélogramme, parallèlement à AC, passe constamment par le point F; donc la droite MN rencontre la droite EF. Cette droite, glissant sur trois droites fixes AB, CD, EF, engendre un hyperboloïde à une nappe.

**549.** Nous avons dit que l'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes. Il est facile de déduire de l'équation de la surface les équations de ces deux systèmes de droites. En effet, l'équation de l'hyperboloïde rapporté à ses axes est

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2};$$

chacun des membres, étant la différence de deux carrés, peut être décomposé en facteurs du premier degré, et l'équation devient

$$\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right). \tag{12}$$

Considérons les deux équations du premier degré

$$(\lambda)\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

dans lesquelles le paramètre $\lambda$ est arbitraire. Pour chaque valeur de $\lambda$, ces équations représentent une droite. Or, si l'on multiplie ces deux équations membre à membre, on retrouve l'équation (12); il en résulte que les équations ($\lambda$) représentent un système de droites situées sur la surface.

Si l'on combine autrement les facteurs, on obtient deux autres équations du premier degré

$$(\mu) \qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right), \quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

renfermant un paramètre arbitraire $\mu$, et qui représentent un second système de droites situées sur la surface.

On peut attribuer aux paramètres $\lambda$ et $\mu$ des valeurs nulles ou infinies. Si l'on pose $\lambda=\frac{m}{n}$, les équations ($\lambda$) prennent la forme

$$n\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=m\left(1+\frac{x}{a}\right), \quad m\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=n\left(1-\frac{x}{a}\right);$$

on fera dans ces équations $m=0$, ou $n=0$.

La surface étant le lieu des droites ($\lambda$), il est évident que par tout point de la surface passe une droite de ce système. Pour déterminer la droite qui passe par un point M, ayant pour coordonnées $x'$, $y'$, $z'$, dans les équations ($\lambda$) on remplacera $x$, $y$, $z$ par $x'$, $y'$, $z'$ et l'on déduira de chacune d'elles la même valeur de $\lambda$. De même, par tout point de la surface passe une droite du second système. D'ailleurs, ces deux droites diffèrent; car, pour que les droites représentées par les équations ($\lambda$) et ($\mu$) fussent les mêmes, il faudrait que l'on eût

$$\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

quelle que soit $x$, c'est-à-dire à la fois $\lambda=\frac{1}{\mu}$, $\lambda=-\frac{1}{\mu}$, ce qui est impossible. Il résulte de là que les équations ($\lambda$) et ($\mu$) représentent toutes les droites situées sur l'hyperboloïde à une nappe.

**550.** Les parallèles menées par le centre aux droites (λ) ont pour équations

$$(13)\qquad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\frac{x}{a},\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-\frac{1}{\lambda}\frac{x}{a};$$

l'élimination du paramètre λ donne l'équation du cône asymptote

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{x^2}{a^2}.$$

Les parallèles menées par le centre aux droites (μ) ont pour équations

$$(14)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\frac{x}{a},\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{\mu}\frac{x}{a},$$

et l'élimination du paramètre μ conduit encore au cône asymptote. On voit d'ailleurs que les deux systèmes de parallèles coïncident; car si l'on donne à μ la valeur $-\frac{1}{\lambda}$, les équations (14) sont les mêmes que les équations (13). Ainsi, les droites de l'un et l'autre système sont respectivement parallèles aux arêtes du cône asymptote.

**551.** Nous allons faire voir maintenant que les droites représentées par les équations (λ) constituent l'un des systèmes que nous avons définis précédemment par des considérations géométriques à l'aide de l'ellipse de gorge (n° 536), et que les droites représentées par les équations (μ) constituent l'autre système.

Il suffit pour cela de démontrer que toutes les droites du premier groupe rencontrent une droite fixe du second groupe, excepté une, qui lui est parallèle (n° 545). Considérons deux droites représentées par les équations (λ) et (μ), quand on attribue à λ et à μ des valeurs quelconques; on obtiendra le point d'intersection de ces deux droites, en regardant ces quatre équations comme simultanées; en comparant la première et la quatrième, la seconde et la troisième, on en déduit les deux équations

$$\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right),$$

qui se réduisent à une seule et qui donnent

$$x = a\frac{1-\lambda\mu}{1+\lambda\mu}.$$

Si le dénominateur $1+\lambda\mu$ n'est pas nul, on obtient pour $x$, $y$, $z$ des valeurs finies vérifiant les quatre équations; ainsi les deux droites se coupent. Si l'on a $1+\lambda\mu=0$, les parallèles (13) et (14) menées par le centre à ces deux droites coïncident, et, par conséquent, les droites sont parallèles.

## MÉTHODE GÉNÉRALE POUR TROUVER LES DROITES SITUÉES SUR UNE SURFACE.

**552.** On peut rattacher la recherche des génératrices rectilignes des surfaces du second ordre à une méthode générale propre à donner les droites situées sur une surface algébrique d'ordre $m$. Soient

$$x = \alpha z + p,$$
$$y = \beta z + q,$$

les équations d'une droite; si l'on remplace $x$ et $y$ par ces valeurs dans l'équation de la surface, on obtient une équation du degré $m$ en $z$, qui donne les $m$ points d'intersection de la droite et de la surface. Pour que la droite soit tout entière située sur la surface, il faut que cette équation se réduise à une identité, ce qui fournit $m+1$ relations entre les quatre paramètres $\alpha$, $\beta$, $p$, $q$. Ainsi, en général, il est impossible de placer une droite sur une surface algébrique d'un degré supérieur à trois; les surfaces du troisième ordre admettent, en général, un nombre fini de droites, et les surfaces de second ordre une infinité. D'après cela, et d'un point de vue purement analytique, on peut concevoir toutes les surfaces du second ordre comme étant des surfaces réglées, à génératrices réelles ou imaginaires.

Appliquons cette méthode à l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

L'équation en $z$ est

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{\alpha p}{a^2}+\frac{\beta q}{b^2}\right)z+\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1\right)=0,$$

et l'on a les trois équations de condition

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{c^2\alpha^2}{a^2}+\dfrac{c^2\beta^2}{b^2}=1,\quad \dfrac{p^2}{a^2}+\dfrac{q^2}{b}=1,\\ \dfrac{c\alpha p}{a^2}+\dfrac{c\beta q}{b^2}=0. \end{array}\right.$$

On peut exprimer les quatre paramètres de la droite à l'aide d'une même variable auxiliaire. Ces relations (15) montrent que les quatre quantités $\frac{c\alpha}{a}, \frac{c\beta}{b}$ et $\frac{p}{a}, \frac{q}{b}$ sont les cosinus des angles que font dans un plan avec des axes rectangulaires deux directrices perpendiculaires entre elles; on posera donc

$$\frac{c\alpha}{a}=\cos\varphi,\qquad \frac{c\beta}{b}=\sin\varphi,$$
$$\frac{p}{a}=\cos\left(\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right),\ \frac{q}{b}=\sin\left(\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right),$$

$\varphi$ étant un angle arbitraire. On obtient ainsi les deux systèmes de droites

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}\cos\varphi\mp\sin\varphi,\\ \dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}\sin\varphi\pm\cos\varphi. \end{array}\right.$$

Le même calcul s'applique à l'ellipsoïde et à l'hyperboloïde à deux nappes; mais alors les droites sont imaginaires; on peut remarquer que par chaque point de la surface passent deux droites, dont le plan, toujours réel, est le plan tangent.

Enfin l'on trouvera facilement, par ce même calcul, les droites situées sur la surface du troisième ordre ayant pour équation

$$x^3+y^3+z^3+1=0.$$

# CHAPITRE V

## Des paraboloïdes.

Les surfaces du second degré dépourvues de centre sont représentées par l'équation

(1) $$S'y^2 + S''z^2 + Px = 0.$$

Cette seconde classe se subdivise en deux genres, suivant que les coefficients S', S'' ont le même signe ou des signes contraires.

### PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

553. Considérons le cas où les deux racines S' et S'' ont le même signe, par exemple le signe +. On peut supposer P négatif; si l'on pose

$$2p = -\frac{P}{S'}, \quad 2q = -\frac{P}{S''},$$

l'équation devient

(2) $$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x.$$

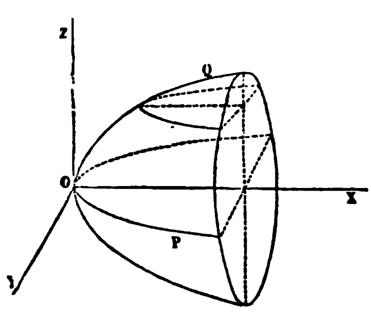


Fig. 310.

La surface passe à l'origine; les sections faites par les plans principaux YOX, ZOX sont deux paraboles P et Q, qui ont pour axe commun la droite OX (fig. 310).

Coupons la surface par des plans perpendiculaires à la droite OX. Pour $x = 0$, la section se réduit au point O; en attribuant à $x$ des valeurs positives de plus en plus grandes, on obtient des ellipses homothétiques qui ont leur centre sur la droite OX et qui augmentent indéfiniment. Les plans situés à gauche du plan YOZ ne coupent pas la surface. Ainsi, la surface est une nappe indéfinie située tout entière à droite du plan YOZ; on lui a donné le nom de *paraboloïde elliptique*. La droite OX est un *axe* de la surface; le point O en est le sommet.

Les sections par des plans parallèles au plan principal XOY sont des paraboles égales à la parabole P, ayant leurs sommets sur la parabole Q et leurs axes parallèles à OX. Il en résulte que l'on peut regarder la surface comme engendrée par la parabole P qui se meut parallèlement à elle-même, son sommet décrivant la parabole Q. De même, les sections par des plans parallèles au plan principal XOZ sont des paraboles égales à la parabole Q, et l'on peut regarder la surface comme engendrée par la parabole Q se mouvant parallèlement à elle-même, son sommet décrivant la parabole P.

**554.** Les sections de la surface par des plans

$$Ax + By + Cz = l$$

non parallèles à l'axe, sont des ellipses, dont les projections sur le plan YOZ ont pour équations

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = \frac{2(l - By - Cz)}{A}.$$

Ces projections sont des ellipses homothétiques entre elles, quelle que soit la direction du plan sécant.

Lorsque le plan sécant $By + Cz = l$ est parallèle à l'axe du paraboloïde, la section, dont la projection sur le plan XOY a pour équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{(l - By)^2}{C^2 q} = 2x,$$

est une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe du paraboloïde. Le paramètre de cette parabole étant indépendant de $l$, il en résulte que des plans parallèles entre eux et parallèles à l'axe coupent la surface suivant des paraboles égales.

Considérons en particulier le cas où $p = q$; l'équation de la surface devient $y^2 + z^2 = 2px$; les sections par les plans perpendiculaires à l'axe OX sont des cercles; ainsi, la surface est de révolution; elle est engendrée par la parabole P tournant autour de son axe OX. Les sections par des plans non parallèles à l'axe sont des ellipses, qui se projettent sur le plan YOZ suivant des cercles. Toutes les sections par des plans parallèles à l'axe sont des paraboles égales.

### PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

**555.** Le plan diamétral conjugué de la droite

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

a pour équation (nº 491)

$$\frac{\beta y}{p}+\frac{\gamma z}{q}=\alpha; \tag{3}$$

c'est un plan parallèle à l'axe. Ce plan coupe la surface suivant une parabole; cette parabole est la courbe de contact du paraboloïde et d'un cylindre circonscrit ayant ses génératrices parallèles à la direction des cordes. Réciproquement, tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral.

Lorsque les droites sont parallèles à l'axe, chacune d'elles ne rencontre la surface qu'en un point, et il n'y a plus de plan diamétral; le plan diamétral s'est éloigné à l'infini.

Le lieu du centre de la section faite par le plan représenté par l'équation $Ax+By+Cz=l$, dans laquelle $l$ est un paramètre variable, a pour équations (nº 495)

$$\frac{y}{Bp}=\frac{z}{Cq}=-\frac{1}{A}; \tag{4}$$

c'est une droite parallèle à l'axe. Ainsi, les projections des sections parallèles sur le plan YOZ sont des ellipses homothétiques et concentriques. Réciproquement, toute droite parallèle à l'axe est un diamètre.

**556.** Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque M de la surface, pour axe des $x$ le diamètre qui passe en ce point, et pour plan des $xy$ un plan quelconque mené par la droite MX; ce plan coupe la surface suivant une parabole; nous prendrons pour axe des $y$ la tangente à la parabole au point M, et pour axe des $z$ la parallèle menée par le point M à la direction conjuguée du plan XMY. L'équation de la surface, ne contenant pas de termes du premier degré en $z$, et devant se réduire, quand on y fait $z=0$, à celle d'une parabole rapportée

a un diamètre et à la tangente à l'extrémité, sera de la forme

$$\frac{y^2}{p'}+\frac{z^2}{q'}=2x;$$

les deux paramètres $p'$ et $q'$ auront le même signe, par exemple le signe $+$, sans quoi les sections par des plans quelconques seraient des hyperboles. On voit par là que le plan XMZ est conjugué de la direction MY. Les sections faites par des plans parallèles au plan YMZ sont des ellipses rapportées à deux diamètres conjugués.

On peut obtenir d'une autre manière les axes des coordonnées auxquels nous venons de rapporter la surface. Considérons un plan quelconque non parallèle à l'axe du paraboloïde; ce plan coupe la surface suivant une ellipse; par le centre de l'ellipse, menons une parallèle à l'axe jusqu'à la rencontre de la surface, et, par ce point, des parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse, l'équation de la surface relative à ces trois droites aura la forme précédente.

SECTIONS CIRCULAIRES.

**557.** Les sections faites par un même plan dans le paraboloïde

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x, \tag{2}$$

et dans le cylindre représenté par l'équation

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=\lambda, \tag{5}$$

où $\lambda$ est une longueur arbitraire, étant homothétiques, il suffit de chercher les sections circulaires du cylindre. On verra, comme au n° 517, que les plans de ces sections sont perpendiculaires à l'un des plans principaux ZOX, ZOY (fig. 311). Les demi-axes de la section droite du cylindre sont égaux à $\sqrt{p\lambda}$ et à $\sqrt{q\lambda}$; supposons $p>q$; les plans cycliques menés par l'origine doivent passer par le grand axe OB; un cercle décrit du point O comme centre dans le plan ZOX, avec un

rayon égal à OB, coupe la génératrice DE en deux points D et E; les deux plans BOD, BOE coupent le cylindre suivant des cercles. Ainsi le *paraboloïde elliptique admet deux séries de sections circulaires, qui sont perpendiculaires à la section principale de moindre paramètre* et qui font avec l'autre plan principal un même angle $\theta$ donné par la formule

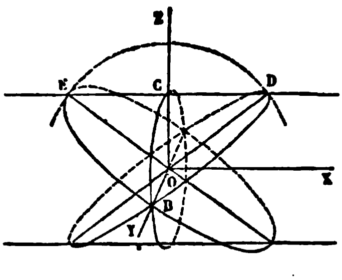


Fig. 311.

$$\text{(6)} \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

La courbe d'intersection du cylindre et d'une sphère ayant pour centre l'origine, est située sur le cône

$$-\frac{x^2}{R^2} + \left(\frac{1}{\lambda p} - \frac{1}{R^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{\lambda q} - \frac{1}{R^2}\right)z^2 = 0,$$

qui se réduit à deux plans, quand on a $R^2 = \lambda p$ ou $R^2 = \lambda q$. On obtient ainsi quatre plans cycliques; mais les deux premiers seulement sont réels.

## PARABOLOIDE HYPERBOLIQUE.

**558.** Considérons maintenant le cas où S′ et S″ sont de signes contraires. Supposons que le coefficient P ait le même signe que S″ et posons

$$2p = -\frac{P}{S'}, \quad 2q = \frac{P}{S''},$$

l'équation devient

$$\text{(7)} \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Les sections faites par les plans principaux XOY, XOZ sont deux paraboles P et Q (fig. 312), dont les axes sont dirigés en sens contraires. Le plan YOZ coupe la surface suivant deux droites OA, OB, qui font avec OZ un angle dont la tangente

a pour valeur $\sqrt{\frac{p}{q}}$. Les sections faites par des plans parallèles au plan YOZ sont des hyperboles homothétiques, mais dont la disposition varie; si le plan est du côté OX, l'axe réel de l'hyperbole est parallèle à OY; s'il est de l'autre côté, l'axe réel est parallèle à OZ. La surface est formée d'une seule nappe qui s'étend indéfiniment à droite et à gauche du plan YOZ; on lui a donné le nom de *paraboloïde hyperbolique*. La droite OX est un axe de la surface; le point O en est le sommet.

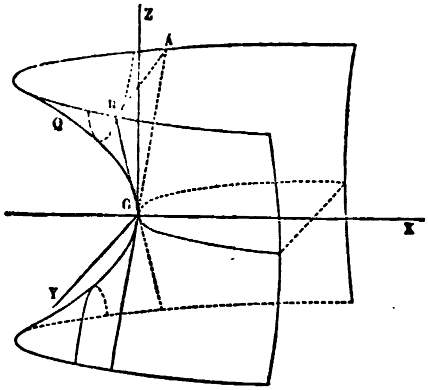



Fig. 312.

Les sections par des plans parallèles au plan principal XOY sont des paraboles égales à la parabole P et ayant leurs sommets sur la parabole Q. De même, les sections par des plans parallèles au plan principal XOZ sont des paraboles égales à la parabole Q et ayant leurs sommets sur la parabole P; de sorte qu'on peut concevoir la surface comme engendrée par une parabole qui se meut parallèlement à elle-même, son sommet décrivant une autre parabole.

**559.** Les sections par des plans

$$Ax + By + Cz = l,$$

non parallèles à l'axe, sont des hyperboles dont les projections sur le plan YOZ sont représentées par l'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = \frac{2(l - By - Cz)}{A}.$$

Ces hyperboles sont homothétiques entre elles, quelle que soit la direction du plan sécant.

Lorsque le plan sécant

$$By + Cz = l$$

est parallèle à l'axe du paraboloïde, la section, dont la projection sur le plan XOY a pour équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{(l - By)^2}{C^2 q} = 2x,$$

est une parabole ayant son axe parallèle à l'axe du paraboloïde ; les sections parallèles sont des paraboles égales. On peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{B^2}{C^2 q}\right) y^2 + \frac{2Bly}{C^2 q} - \frac{l^2}{C^2 q} = 2x;$$

quand on a $\frac{C}{B} = \pm \sqrt{\frac{p}{q}}$, cette équation se réduit au premier degré ; ainsi, il y a deux séries de plans qui coupent la surface chacun suivant une droite. Ces plans sont respectivement parallèles aux plans AOX, BOX définis par l'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0,$$

et qui passent par l'axe OX et les droites OA, OB, suivant lesquelles le plan tangent au sommet O coupe la surface.

### PLANS DIAMÉTRAUX ET DIAMÈTRES.

**560.** Le plan diamétral conjugué de la direction

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

a pour équation

$$\frac{\beta y}{p} - \frac{\gamma z}{q} = \alpha; \tag{8}$$

il est parallèle à l'axe. Lorsque les droites deviennent parallèles à l'axe, elles ne rencontrent la surface qu'en un point, et le plan diamétral s'éloigne à l'infini. Une droite parallèle à l'un des deux plans AOX, BOX ne rencontre aussi la surface qu'en un point ; car le plan, mené par cette droite parallèlement

à l'un de ces deux plans, coupe la surface suivant une droite. Si l'on considère une direction parallèle au plan AOX, mais non parallèle à l'axe, l'équation (8) représente un plan parallèle à l'axe et coupant la surface suivant une parallèle à cette direction.

Tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral, excepté les plans parallèles à l'un des plans AOX, BOX.

On verrait, comme pour le paraboloïde elliptique, que le diamètre ou le lieu des centres d'une série de sections parallèles est une droite parallèle à l'axe.

**561.** Si l'on prend pour origine des coordonnées un point quelconque M de la surface, pour axe des $x$ le diamètre qui passe en ce point, pour plan des $xy$ un plan quelconque mené par la droite MX, pour axe des $y$ la tangente à la parabole au point M, et pour axe des $z$ une parallèle à la direction conjuguée du plan XMY, l'équation de la surface prendra la forme

$$\frac{y^2}{p'} - \frac{z^2}{q'} = 2x.$$

Ceci nous permet de compléter l'étude des sections planes: le plan YMZ coupe la surface suivant deux droites ; les plans parallèles à ce plan coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques, mais dont la disposition change suivant que le plan sécant est d'un côté ou de l'autre du plan YMZ. Si l'on prenait pour axes des $y$ et des $z$ les deux droites qui passent par le point M, l'équation de la surface se réduirait à la forme

$$yz = kx.$$

## GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

**562.** Il est impossible de placer une droite réelle sur le paraboloïde elliptique; car, si par cette droite on mène un plan, ce plan coupera la surface suivant une ellipse ou une parabole. Mais la même impossibilité n'existe pas pour le paraboloïde hyperbolique. Nous avons vu que tout plan parallèle à l'un des deux plans AOX, BOX coupe la surface suivant une droite. Par un point quelconque M de la surface, menons un plan pa-

rallèle au plan AOX ; ce plan coupera la surface suivant une droite passant par le point M ; un plan parallèle au plan BOX donnera une seconde droite passant aussi par le point M. Ainsi, *par tout point du paraboloïde hyperbolique passent deux droites situées sur la surface.*

Le plan de ces deux droites est le plan tangent au point M. Il est impossible de mener par le point M une troisième droite située sur la surface ; car elle serait aussi contenue dans le plan tangent, et ce plan ne coupe la surface que suivant deux droites. Les droites situées sur la surface du paraboloïde hyperbolique peuvent être distinguées en deux séries, dont chacune constitue toute la surface. La première série se compose des droites parallèles au plan AOX, la seconde série des droites parallèles au plan BOX ; ces deux plans ont reçu le nom de *plans directeurs.*

Il résulte de là que les projections sur le plan YOZ des droites d'un même système sont parallèles ; car les plans projetants des droites du premier système sont parallèles au plan directeur AOX, et, par conséquent, leurs projections sont parallèles à la droite OA. De même, les projections des droites du second système sont parallèles à OB.

Projetons maintenant les droites sur l'un des plans principaux, par exemple sur le plan XOY. Nous remarquons d'abord qu'une droite DG située sur la surface (fig. 313) ne peut être parallèle à ce plan ; car la section faite par un plan parallèle au plan XOY est une parabole égale à la parabole P. La droite perce donc le plan principal en un point D de la parabole P ; le plan tangent en D contient la droite DG et la tangente DS à la parabole P ; ce plan étant perpendiculaire au plan principal XOY, on en conclut que la tangente DS à la parabole P est la projection de la droite DG. Ainsi, *les projections des génératrices rectilignes sur les plans principaux sont tangentes aux sections principales.*

Deux génératrices du même système étant situées dans deux plans parallèles au même plan directeur, et, par conséquent, parallèles entre eux, ne peuvent se rencontrer. Elles ne sont pas non plus parallèles ; car leurs projections sur le plan prin-

cipal XOY, étant tangentes à la parabole P, ne sont pas parallèles. Ainsi, ***deux droites du même système ne sont jamais dans un même plan.***

Considérons maintenant deux génératrices de systèmes différents; leurs projections sur le plan YOZ étant respectivement parallèles aux droites OA et OB se rencontrent; si, par le point d'intersection des projections, on mène une parallèle à l'axe OX, cette parallèle ne perce la surface qu'en un point, et, par conséquent, rencontre les deux droites données au même point. On en conclut que ***deux génératrices de systèmes différents se rencontrent toujours.***

**563.** Puisque par tout point de la surface passent deux droites, il est clair que par tout point D de la parabole principale P (fig. 313), passent deux droites DG, DH situées sur la surface. Si l'on prend pour axes des coordonnées le diamètre DX', la tangente DS à la parabole principale, et la perpendiculaire DZ' au plan principal, et si l'on désigne par $\theta$ l'angle SDX', la surface aura pour équation (n° 211)

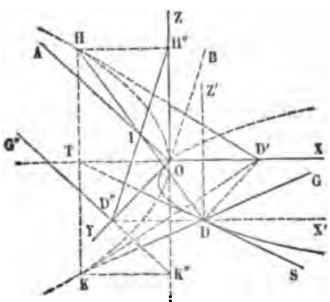



Fig. 313.

$$\frac{y'^2 \sin^2\theta}{p} - \frac{z'^2}{q} = 2x'.$$

Le plan Z'DS a pour trace, sur le plan principal, la tangente ST à la parabole principale; ce plan $x' = 0$ coupe la surface suivant les deux droites DG, DH représentées par l'équation

$$\frac{y'^2 \sin^2\theta}{p} - \frac{z'^2}{q} = 0,$$

et qui se projettent sur le plan principal suivant la tangente ST. Les deux droites DG, DH font des angles égaux avec le plan principal, ou avec la perpendiculaire DZ' à ce plan; si l'on appelle $\gamma$ ce dernier angle, on a

$$\operatorname{tang}\gamma = \sqrt{\frac{p}{q}} \times \frac{1}{\sin\theta}.$$

Quand le point D, partant du sommet O, parcourt la parabole principale P, l'angle $\gamma$, que font les deux droites DG et DH avec la verticale DZ', augmente de plus en plus, et tend vers un angle droit.

Les deux droites DH, DG percent le plan principal XOZ aux points H et K appartenant à la parabole principale Q, et situés sur une perpendiculaire à l'axe OX, au point T, où il est rencontré par la tangente DS ; les projections HD', KD' de ces deux droites sur le plan principal XOZ sont tangentes à la parabole Q, et passent par le point D', projection du point D. Le point D se projette en D'' sur le plan YOZ ; les points H et K se projettent en H'' et K'' ; on a ainsi les projections D''H'', D''G'' des deux droites DH, DG sur le plan YOZ. Les points D et H appartenant aux paraboles principales, on a $\overline{DD'}^2 = 2p \times OD'$, $\overline{HT}^2 = 2q \times OT$; les deux longueurs OD' et OT étant égales entre elles, il en résulte

$$\frac{OD''}{OH''} = \frac{DD'}{HT} = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

On reconnaît ainsi de nouveau que la projection D''H'' de la droite DH sur le plan YOZ conserve une direction constante; de même la projection K''D''G'' de la droite DG conserve une direction constante.

Si le point D parcourt la parabole principale P dans un sens déterminé OD, les droites dont les parties supérieures au plan principal XOY font avec les tangentes prises dans le sens du mouvement des angles aigus, percent l'autre plan principal XOZ au-dessous du premier, leurs projections sur le plan YOZ sont parallèles à OA et ces droites forment le premier système de génératrices. Les droites, dont les parties supérieures font avec les tangentes des angles obtus, ont leurs projections parallèles à OB et forment le second système.

Les deux droites DD'', HH'' étant égales et parallèles, la figure DD''HH'' est un parallélogramme, et, par conséquent, les diagonales DH, D''H'' se coupent mutuellement en deux parties égales ; ainsi le point I, où la génératrice DH perce le plan YOZ, est le milieu de la portion DH de cette droite com-

prise entre les deux plans principaux; le lieu du point I est la droite OA du premier système.

**564.** Nous savons qu'il faut trois directrices pour définir le mouvement d'une droite. Prenons comme directrices trois droites fixes A, B, C appartenant à l'un des systèmes, par exemple au second; ces droites seront parallèles au second plan directeur; une droite mobile glissant sur ces trois directrices coïncidera successivement avec chacune des droites du premier système, et, par conséquent, engendrera le paraboloïde hyperbolique.

On peut aussi définir le mouvement d'une droite en l'assujettissant à glisser sur deux droites fixes et à rester parallèle à un plan fixe. Si l'on prend pour directrices deux droites A et B du second système, et pour plan fixe le premier plan directeur, il est évident que la droite mobile coïncidera successivement avec chacune des droites du premier système, et engendrera encore le paraboloïde.

**565.** Les réciproques sont vraies. Considérons d'abord une droite mobile assujettie à glisser sur deux droites fixes OZ et AB (fig. 314), en restant parallèle à un même plan. Prenons pour axe des $y$ une position particulière OA de la génératrice, pour axe des $z$ la directrice OZ, pour plan des $xy$ un plan parallèle au plan directeur, et pour plan des $xz$ un plan parallèle à la droite AB.

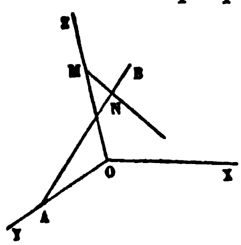



Fig. 314.

Cette seconde directrice AB aura pour équations $y=b, x=az$. Soit MN une position quelconque de la génératrice; cette droite, étant parallèle au plan XOY et rencontrant l'axe OZ, a des équations de la forme

$$(9) \qquad z=p, \quad y=mx,$$

avec deux paramètres variables $m$ et $p$. Pour qu'elle rencontre la seconde directrice AB, il faut que l'équation de condition

$$(10) \qquad amp=b$$

soit vérifiée. Si l'on élimine les deux paramètres $m$ et $p$ entre

les équations (9) et (10), on obtient l'équation du lieu

$$ayz - bx = 0. \tag{11}$$

La surface est du second degré; elle est dépourvue de centre; ce n'est pas un cylindre parabolique, puisque les droites OZ et AB, non parallèles, sont situées sur la surface; c'est donc un paraboloïde hyperbolique.

**566.** Considérons maintenant une droite assujettie à glisser sur trois droites fixes OZ, AB, A'B' (fig. 315), parallèles à un même plan. Prenons pour axe des $z$ la directrice OZ, pour axe des $y$ une position particulière de la génératrice, pour plan des $zx$ un plan parallèle aux trois directrices, et dans ce plan une droite quelconque menée par le point O pour axe des $x$. Les deux directrices AB, A'B' sont représentées par les équations

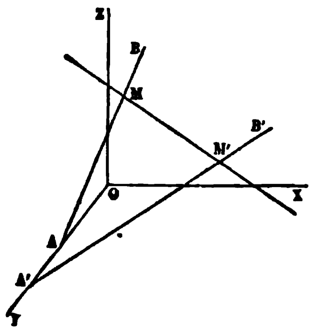



Fig. 315.

$$\text{AB} \begin{cases} y = b, \\ z = ax, \end{cases} \qquad \text{A'B'} \begin{cases} y = b', \\ z = a'x. \end{cases}$$

Une droite MM' qui rencontre ces deux droites peut être regardée comme l'intersection de deux plans menés, l'un par la droite AB, l'autre par la droite A'B'; ces deux plans ont des équations de la forme

$$\begin{cases} z - ax + \lambda(y - b) = 0, \\ z - a'x + \lambda'(y - b') = 0, \end{cases} \tag{12}$$

dans lesquelles $\lambda$ et $\lambda'$ désignent des paramètres arbitraires. La droite MM' devant rencontrer le droite OZ, on a, entre les deux paramètres, la relation

$$b\lambda = b'\lambda'. \tag{13}$$

On obtient l'équation de la surface engendrée par la droite MM' en éliminant les deux paramètres $\lambda$ et $\lambda'$ entre les trois équations (12) et (13), ce qui donne l'équation

$$b(y - b')(z - ax) - b'(y - b)(z - a'x) = 0. \tag{14}$$

La surface est du second degré; on reconnaît aisément qu'elle

est dépourvue de centre; d'ailleurs elle contient des droites non parallèles; c'est donc un paraboloïde hyperbolique.

**567.** Nous avons trouvé (n° 548) la relation qui existe, dans l'hyperboloïde à une nappe, entre les deux longueurs décrites sur deux droites fixes AB, CD de l'un des systèmes par une droite mobile de l'autre système. La relation est beaucoup plus simple dans le paraboloïde hyperbolique. Soient MN, M'N', M"N" (fig. 316) trois positions quelconques de la droite mobile; si par chacune d'elles on mène un plan parallèle au plan directeur, on aura trois plans parallèles entre eux; or on sait que trois plans parallèles déterminent sur deux droites AB, CD des segments proportionnels; on a donc la relation

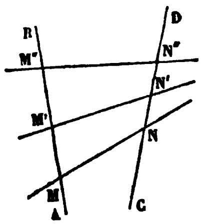


Fig. 316.

$$\frac{MM'}{NN'}=\frac{MM''}{NN''}.$$

Ainsi, *dans le paraboloïde hyperbolique, une droite mobile de l'un des systèmes décrit sur deux droites fixes de l'autre système des longueurs proportionnelles.*

Réciproquement, lorsqu'une droite mobile glisse sur deux droites fixes AB, CD, en décrivant sur ces droites des longueurs proportionnelles, elle engendre un paraboloïde hyperbolique. Soient MN, M'N' deux positions particulières de la génératrice; concevons le plan parallèle à ces deux droites. Soit maintenant M"N" une position quelconque de la génératrice; on a la relation

$$\frac{MM''}{NN''}=\frac{MM'}{NN'}.$$

Si par chacune des deux droites MN, M'N' on mène un plan parallèle au plan défini précédemment, et que par le point M" on mène un plan parallèle au même plan, on aura trois plans parallèles qui détermineront sur les deux droites AB, CD des segments proportionnels; le plan mené par le point M" passera donc par le point N" et contiendra la droite M"N"; on en

conclut que la génératrice mobile M'N' reste constamment parallèle à un même plan; elle engendre donc un paraboloïde hyperbolique.

**568.** C'est d'après cette propriété remarquable que l'on construit des modèles en fil représentant le paraboloïde hyperbolique. Imaginons que l'on ait fait un cadre en bois ACDB, ayant la forme d'un quadrilatère gauche, si l'on divise les deux côtés opposés AB, CD en un même nombre de parties égales, et que l'on joigne par des fils tendus les points de division correspondants, ces fils représenteront l'un des systèmes de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique. Si l'on divise de même les deux côtés opposés AC, BD en un même nombre de parties égales, et que l'on joigne par des fils les points correspondants, on obtiendra le second système de génératrices.

**569.** Il est facile de déduire de l'équation du paraboloïde hyperbolique

$$(7) \qquad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$$

les équations des deux systèmes de génératrices. En effet, on peut mettre l'équation (7) sous la forme

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}\right)=2x.$$

Les deux équations du premier degré

$$(\lambda) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\lambda, \quad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{2x}{\lambda},$$

dans lesquelles le paramètre $\lambda$ est arbitraire, représentent un système de droites situées sur la surface; car, en multipliant ces deux équations membre à membre, on retrouve l'équation (7). Les deux équations

$$(\mu) \qquad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\mu, \quad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{2x}{\mu},$$

dans lesquelles le paramètre $\mu$ est arbitraire, représentent un second système de droites situées sur la surface. Il est clair que

à l'un de ces deux plans, coupe la surface suivant une droite. Si l'on considère une direction parallèle au plan AOX, mais non parallèle à l'axe, l'équation (8) représente un plan parallèle à l'axe et coupant la surface suivant une parallèle à cette direction.

Tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral, excepté les plans parallèles à l'un des plans AOX, BOX.

On verrait, comme pour le paraboloïde elliptique, que le diamètre ou le lieu des centres d'une série de sections parallèles est une droite parallèle à l'axe.

**561.** Si l'on prend pour origine des coordonnées un point quelconque M de la surface, pour axe des $x$ le diamètre qui passe en ce point, pour plan des $xy$ un plan quelconque mené par la droite MX, pour axe des $y$ la tangente à la parabole au point M, et pour axe des $z$ une parallèle à la direction conjuguée du plan XMY, l'équation de la surface prendra la forme

$$\frac{y^2}{p'} - \frac{z^2}{q'} = 2x.$$

Ceci nous permet de compléter l'étude des sections planes; le plan YMZ coupe la surface suivant deux droites; les plans parallèles à ce plan coupent la surface suivant des hyperboles homothétiques, mais dont la disposition change suivant que le plan sécant est d'un côté ou de l'autre du plan YMZ. Si l'on prenait pour axes des $y$ et des $z$ les deux droites qui passent par le point M, l'équation de la surface se réduirait à la forme

$$yz = kx.$$

### GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

**562.** Il est impossible de placer une droite réelle sur le paraboloïde elliptique; car, si par cette droite on mène un plan, ce plan coupera la surface suivant une ellipse ou une parabole. Mais la même impossibilité n'existe pas pour le paraboloïde hyperbolique. Nous avons vu que tout plan parallèle à l'un des deux plans AOX, BOX coupe la surface suivant une droite. Par un point quelconque M de la surface, menons un plan pa-

rallèle au plan AOX ; ce plan coupera la surface suivant une droite passant par le point M; un plan parallèle au plan BOX donnera une seconde droite passant aussi par le point M. Ainsi, *par tout point du paraboloïde hyperbolique passent deux droites situées sur la surface.*

Le plan de ces deux droites est le plan tangent au point M. Il est impossible de mener par le point M une troisième droite située sur la surface; car elle serait aussi contenue dans le plan tangent, et ce plan ne coupe la surface que suivant deux droites. Les droites situées sur la surface du paraboloïde hyperbolique peuvent être distinguées en deux séries, dont chacune constitue toute la surface. La première série se compose des droites parallèles au plan AOX, la seconde série des droites parallèles au plan BOX; ces deux plans ont reçu le nom de *plans directeurs.*

Il résulte de là que les projections sur le plan YOZ des droites d'un même système sont parallèles; car les plans projetants des droites du premier système sont parallèles au plan directeur AOX, et, par conséquent, leurs projections sont parallèles à la droite OA. De même, les projections des droites du second système sont parallèles à OB.

Projetons maintenant les droites sur l'un des plans principaux, par exemple sur le plan XOY. Nous remarquons d'abord qu'une droite DG située sur la surface (fig. 313) ne peut être parallèle à ce plan; car la section faite par un plan parallèle au plan XOY est une parabole égale à la parabole P. La droite perce donc le plan principal en un point D de la parabole P; le plan tangent en D contient la droite DG et la tangente DS à la parabole P; ce plan étant perpendiculaire au plan principal XOY, on en conclut que la tangente DS à la parabole P est la projection de la droite DG. Ainsi, *les projections des génératrices rectilignes sur les plans principaux sont tangentes aux sections principales.*

Deux génératrices du même système étant situées dans deux plans parallèles au même plan directeur, et, par conséquent, parallèles entre eux, ne peuvent se rencontrer. Elles ne sont pas non plus parallèles; car leurs projections sur le plan prin-

Lorsque ces équations sont incompatibles, le lieu est un paraboloïde, elliptique si S′ et S″ ont le même signe, hyperbolique si S′ et S″ ont des signes contraires. Lorsque le lieu admet une infinité de centres, ce lieu est un cylindre, dont on détermine la nature par une section non parallèle à l'axe. Si les deux racines S′ et S″ étaient égales, la surface serait de révolution.

3° Lorsque l'équation du troisième degré a deux racines nulles, l'équation peut être réduite à l'une des formes (n° 509)

$$S'z^2 + Px = 0,$$
$$S''z^2 + H = 0.$$

La première représente une surface dépourvue de centre, et la seconde une surface qui admet pour centres tous les points d'un plan. On aura encore recours aux équations qui déterminent le centre. Si ces équations sont incompatibles, le lieu est un cylindre parabolique. Si elles se réduisent à une seule, le lieu est l'ensemble de deux plans parallèles, un plan unique, ou l'équation n'a pas de solution réelle ; une section non parallèle au plan des centres déterminera la nature du lieu.

Remarque. La réduction expliquée au chapitre II suppose les axes primitifs rectangulaires. Or il est évident que si l'on construit, avec deux systèmes d'axes différents, les lieux représentés par une même équation du second degré, ces lieux seront toujours de même espèce ; cependant l'une des surfaces pourra être de révolution sans que l'autre le soit. Les conclusions précédentes s'appliquent donc à un système d'axes quelconques.

**572.** La discussion est résumée dans le tableau suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1re CLASSE. L'équation du troisième degré n'a pas de racine nulle. — Surfaces ayant un centre unique. | Les trois racines de même signe. Genre ellipsoïde. | H a un signe contraire à celui des racines. | Ellipsoïde. |
| | — | H = 0......... | Un point. |
| | | H de même signe. | Rien. |
| | Deux racines de même signe, une de signe contraire. | H a un signe contraire à celui des deux premières racines. | Hyperboloïde à une nappe. |
| | — | H = 0......... | Cône. |
| | Genre hyperboloïde. | H de même signe. | Hyperboloïde à deux nappes. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2e CLASSE.<br><br>L'équation du troisième degré a une ou deux racines nulles.<br><br>—<br><br>Surfaces n'ayant pas de centre, ou une infinité de centres. | Une seule racine nulle et pas de centre.<br>—<br>Genre paraboloïde. | Les deux autres racines de même signe | Paraboloïde elliptique. |
| | | De signes contraires. | Paraboloïde hyperbolique. |
| | Une seule racine nulle et une infinité de centres en ligne droite. | Les deux autres racines de même signe. | Cylindre elliptique.<br>Une droite.<br>Rien. |
| | | De signes contraires. | Cylindre hyperbolique.<br>Deux plans qui se coupent. |
| | Deux racines nulles et pas de centre. | Cylindre parabolique. | |
| | Deux racines nulles et une infinité de centres dans un plan. | Deux plans parallèles.<br>Un plan.<br>Rien. | |

Exemple. Quelles sont les surfaces représentées par l'équation

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1,$$

dans laquelle $a$, $b$, $c$ désignent des paramètres arbitraires?

Quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres, l'origine est un centre de la surface; ainsi l'équation ne comprend que des surfaces à centre. L'équation du troisième degré en S est

$$(S-a)(S-b)(S-c) - a^2(S-a) - b^2(S-b) - c^2(S-c) - 2abc = 0,$$

ou

$$S^3 - (a+b+c)S^2 - (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)S + a^3+b^3+c^3-3abc = 0.$$

Si, pour abréger, on désigne par $m$ et $n$ les deux sommes $a+b+c$ et $bc + ca + ab$, on a identiquement

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = m^2 - 3n,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = m(m^2 - 3n),$$

et l'équation en S prend la forme

$$S^3 - mS^2 - (m^2 - 3n)S + m(m^2 - 3n) = (S - m)[S^2 - (m^2 - 3n)] = 0.$$

La quantité $m^2 - 3n$ étant égale à

$$\left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2$$

ne devient jamais négative; elle ne se réduit à zéro que lorsqu'on a $a = b = c$. Dans ce cas, l'équation proposée devient

$$(x + y + z)^2 = \frac{1}{a};$$

elle représente deux plans parallèles, réels ou imaginaires, suivant que le coefficient $a$ est positif ou négatif.

Supposons maintenant que les trois coefficients $a$, $b$, $c$ ne soient pas égaux entre eux, et représentons par $k^2$ la quantité positive $m^2-3n$; les trois racines de l'équation en S sont $m$ et $\pm k$, et l'équation proposée peut être ramenée à la forme

$$mx^2+ky^2-kz^2=1,$$

par une transformation de coordonnées. La surface est un hyperboloïde à une ou à deux nappes, suivant que le coefficient $m$ est positif ou négatif. Lorsque ce coefficient est nul, l'équation représente un cylindre dont la section droite est une hyperbole équilatère.

L'hyperboloïde sera de révolution, si l'on a $m=\pm k$, ou $m^2=k^2$, c'est-à-dire $n=0$ ou $bc+ca+ab=0$. Alors la direction de l'axe est déterminée par les formules (n° 508)

$$a\alpha=b\beta=c\gamma,$$

si les trois nombres $a$, $b$, $c$ sont différents de zéro, et par les formules

$$\alpha=0,\quad \beta=\gamma,$$

si les deux coefficients $b$ et $c$ sont nuls.

### DEUXIÈME MÉTHODE.

**573.** On forme les équations qui déterminent le centre de la surface (n° 487); il y a plusieurs cas à distinguer.

1° La surface admet un centre unique. Dans ce cas, pour simplifier, on transporte les axes au centre, et l'équation se réduit à

$$(1)\qquad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+H=0.$$

Lorsque le terme constant H est nul, le lieu est un point unique ou un cône. Pour décider la question, on fait une section par un plan parallèle à l'un des plans coordonnés; si la section est imaginaire, le lieu est un point.

Examinons le cas où le terme constant H est différent de zéro. Supposons que l'équation renferme les carrés des trois variables; en résolvant par rapport à $z$, et posant, pour abréger

$$A'A''-B^2=A_1,\quad A''A-B'^2=A'_1,\quad BB'-A''B''=B''_1,$$

on a

$$A''z=-(B'x+By)\pm\sqrt{-A'_1x^2+2B''_1xy-A_1y^2-A''H}.$$

Le plan

$$(2)\qquad A''z = -(B'x + By)$$

est le plan diamétral des cordes parallèles à OZ. La section de la surface par ce plan diamétral se projette sur le plan XOY suivant la courbe définie par l'équation

$$(3)\qquad -A'_1x^2 + 2B''_1xy - A_1y^2 - A''H = 0.$$

Cette courbe admet un centre unique ; car on a

$$A_1A'_1 - B''^2_1 = A\Delta,$$

$\Delta$ étant le déterminant relatif aux équations du centre. En outre, le terme constant $-A''H$ est différent du zéro.

Supposons que le lieu défini par l'équation (3) soit du genre ellipse; ce lieu sera une ellipse réelle ou une ellipse imaginaire, mais pas un point. Si le lieu est une ellipse réelle, la courbe a pour centre l'origine, et l'on sait que le polynôme.

$$-A'_1x^2 + 2B''_1xy - A_1y^2 - A''H$$

conserve un signe invariable, lorsqu'on remplace $x$ et $y$ par les coordonnées d'un point intérieur (ce signe est celui du terme $-A''H$); pour tous les points extérieurs, le polynôme a un signe contraire. Si la quantité $-A''H$ est positive, tous les points de la surface se projettent à l'intérieur de l'ellipse ; la surface est donc un ellipsoïde. Si la quantité $-A''H$ est négative, les points de la surface se projettent en dehors de l'ellipse, et l'on a un hyperboloïde à une nappe. Lorsque le lieu (3) est imaginaire, la fonction.

$$-A'_1x^2 + 2B''_1xy - A_1y^2 - A''H$$

conserve un signe invariable pour tous les points du plan XOY (ce signe est celui du terme $-A''H$) et ne s'annule pas ; si la quantité $-A''H$ est positive, la surface se compose de deux nappes indéfinies séparées par le plan diamétral ; c'est un hyperboloïde à deux nappes ; si la quantité $-A''H$ est négative, la valeur de $z$ étant toujours imaginaire, l'équation (1) n'a pas de solution réelle.

Supposons actuellement que l'équation (3) définisse un lieu du genre hyperbole ; le terme $-A''H$ étant différent de zéro, le lieu est toujours une hyperbole, et non le système de deux

droites. Si la quantité — A″H est positive, tous les points de la surface se projettent entre les deux branches de l'hyperbole: la surface est donc un hyperboloïde à une nappe. Si la quantité — A″H est négative, la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

On peut remarquer que le signe de la quantité — A″H indique si le diamètre OZ est réel ou imaginaire. Ce diamètre, joint à deux diamètres conjugués de la section, forme un système de trois diamètres conjugués de la surface, qui permettent de reconnaître immédiatement l'espèce de cette surface. Supposons que la section diamétrale soit une ellipse réelle, cette ellipse admet deux diamètres conjugués réels; si la quantité — A″H est positive, le troisième diamètre étant aussi réel, la surface est un ellipsoïde; si cette quantité est négative, le troisième diamètre étant imaginaire, la surface est un hyperboloïde à une nappe. Lorsque la section est une ellipse imaginaire, elle admet deux diamètres conjugués imaginaires; si le troisième diamètre est réel, le lieu est un hyperboloïde à deux nappes; s'il est aussi imaginaire, le lieu est un ellipsoïde imaginaire. Supposons maintenant que la section soit une hyperbole; de deux diamètres conjugués de cette hyperbole, l'un est réel, l'autre imaginaire; si le troisième diamètre est réel, la surface est un hyperboloïde à une nappe; s'il est imaginaire, la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Nous ferons encore remarquer que la section diamétrale est la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface et ayant ses arrêtes parallèles à l'axe des $z$.

Lorsque deux des coefficients A, A′, A″, par exemple A et A′, sont de signes contraires, la surface est un hyperboloïde; car la section faite par le plan $z=0$ est une hyperbole.

Supposons maintenant que l'un des coefficients des carrés, A″ par exemple, soit nul; l'équation

$$(4)\qquad 2(By+B'x)z+Ax^2+A'y^2+2B''xy+H=0,$$

étant du premier degré par rapport à $z$, à tout système de valeurs réelles de $x$ et de $y$ correspond une valeur réelle de $z$; ainsi la surface s'étend à l'infini; c'est donc l'un des deux hy-

perboloïdes. Le cône asymptote est représenté par l'équation

$$2(By+B'x)z+Ax^2+A'y^2+2B''xy=0;$$

la droite OZ est une arête de ce cône. Si la surface est un hyperboloïde à une nappe, deux droites parallèles à OZ sont situées sur la surface; or les équations d'une droite parallèle à OZ sont $x=\alpha$, $y=\beta$; la coordonnée $z$ du point d'intersection de cette droite et de la surface est donnée par l'équation

$$2(B\beta+B'\alpha)z+A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+H=0.$$

Pour que la droite appartienne à la surface, il faut que l'on puisse choisir $\alpha$ et $\beta$ de manière que l'équation précédente soit vérifiée quelle que soit $z$, c'est-à-dire de manière que l'on ait simultanément

$$B\beta+B'\alpha=0 \quad , \quad A\alpha^2+A'\beta^2+2B''\alpha\beta+H=0;$$

d'où

$$\beta=-\frac{B'\alpha}{B}, \quad \alpha^2=-\frac{B^2H}{AB^2+A'B'^2-2BB'B''}.$$

La surface est un hyperboloïde à une nappe, si la valeur de $\alpha^2$ est positive; un hyperboloïde à deux nappes, si cette valeur est négative.

2° La surface est dépourvue du centre. Cette surface ne peut être que l'un des paraboloïdes ou un cylindre parabolique. Si c'est un paraboloïde, l'un au moins des trois plans coordonnés n'est pas parallèle à l'axe, et donnera une section elliptique ou hyperbolique, suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique. Si la surface est un cylindre parabolique, les sections par les trois plans coordonnés sont des paraboles.

Lorsque la surface est un paraboloïde, les plans diamétraux représentés par les équations $f'_x=0$, $f'_y=0$, $f'_z=0$ se coupent suivant des droites parallèles à l'axe de la surface; de deux de ces équations on déduira les coefficients angulaires $a$ et $b$ de l'axe. Les plans perpendiculaires à l'axe sont définis par l'équation $ax+by+z=l$; le lieu des centres de ces sections parallèles, ou l'axe de la surface, est donné par les équations (n° 506)

$$\frac{f'_x}{a}=\frac{f'_y}{b}=\frac{f'_z}{1}.$$

3° La surface a pour centres tous les points d'une droite. La surface est un cylindre; l'un au moins des trois plans coordonnés n'est pas parallèle à son axe; la section du cylindre par ce plan détermine son espèce.

4° La surface a pour centres tous les points d'un plan. Dans ce cas, le lieu est l'ensemble de deux plans parallèles, un plan unique, ou l'équation ne représente rien. Pour décider la question, on fera une section par l'un des plans coordonnés non parallèle au plan des centres.

EXEMPLE I. $4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy + 4y + 8z + 9 = 0.$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x + y + 2z = 0, \quad 2x + 3y + 2 = 0, \quad 4x + 9z + 4 = 0.$$

Ces équations n'admettent qu'une solution $x = \frac{7}{2}$, $y = -3$, $z = -2$.

Si l'on transporte l'origine au centre, le terme constant prend la valeur $-5$, et l'équation se réduit à

$$4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy - 5 = 0.$$

En résolvant par rapport à $x$, on a

$$2x = -y - 2z \pm \sqrt{-2y^2 - 5z^2 + 4yz + 5}.$$

L'équation

$$-2y^2 - 5z^2 + 4yz + 5 = 0$$

représente une ellipse réelle; le terme constant sous le signe radical étant positif, la surface se projette sur le plan des $yz$ à l'intérieur de l'ellipse; c'est donc un ellipsoïde.

Si l'on remplaçait, dans l'équation donnée, le terme constant 9 par 14 la nouvelle équation ainsi obtenue ne représenterait plus qu'un point. Si l'on remplaçait le terme constant par un nombre plus grand que 14 l'équation n'admettrait plus de solutions réelles.

EXEMPLE II. $4x^2 - 15y^2 + 14yz + 4zx - 4xy + 4x - 34y + 24z - 18 = 0.$

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x - y + z + 1 = 0, \quad 2x + 15y - 7z + 17 = 0, \quad 2x + 7y + 12 = 0.$$

Elles n'admettent qu'une solution $x = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -1$.

Lorsqu'on transporte l'origine au centre, l'équation de la surface devient

$$4x^2 - 15y^2 + 14yz + 4zx - 4xy - 6 = 0.$$

Celle-ci résolue par rapport à $x$ donne

$$2x = y - z \pm \sqrt{z^2 + 16y^2 - 16yz + 6}.$$

L'équation

$$z^2 + 16y^2 - 16yz + 6 = 0$$

représente une hyperbole; le terme constant sous le signe radical étant positif, la surface est un hyperboloïde à une nappe.

Lorsqu'on remplace dans l'équation proposée le terme $-18$ par $-12$, on obtient une nouvelle équation qui représente un cône; si l'on remplace le terme constant par un nombre plus grand que $-12$, on a un hyperboloïde à deux nappes.

Exemple III. $4x^2 + 4y^2 + 12z^2 - 12yz + 4xy + 4x + 2y + 3z = 0$.

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x + y + 1 = 0, \quad 2x + 4y - 6z + 1 = 0, \quad 4y - 8z - 1 = 0.$$

Si l'on retranche la première de la seconde, on obtient l'équation

$$y - 2z = 0, \quad \text{ou} \quad 4y - 8z = 0,$$

incompatible avec la troisième. L'équation proposée représente donc une surface dépourvue de centre. L'équation de la section de la surface par le plan des $xy$ est

$$4x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 2y = 0;$$

cette section étant une ellipse, la surface est un paraboloïde elliptique. L'axe, ayant pour coefficients angulaires $-1$ et $2$, est représenté par les équations

$$-(8x + 4y + 4) = 2x + 4y - 6z + 1 = 24z - 12y + 3.$$

Exemple IV. $4x^2 - 2y^2 - 12z^2 + 12yz + 4xy + 4x + 2y + 3z = 0$.

Les équations qui déterminent le centre sont

$$2x + y + 1 = 0, \quad 2x - 2y + 6z + 1 = 0, \quad 4y - 8z + 1 = 0.$$

Si l'on retranche la seconde de la première, on obtient l'équation $y - 2z = 0$, incompatible avec la troisième; ainsi la surface n'a pas de centre. Le plan des $xy$ coupant la surface suivant une hyperbole

$$4x^2 - 2y^2 + 4xy + 4x + 2y = 0,$$

la surface est un paraboloïde hyperbolique, dont l'axe a pour équations

$$-(8x + 4y + 4) = -2y + 6z + 2x + 1 = -24z + 12y + 3.$$

Exemple V. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xy + 2x - 2y - 4 = 0$.

Les équations qui déterminent le centre sont

$$x - y + 1 = 0, \quad 2y - 2z - x - 1 = 0, \quad y - 2z = 0.$$

En ajoutant les deux premières, membre à membre, on obtient la troisième; donc la surface admet pour centres tous les points de la droite $x = 2z - 1$, $y = 2z$. Sa trace sur le plan XOY est l'ellipse réelle

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 2y - 4 = 0.$$

Ainsi la surface est un cylindre elliptique.

TROISIÈME MÉTHODE

**874.** Cette méthode, déjà appliquée au n° 123, repose sur la décomposition du polynôme du second degré en une somme de carrés de fonctions linéaires des variables; l'un des carrés étant remplacé, dans certains cas, par une fonction du premier degré. Montrons d'abord comment se fait la décomposition quelque soit le nombre des variables. Dans ce qui suit, les lettres $a\ b\ c\ k$ désigneront des quantités constantes, et les lettres $\alpha\ \beta\ \gamma$ des fonctions linéaires d'une ou de plusieurs des variables $x\ y\ z$.

Considérons en premier lieu un polynôme du second degré à une seule variable $x$,

$$Ax^2 + 2Bx + C; \tag{1}$$

le coefficient A étant différent de zéro, on peut écrire le polynôme

$$A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{A},$$

et, par conséquent, le ramener à la forme

$$a\alpha^2 + k. \tag{2}$$

Soit maintenant un polynôme du second degré à deux variables

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \tag{3}$$

dans lequel nous supposerons d'abord que l'un des coefficients de $x^2$ et de $y^2$, C par exemple, n'est pas nul. Le polynôme (3) est du second degré par rapport à $y$; en l'ordonnant par rapport à cette variable, on a

$$Cy^2 + 2(Bx + E)y + Ax^2 + 2Dx + F =$$

$$C\left(y + \frac{Bx+E}{C}\right)^2 + Ax^2 + 2Dx + F - \frac{(Bx+E)^2}{C}.$$

La seconde partie $Ax^2 + 2Dx + F - \frac{(Bx+E)^2}{C}$ est un polynôme en $x$ du second ou du premier degré, ou une constante. Si elle est du second degré, on la mettra sous la forme $b\beta + k$; ainsi, lorsque le coefficient C n'est pas nul, on peut ramener le polynôme (3) à l'une des formes

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + k, \tag{4}$$

$$a\alpha^2 + \beta, \tag{5}$$

$$a\alpha^2 + k. \tag{6}$$

Lorsque les deux coefficients A et C sont nuls à la fois, B est nécessairement différent de zéro, et l'on a

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 2x(By + D) + 2Ey + F$$
$$= \frac{2}{B}(Bx + E)(By + D) - \frac{1}{B}(2DE - BF);$$

le polynôme prend la forme

$$(7) \qquad \alpha\beta + k.$$

Il est bon de remarquer que la forme (7) se ramène à la forme (4); car on a identiquement

$$\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2.$$

Mais les polynômes $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha-\beta}{2}$ contiennent les deux variables $x$ et $y$, tandis que dans le polynôme (4) la fonction $\beta$ ne renferme que la variable $x$.

Considérons enfin un polynôme à trois variables

$$(8) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F,$$

et supposons que l'un des carrés, $z^2$ par exemple, ait son coefficient différent de zéro. En ordonnant par rapport à $z$, on a

$$A''z^2 + 2(By + B'x + C'')z + Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + F =$$
$$A''\left(z + \frac{By + B'x + C''}{A''}\right)^2 + Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y$$
$$+ F - \frac{(By + B'x + C'')^2}{A''}.$$

La seconde partie est un polynôme du second ou du premier degré par rapport aux variables $x$ et $y$, ou une constante; si elle est du second degré, on la mettra sous l'une des formes (4), (5), (6); ainsi le polynôme (8) prendra l'une des formes

$$(9)\ a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + k, \quad (10)\ a\alpha^2 + b\beta^2 + \gamma, \quad (11)\ a\alpha^2 + b\beta^2 + k,$$
$$(12)\ a\alpha^2 + \beta, \quad (13)\ a\alpha^2 + k.$$

Lorsque les trois coefficients A, A', A'' sont nuls à la fois, l'un au moins des coefficients B, B', B'', par exemple B, est

différent de zéro; alors on a

$$\begin{aligned}
&2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + C'y + 2C''z + F \\
&= z(2By + 2B'x + 2C'') + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + F \\
&= \left(z + \frac{B''}{B}x + \frac{C'}{B}\right)(2By + 2B'x + 2C'') + 2Cx + F \\
&\qquad - \frac{2B'B''}{B}x^2 - \frac{2B''C''}{B}x - \frac{2B'C'}{B}x - \frac{2C'C''}{B}.
\end{aligned}$$

La seconde partie étant un polynôme en $x$ du second degré au plus, le polynôme proposé peut être ramené à l'une des formes

(14) $\alpha\beta + c\gamma^2 + k,$

(15) $\alpha\beta + \gamma,$

(16) $\alpha\beta + k.$

Si l'on remplace le produit $\alpha\beta$ par $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$, les formes (14), (15), (16) se ramènent aux formes (9), (10), (11).

578. Cela posé, lorsqu'on donne une équation numérique du second degré, on commence par ramener le premier membre de cette équation à l'une des formes précédentes, et il est facile d'en déduire l'espèce de la surface. Considérons, par exemple, le cas où l'équation est de la forme

(9) $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + k = 0.$

Imaginons que l'on effectue une transformation de coordonnées en prenant pour plans des $y'z'$, des $z'x'$, et des $x'y'$ les plans définis par les équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. D'un point quelconque M de l'espace (fig. 317) abaissons une perpendiculaire MN sur le plan X'O'Y' et menons MI parallèle à O'Z'; désignons par $x, y, z$ les anciennes coordonnées du point M, par $x', y', z'$ les coordonnées nouvelles, par $\theta$ l'angle des deux droites MN, MI, angle qui est le même pour tous les points de l'espace, et soit enfin $\gamma = mx + ny + pz + q$. La perpendiculaire MN a pour expres-

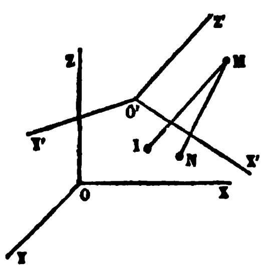



Fig. 317.

sion dans le premier système de coordonnées (n° 438)

$$MN = \pm \frac{mx + ny + pz + q}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \frac{\pm \gamma}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

et dans le second

$$MN = \pm z' \cos \theta.$$

Dans chacune des formules, le signe du second membre change lorsque le point M passe d'un côté du plan X'O'Y' à l'autre; si donc on appelle $h$ le produit $\sqrt{m^2+n^2+p^2} \times \cos\theta$, affecté d'un signe convenable, on aura pour tous les points de l'espace la relation $\gamma = hz'$. On démontrerait de même les relations $\beta = gy'$, $\alpha = fx'$. Il en résulte que l'équation de la surface, par rapport aux nouveaux axes, est

$$af^2x'^2 + bg^2y'^2 + ch^2z'^2 + k = 0. \tag{17}$$

La surface est une surface à centre unique, et les nouveaux plans des coordonnées sont trois plans diamétraux conjugués. L'espèce de la surface est indiquée immédiatement par les signes des coefficients $a$, $b$, $c$, $k$.

**576.** Remarque I. Cette transformation des coordonnées suppose que les plans définis par les équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ se coupent en un point unique. Cette condition peut n'être pas remplie, lorsque les fonctions linéaires $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont prises arbitrairement; mais elle l'est toujours, lorsque ces polynômes proviennent de la transformation d'une fonction du second degré d'après la méthode indiquée; car, alors, chaque polynôme contient une variable de moins que le précédent.

Remarque II. Lorsque les trois coefficients $a$, $b$, $c$, n'ont pas le même signe, la surface est un hyperboloïde; si, dans l'équation (17), on supprime le terme constant $k$, on obtient l'équation du cône asymptote par rapport aux nouveaux axes; on en conclut qu'en supprimant la même constante $k$ dans l'équation (9), on obtiendra l'équation du cône asymptote par rapport aux axes primitifs.

Remarque III. Lorsque $a$ et $b$ sont positifs, $c$ et $k$ négatifs, la surface est un hyperboloïde à une nappe. Si l'on pose $c = -c_1$, $k = -k_1$, l'équation devient

$$a\alpha^2 - c_1\gamma^2 = k_1 - b\beta^2.$$

Les deux systèmes de génératrices rectilignes sont donnés par les équations

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{a}+\gamma\sqrt{c_1}=\lambda(\sqrt{k_1}+\beta\sqrt{b}), \\ \alpha\sqrt{a}-\gamma\sqrt{c_1}=\frac{1}{\lambda}(\sqrt{k_1}-\beta\sqrt{b}), \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\sqrt{a}+\gamma\sqrt{c_1}=\mu(\sqrt{k_1}-\beta\sqrt{b}), \\ \alpha\sqrt{a}-\gamma\sqrt{c_1}=\frac{1}{\mu}(\sqrt{k_1}+\beta\sqrt{b}), \end{cases}$$

dans lesquelles $\lambda$ et $\mu$ sont des paramètres arbitraires.

**577.** Lorsque le premier membre de l'équation se réduit à la forme (10), on reconnaît par la même transformation que la surface est un paraboloïde, elliptique ou hyperbolique, suivant que les coefficients $a$ et $b$ ont le même signe ou des signes contraires. Dans ce dernier cas, si l'on suppose $a$ positif, $b$ négatif et égal à $-b_1$, les deux systèmes de génératrices rectilignes sont définis par les équations

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b_1}=\lambda, \\ \alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b_1}=-\frac{\gamma}{\lambda}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b_1}=\mu, \\ \alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b_1}=-\frac{\gamma}{\mu}; \end{cases}$$

les droites du premier système sont parallèles au plan

$$\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b_1}=0,$$

celles du second système au plan

$$\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b_1}=0;$$

l'ensemble des deux plans directeurs est représenté par l'équation $a\alpha^2-b\beta^2=0$, ce qui est conforme à la remarque du n° 570.

Lorsque le premier membre se réduit à la forme (11), en prenant pour nouveaux plans des coordonnées les deux plans $\alpha=0$, $\beta=0$, et un troisième plan non parallèle à la droite d'intersection des deux premiers, on reconnaît que la surface est un cylindre elliptique ou hyperbolique. La forme (12) correspond au cylindre parabolique, et la forme (13) au système de deux plans parallèles.

Les formes (14), (15,) (16) se ramènent aux précédentes; mais cette réduction n'est pas nécessaire. On voit directement que la forme (14) donne un hyperboloïde à une nappe, si $c$ et $k$ ont des signes contraires; un hyperboloïde à deux nappes, s'ils ont le même signe. Dans le premier cas, soit $c$ positif, $k$ négatif

et égal à $-k_1$ ; les équations des deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont

$$\begin{cases} \gamma\sqrt{c}+\sqrt{k_1}=\lambda\alpha, \\ \gamma\sqrt{c}-\sqrt{k_1}=-\dfrac{\beta}{\lambda}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma\sqrt{c}-\sqrt{k_1}=\mu\alpha, \\ \gamma\sqrt{c}+\sqrt{k_1}=-\dfrac{\beta}{\mu}. \end{cases}$$

La forme (15) correspond au paraboloïde hyperbolique ; les deux systèmes de génératrices rectilignes sont représentés par les équations

$$\begin{cases} \alpha=\lambda, \\ \beta=-\dfrac{\gamma}{\lambda}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta=\mu, \\ \alpha=-\dfrac{\gamma}{\mu}. \end{cases}$$

Enfin la forme (16) donne un cylindre hyperbolique.

**578.** Dans ce qui précède, nous avons supposé les axes rectangulaires. On peut employer la même méthode de transformation quand les coordonnées sont obliques, et l'on reconnaît aisément que l'on a

$$\gamma=mx+ny+pz+q=\pm\frac{pz'\cos\theta'}{\cos\theta},$$

$\theta$ et $\theta'$ étant les angles que la normale au plan $\gamma=0$ fait avec les axes OZ et O'Z' ; il en résulte, comme dans le cas des coordonnées rectangulaires, $\gamma=hz'$, $h$ étant une constante.

Exemple I. $4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy+4y+8z+9=0$. Le premier membre de l'équation, ordonnée par rapport à $x$, est

$$4x^2+4x(y+2z)+3y^2+9z^2+4y+8z+9,$$

ou $$(2x+y+2z)^2-(y+2z)^2+3y^2+9z^2+4y+8z+9,$$

et, en faisant les réductions dans la seconde partie,

$$(2x+y+2z)^2+2y^2+5z^2-4yz+4y+8z+9.$$

La seconde partie, ordonnée par rapport à $y$, devient

$$2y^2-4y(z-1)+5z^2+8z+9=2(y-z+1)^2-2(z-1)^2+5z^2+8z+9.$$

Enfin la dernière partie de ce nouveau polynôme est

$$3z^2+12z+7=3(z+2)^2-5.$$

Il résulte de ce qui précède que l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$(2x+y+2z)^2+2(y-z+1)^2+3(z+2)^2-5=0.$$

Cette équation représente un ellipsoïde, et les trois plans définis par les équations

$$2x+y+2z=0,\quad y-z+1=0,\quad z+2=0,$$

sont trois plans diamétraux conjugués de la surface. Ces plans se coupent au point $x=\frac{7}{3}$, $y=-3$, $z=-2$, qui est le centre de la surface.

Exemple II. $4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18=0.$
On a successivement

$$\begin{aligned}&4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18\\&=4x^2+4x(z-y+1)-15y^2+14yz-34y+24z-18\\&=(2x-y+z+1)^2-16y^2+16yz-z^2-32y+22z-19;\end{aligned}$$

puis

$$-16y^2+16y(z-2)-z^2+22z-19=-4(2y-z+2)^2+3z^2+6z-3$$

et enfin $\quad 3z^2+6z-3=3(z+1)^2-6.$

L'équation proposée prend la forme

$$(2x-y+z+1)^2-4(2y-z+2)^2+3(z+1)^2-6=0;$$

elle représente un hyperboloïde à une nappe. Les équations des deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont

$$\begin{cases}2x+3y-z+5=\lambda\,[\sqrt{6}+(z+1)\sqrt{3}],\\2x-5y+3z-3=\frac{1}{\lambda}\,[\sqrt{6}-(z+1)\sqrt{3}];\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+3y-z+5=\mu\,[\sqrt{6}-(z+1)\sqrt{3}],\\2x-5y+3z-3=\frac{1}{\mu}\,[\sqrt{6}+(z+1)\sqrt{3}].\end{cases}$$

L'équation du cône asymptote est

$$(2x-y+z+1)^2-4(2y-z+2)^2+3(z+1)^2=0.$$

Exemple III. $4x^2+4y^2+12z^2-12yz+4xy+4x+2y+3z=0.$

On a $\quad 4x^2+4x(y+1)+4y^2+12z^2-12yz+2y+3z$

$$=(2x+y+1)^2+3y^2+12z^2-12yz+3z-1,$$

$$3y^2+12z^2-12yz+3z-1=3(y-2z)^2+3z-1,$$

et l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$(2x+y+1)^2+3(y-2z)^2+3z-1=0;$$

elle représente un paraboloïde elliptique.

Exemple IV. $4x^2-2y^2-12z^2+12yz+4xy+4x+2y+3z=0.$
L'équation se met sous la forme

$$(2x+y+1)^2-3(y-2z)^2+(3z-1)=0;$$

elle représente un paraboloïde hyperbolique.

Les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface sont donnés par les equations

$$\left\{\begin{aligned} &2x + y + 1 + (y - 2z)\sqrt{3} = \lambda,\\ &2x + y + 1 - (y - 2z)\sqrt{3} = \frac{1}{\lambda}(1 - 3z); \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &2x + y + 1 + (y - 2z)\sqrt{3} = \mu(1 - 3z),\\ &2x + y + 1 - (y - 2z)\sqrt{3} = \frac{1}{\mu}. \end{aligned}\right.$$

EXEMPLE V. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 2zx + 4xy + 6x + 4y - 5z + 3 = 0$. Ordonné par rapport à $x$, le premier membre s'écrit

$$\begin{aligned} &x^2 + 2x(2y - z + 3) + 4y^2 + z^2 - 4yz + 4y - 5z + 3\\ &= (x + 2y - z + 3)^2 - 8y + z - 6, \end{aligned}$$

et l'équation proposée prend la forme

$$(x + 2y - z + 3)^2 + (z - 8y - 6) = 0;$$

elle représente un cylindre parabolique; les arêtes du cylindre sont parallèles à la droite déterminée par les deux équations

$$x + 2y - z + 3 = 0, \quad z - 8y - 6 = 0.$$

EXEMPLE VI. Indiquer les diverses surfaces représentées par l'équation

$$x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(yz + zx + xy) = 2m^3 - 3m + 1,$$

dans laquelle $m$ est un paramètre variable. Le second membre est un polynôme du troisième degré dont les racines sont $1$ et $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; si l'on pose $m' = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$, $m'' = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, on écrira ce polynôme sous la forme

$$2(m - m')(m - m'')(m - 1).$$

Lorsque le paramètre $m$ est différent de zéro, si l'on transforme le premier membre en une somme de carrés, l'équation devient

$$\begin{aligned} &(x - y - z)^2 + 2m^2\left(y - \frac{z}{m^2}\right)^2 + 2\left(m^2 - \frac{1}{m^2}\right)z^2\\ &= 2(m - m')(m - m'')(m - 1). \end{aligned}$$

Lorsque le paramètre $m$ est égal à zéro, l'équation se réduit à

$$(x - y - z)^2 - 4yz = 1.$$

La racine $m''$ est plus petite que l'unité, la valeur absolue de $m'$ est au contraire plus grande que l'unité.

1° Quand le paramètre $m$ a une valeur comprise entre $-\infty$ et $m'$, les coefficients des carrés étant positifs et le second membre négatif, on a un ellipsoïde imaginaire. Lorsque $m$ acquiert la valeur $m'$, le lieu est un point.

2° Quand $m$ est compris entre $m'$ et $-1$, les coefficients des carrés étant positifs, ainsi que le second membre, la surface est un ellipsoïde. Pour $m = -1$, l'ellipsoïde se change en un cylindre elliptique.

3° Quand $m$ est compris entre $-1$ et $m''$, le lieu est un hyperboloïde à une nappe. Cet intervalle comprend la valeur $m = 0$, à laquelle ne convient pas la première forme; mais la seconde forme montre que dans ce cas la surface est toujours un hyperboloïde à une nappe. Pour $m = m''$, l'hyperboloïde se change en un cône.

4° Lorsque $m$ est compris entre $m''$ et $+1$, le second membre devenant négatif, on a un hyperboloïde à deux nappes. Pour $m = 1$, on a une droite.

5° Enfin quand $m$ est compris entre $1$ et $+\infty$, on a de nouveau un ellipsoïde.

Pour que la surface soit de révolution, comme les trois coefficients $B, B', B''$ sont différents de zéro, il faut que l'on ait les relations

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

qui se réduisent ici à $m = 0$. Dans ce cas, l'équation peut être mise sous la forme

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = 1;$$

et l'on voit par cette forme même que la surface est de révoluti

# CHAPITRE VII

## Théorèmes généraux sur les surfaces du second degré.

**579.** L'équation générale du second degré

$$(1) \qquad \begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0, \end{aligned}$$

entre les trois variables $x$, $y$, $z$, renferme dix termes, et la surface définie par cette équation dépend de neuf paramètres arbitraires, les rapports de neuf coefficients au dixième. Il faut donc *neuf* conditions géométriques pour définir une surface du second degré, en supposant que chaque condition géométrique s'exprime par une seule relation entre les coefficients. Ainsi, par exemple, une surface du second degré est déterminée par neuf points.

La ligne d'intersection d'une surface du second degré et d'un plan tangent se compose de deux droites, ou se réduit à un point, c'est-à-dire à deux droites imaginaires conjuguées. Pour exprimer qu'un plan est tangent à la surface, il suffira donc d'écrire la condition pour que la ligne d'intersection se réduise à deux droites. Ainsi neuf plans tangents déterminent une surface du second degré.

On voit facilement qu'un plan tangent avec le point de contact équivaut à trois conditions.

La surface est un paraboloïde, lorsque le déterminant des équations du centre

$$AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B''$$

est nul. Ainsi huit points suffisent pour déterminer un paraboloïde.

La surface est un cône lorsque le centre est situé sur la surface. Si l'on rend l'équation homogène, on a les équations

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}f'_x &= Ax + B''y + B'z + Ct = 0,\\
\frac{1}{2}f'_y &= B''x + A'y + Bz + C't = 0,\\
\frac{1}{2}f'_z &= B'x + By + A''z + C''t = 0,\\
\frac{1}{2}f'_t &= Cx + C'y + C''z + Ft = 0,
\end{aligned}\right.$$

dont la dernière, en vertu de la relation (8) du n° 489, exprime que le centre est sur la surface. Pour que ces quatre équations homogènes et du premier degré admettent une solution, dans laquelle l'une des inconnues au moins soit différente de zéro, il est nécessaire que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix}$$

soit nul.

**580.** On arrive aux mêmes conséquences par la décomposition en carrés. Pour que la surface soit un cône, il faut qu'après avoir formé les trois carrés variables on obtienne une partie constante nulle. Pour que la surface soit un paraboloïde, il faut qu'après avoir formé les deux premiers carrés la partie restante soit une fonction du premier degré à une seule variable; on égalera à zéro le coefficient du terme du second degré. Pour que la surface soit un cylindre, il faut que cette partie restante soit une constante; on égalera à zéro les coefficients des termes du premier et du second degré; sept points déterminent un cylindre. Pour que la surface soit un cylindre parabolique, il faut qu'après avoir formé le premier carré, la partie restante soit une fonction du premier degré à deux variables; ceci revient à dire que la partie du second degré dans l'équation proposée est un carré parfait, ce qui exige que l on ait

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''} = 0.$$

Ces relations expriment que l'équation du troisième degré en S a une racine double égale à zéro. Six points déterminent un cylindre parabolique.

**880 *bis*.** Il résulte de ce que nous avons vu précédemment (n° 510) que le signe du discriminant D reste le même quel que soit le système d'axes auquel on rapporte la surface, et quel que soit le facteur par lequel on multiplie tous les coefficients de l'équation de la surface. La signification géométrique de ce signe est la suivante :

Si $D > 0$, la surface est entièrement imaginaire ou admet deux systèmes de génératrices (ellipsoïde imaginaire, hyperboloïde à une nappe, paraboloïde hyperbolique).

Si $D < 0$, la surface est convexe (ellipsoïde réel, hyperboloïde à deux nappes, paraboloïde elliptique).

Si $D = 0$, la surface est développable (cône, cylindre ou système de plans).

En effet, supposons la surface réelle et prenons pour origine un point quelconque de la surface, pour plan des $xy$ le plan tangent, pour axe des $z$ la normale : alors l'équation devient

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2C''z = 0$$

et l'on a

$$D = C''^2 (B''^2 - AA').$$

D'autre part la section de la surface par le plan tangent $z = 0$ se compose des deux droites ayant pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy = 0.$$

Si donc D est positif, ces droites sont réelles et distinctes et, par chaque point de la surface, il passe deux génératrices ; si, au contraire, D est négatif, ces droites sont imaginaires et la surface n'admet pas de génératrices ; elle est convexe.

Nous avons supposé la surface réelle ; si elle est imaginaire son équation peut se mettre sous la forme (n° 511)

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + H = 0$$

où S, S′, S″, H ont le même signe; alors le discriminant D = SS′S″H est positif. Donc, lorsque D est positif ou bien la surface est entièrement imaginaire, ou bien elle est réelle et, dans ce cas, elle admet deux systèmes de génératrices.

**581.** Pour qu'une droite soit située entièrement sur une surface de l'ordre $m$, il faut, comme nous l'avons vu au n° 551, que l'équation résultant de l'élimination de $x$ et $y$ entre les équations de la droite et celle de la surface soit vérifiée quelle que soit $z$, ce qui donne $m+1$ relations entre les paramètres variables de la surface. On arrive à la même conclusion, d'une autre manière, en observant que, pour que la droite appartienne à la surface, il faut et il suffit que les coordonnées de $m+1$ de ses points vérifient l'équation de cette surface. En particulier, si la surface est du second degré, une droite équivaut à trois points et trois droites déterminent la surface. Si, parmi les points donnés, quatre ou un plus grand nombre sont sur une même droite, ces points ne devront être comptés que pour trois.

Trois droites quelconques définissent un hyperboloïde à une nappe. Deux droites quelconques et deux points définissent un paraboloïde hyperbolique. Cinq droites passant par un même point définissent un cône du second degré; car les points où ces cinq droites percent un plan déterminent une courbe du second degré qui, avec le sommet, définit le cône.

**582.** Théorème I. *Par neuf points donnés, non situés dans un même plan, on peut toujours faire passer au moins une surface du second ordre.*

Il suffit de répéter ici le raisonnement du n° 275. En écrivant que la surface représentée par l'équation (1) passe par les neuf points donnés, on a neuf équations homogènes et du premier degré entre les dix coefficients inconnus A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″, F; d'après le principe établi au n° 274, ces équations sont vérifiées par une infinité de systèmes de valeurs des

inconnues, dont l'une au moins est différente de zéro. Dans aucune de ces solutions, les huit premières inconnues ne sont nulles à la fois ; car alors on aurait aussi $F = 0$. Nous remarquons en outre que les six premières inconnues ne peuvent être nulles à la fois ; car l'équation (1) se réduirait au premier degré et représenterait un plan passant par les neuf points donnés. En attribuant aux dix coefficients les valeurs qui constituent l'une des solutions précédentes, on a une surface du second degré passant par les neuf points donnés.

On obtient immédiatement l'équation de la surface à l'aide d'un déterminant (n° 276).

**583. Théorème II.** ***Par la ligne d'intersection de deux surfaces du second ordre, et un point, on peut faire passer une surface du second ordre et une seule.***

Soient $S = 0$, $S_1 = 0$ les équations de deux surfaces du second ordre ; l'équation $S - k S_1 = 0$, dans laquelle $k$ est un paramètre arbitraire, représente une surface du second ordre passant par la courbe gauche du quatrième ordre, intersection des deux premières ; or on peut déterminer le paramètre $k$ de manière que cette surface passe par un point M pris à volonté dans l'espace. Ainsi, par la ligne d'intersection des deux surfaces données et le point M, on peut toujours faire passer une surface du second degré.

D'ailleurs il est facile de démontrer qu'on n'en peut faire passer qu'une. En effet, un plan quelconque passant par le point M coupe les deux surfaces S et $S_1$ suivant deux coniques ; ces deux coniques, situées dans un même plan, ont quatre points communs ; ces quatre points et le point M déterminent une conique qui doit appartenir à la surface cherchée ; puisque chacun des plans menés par le point M coupe les surfaces cherchées suivant une même conique, il ne peut y avoir deux surfaces différentes remplissant les conditions énoncées.

Il résulte de là que l'on peut regarder l'équation

$$(2) \qquad S - kS_1 = 0$$

comme l'équation générale des surfaces du second ordre qui

passent par la ligne d'intersection des deux surfaces $S=0$, $S_1=0$.

**584.** Corollaire. Considérons les deux coniques suivant lesquelles une surface du second ordre $S=0$ est coupée par deux plans $\alpha=0$ et $\beta=0$; l'équation $\alpha\beta=0$ définissant une surface du second ordre, l'équation

$$(3)\qquad S-k\alpha\beta=0$$

représente toutes les surfaces du second ordre qui passent par ces deux coniques.

De même l'équation

$$(4)\qquad \alpha\beta-k\gamma\delta=0$$

représente toutes les surfaces du second ordre qui passent par les quatre droites d'intersection des deux systèmes de plans $\alpha\beta=0$, $\gamma\delta=0$. Ces quatre droites forment un quadrilatère gauche.

**585.** Théorème III. *Lorsque deux coniques situées dans des plans différents ont deux points communs, on peut par ces deux coniques faire passer une infinité de surfaces du second ordre.*

Si l'on prend sur chacune des deux coniques trois autres points, on a en tout huit points par lesquels, d'après le théorème I, on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre. Considérons l'une de ces surfaces; les plans des deux coniques coupent cette surface suivant deux coniques ayant chacune cinq points communs avec l'une des coniques données, et, par conséquent, coïncidant avec celles-ci. Il résulte d'ailleurs de ce qui précède qu'un point extérieur suffit pour déterminer la surface.

**586.** Théorème IV. *Lorsque deux surfaces du second ordre ont cinq points communs situés dans un même plan, la ligne d'intersection des deux surfaces se compose de deux courbes planes.*

Supposons que les deux surfaces S et $S_1$ aient cinq points communs situés dans un même plan P; ces cinq points déterminent une conique C qui appartient aux deux surfaces. Prenons trois autres points communs non situés dans le plan P; le plan P' qui passe par ces trois points coupe la conique C en deux points qui, avec les trois précédents, déterminent une

conique C′ appartenant aussi aux deux surfaces. Les deux surfaces ne peuvent avoir un point commun non situé sur les coniques C et C′, sans quoi elles coïncideraient, en vertu du théorème précédent. La ligne d'intersection se compose donc des deux coniques C et C′.

**587.** Corollaire. *Une sphère passant par une section circulaire d'une surface du second ordre coupe la surface suivant un second cercle.* Car, dans ce cas, la ligne d'intersection de la surface et de la sphère se compose de deux courbes planes.

D'après cela, toute section circulaire dont le plan passe par le centre de la surface appartient à une sphère concentrique coupant la surface suivant deux courbes planes. On obtient donc tous les plans cycliques passant par le centre, en cherchant les sphères concentriques qui coupent la surface suivant deux courbes planes. C'est la méthode analytique suivie au n° 517. Pour chaque sphère, le système des deux plans cycliques est représenté par une équation homogène et du second degré en $x$, $y$, $z$.

**588.** Théorème V. *Quand deux surfaces du second ordre se touchent en deux points, elles se coupent suivant deux courbes planes, sauf dans un cas exceptionnel.*

Considérons deux surfaces du second ordre qui se touchent en deux points $a$ et $b$. Soit $c$, un troisième point c ommun aux deux surfaces; par les trois points $a$, $b$, $c$ faisons passer un plan P, ce plan coupera chacune des surfaces suivant une conique; ces deux coniques ont trois points communs $a$, $b$, $c$ et les mêmes tangentes en deux points $a$ et $b$; donc elles se confondent (n° 280). Puisque le plan P coupe les deux surfaces suivant la même courbe, il résulte du théorème IV que la ligne d'intersection des deux surfaces est formée de deux coniques.

La démonstration précédente suppose que les plans tan gents en $a$ et en $b$ ne se coupent pas suivant la droite $ab$. Si ce cas exceptionnel se présente, la droite $ab$ fait partie de l'intersection, car elle coupe chacune des surfaces en quatre points, deux confondus en $a$ et deux en $b$; elle est donc tout

entière sur chacune des deux surfaces. L'intersection totale des deux surfaces, devant être une courbe gauche du quatrième ordre, se compose alors de la droite *ab* et d'une courbe gauche du troisième ordre nommée *cubique gauche* qui rencontre *ab* en *a* et *b*.

Dans des cas plus particuliers encore, cette cubique gauche peut à son tour se décomposer en une droite et une conique ou en trois droites. Ainsi, lorsque les deux surfaces ont en commun une deuxième génératrice *cd* de système différent de *ab*, c'est-à-dire dans un même plan avc *ab*, elles se coupent suivant une première courbe plane formée par les deux droites *ab* et *cd* : le restant de l'intersection est alors une deuxième courbe plane, c'est-à-dire une conique qui peut d'ailleurs être décomposée en droites (th. IV).

Lorsque les deux surfaces ont en commun, outre *ab*, une génératrice *a'b'* du même système que *ab*, le restant de l'intersection est une courbe du second ordre qui ne peut pas être plane, car, si elle l'était (th. IV), les deux droites *ab* et *a'b'* seraient dans un même plan : le restant de l'intersection est donc formé de deux droites *cd* et *c'd'* non situées dans un même plan : ces deux génératrices *cd* et *c'd'* appartiennent à un même système différent de celui auquel appartiennent *ab* et *a'b'*, car deux surfaces ayant quatre et même trois génératrices communes d'un même système coïncident (546, 566 et 581).

**589.** Théorème VI. *Lorsque deux surfaces de second ordre se touchent en trois points non situés en ligne droite, elles se raccordent le long d'une ligne plane, sauf dans un cas exceptionnel.*

Considérons deux surfaces de second ordre qui se touchent en trois points *a*, *b*, *c*; ces surfaces n'ont pas de point commun en dehors du plan P déterminé par les points *a*, *b*, *c*; car, si elles avaient un point commun *d* en dehors du plan, P d'après le théorème V, chacun des trois plans *dab*, *dbc*, *dca* couperait les deux surfaces suivant la même conique, ce qui est impossible. Les deux surfaces sont coupées par le plan P suivant une même conique C; il est aisé de

voir qu'elles ont le même plan tangent en chaque point $m$ de la courbe. En effet, le plan P a même pôle par rapport aux deux surfaces puisque ce pôle $p$ est à l'intersection des plans tangents en $a$, $b$ et $c$. En un point quelconque $m$ de la conique C, le plan tangent à chacune des deux surfaces doit contenir la tangente en $m$ à C et passer par le point $p$; les deux surfaces sont donc tangentes en $m$. On dit qu'elles se raccordent le long de la conique C.

Cette démonstration suppose qu'aucun des trois plans tangents communs en $a$, $b$ et $c$ ne coïncide avec le plan $abc$. Si le plan tangent en un point, $a$ par exemple, coïncidait avec $abc$, les deux droites $ab$ et $ac$ feraient partie de l'intersection, car la droite $ab$, couperait chacune des surfaces en trois points, deux confondus en $a$ et un placé en $b$; elle serait donc tout entière sur chaque surface : de même pour $ac$. Les deux surfaces ayant alors en commun la conique formée par les deux droites $ab$ et $ac$ se coupent suivant une deuxième conique C qui rencontre la première $ab$, $ac$ aux points $b$ et $c$.

**590.** Corollaire I. Nous avons vu que l'équation $S-k\alpha\beta=0$ représente une surface du second degré qui passe par les courbes d'intersection de la surface $S=0$ avec les plans $\alpha=0$, $\beta=0$. Il en résulte que les surfaces représentées par l'équation

$$S-k\alpha^2=0 \tag{5}$$

sont tangentes à la surface S suivant la courbe d'intersection C de cette surface et du plan $\alpha$.

L'équation (5) renferme un paramètre arbitraire $k$ qui permet de faire passer la surface par un point arbitraire; d'autre part on démontre, comme au n° 583, qu'une surface qui doit être tangente à une surface du second ordre en tous les points d'une courbe plane et passer par un point donné est complètement déterminée. On peut donc regarder l'équation (5) comme l'équation générale des surfaces du second ordre qui se raccordent avec la surface S le long de la conique déterminée par le plan $\alpha$.

**591.** Corollaire II. Deux coniques C et C', tracées sur une même surface du second ordre S, se coupent en deux

points $a$ et $b$; la corde $ab$ est la droite d'intersection des plans des deux coniques; il en résulte que deux surfaces du second ordre, qui se raccordent avec la première surface suivant deux coniques C et C', se touchent en deux points $a$ et $b$, et par conséquent, en vertu du théorème V, se coupent suivant deux courbes planes. Les équations des deux surfaces étant de la forme

$$S - k\alpha^2 = 0, \quad S - k'\alpha'^2 = 0,$$

les deux coniques qui composent la ligne d'intersection sont situées dans les plans $k\alpha^2 = k'\alpha'^2$.

892. Cherchons, comme application, l'équation du cône circonscrit à un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{6}$$

et ayant pour sommet un point donné $p$ dont les coordonnées sont $x_1$, $y_1$, $z_1$. Le plan de contact ayant pour équation

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} - 1 = 0,$$

l'équation générale des surfaces du second degré qui se raccordent avec l'ellipsoïde suivant la conique déterminée par ce plan est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - k\left(\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} - 1\right)^2 = 0.$$

Si l'on prend $k$ de manière que l'équation précédente soit vérifiée par les coordonnées $x_1, y_1, z_1$ du point $p$, elle représentera le cône circonscrit, puisqu'il n'existe qu'une surface du second degré tangente à l'ellipsoïde suivant la courbe considérée et passant par le point $p$; on obtient ainsi l'équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} - 1\right)^2 = 0. \tag{7}$$

893. Si l'on pose, pour abréger,

$$H = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1,$$

l'équation précédente, développée, devient

$$\left(H - \frac{x_1^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(H - \frac{y_1^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2} + \left(H - \frac{z_1^2}{c^2}\right)\frac{z^2}{c^2} \tag{8}$$

$$- 2\frac{y_1 z_1}{b^2 c^2} yz - 2\frac{z_1 x_1}{c^2 a^2} zx - 2\frac{x_1 y_1}{a^2 b^2} xy + 2\frac{x_1 x}{a^2} + 2\frac{y_1 y}{b^2} + 2\frac{z_1 z}{c^2} - H - 1 = 0.$$

La condition (6) du n° 478, donne le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde (6) et capables d'un angle trièdre trirectangle inscrit; ce lieu est l'ellipsoïde

$$(9) \qquad (b^2+c^2)x_1^2 + (c^2+a^2)y_1^2 + (a^2+b^2)z_1^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2.$$

La condition (7) du même numéro 478, donne le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde (6) et capables d'un angle trièdre trirectangle circonscrit; ce lieu est la sphère

$$(10) \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

que nous avons déjà trouvée au n° 518.

Nous ferons remarquer que chacun des points de la surface de cette sphère est le sommet d'une infinité d'angles trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde; c'est pourquoi, dans le calcul du n° 518, on a pu éliminer les neuf cosinus entre les équations des trois plans tangents et les six relations qui existent entre ces cosinus. En général, le lieu des sommets des angles trièdres trirectangles circonscrits à une surface donnée est un volume.

De même, chacun des points de l'ellipsoïde (9) est le sommet d'une infinité d'angles trièdres trirectangles ayant leurs arêtes tangentes à l'ellipsoïde proposé.

**594.** THÉORÈME VII. *Lorsque deux surfaces du second ordre admettent le même plan diamétral pour une certaine série de cordes parallèles, la projection de la ligne d'intersection sur ce plan, parallèlement aux cordes, est une conique.*

On sait que l'élimination de $z$ entre deux équations du second degré à trois inconnues $x$, $y$, $z$ conduit, en général, à une équation du quatrième degré entre $x$ et $y$. Ainsi la ligne d'intersection de deux surfaces du second degré se projette généralement sur un plan suivant une courbe du quatrième degré. Certains cas font exception. Considérons deux surfaces du second degré qui ont le même plan diamétral pour une même série de cordes; si l'on prend ce plan diamétral pour plan des $xy$ et une parallèle aux cordes pour axe des $z$, les équations des deux surfaces auront la forme $Az^2+C=0$, $A'z^2+C'=0$, C et C' désignant deux polynômes du second degré qui ne renferment que les deux variables $x$ et $y$, A et A' deux constantes. L'élimination de $z$ entre les deux équations précédentes donne une équation du second degré $A'C - AC' = 0$. C'est l'équation de la projection de la ligne d'intersection des deux surfaces sur le plan diamétral. Lorsque les deux surfaces ont une droite

commune, la ligne d'intersection des deux surfaces se projette sur un plan quelconque suivant une ligne droite et une courbe du troisième degré,

595. Théorème VIII. *Par la ligne d'intersection de deux surfaces du second ordre passent quatre cônes du second degré.*

Soient

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad , \quad \varphi(x, y, z, t) = 0 \tag{11}$$

les équations des deux surfaces, rendues homogènes. L'équation

$$kf + \varphi = 0, \tag{12}$$

dans laquelle $k$ est un paramètre arbitraire, représente toutes les surfaces du second degré qui passent par la ligne d'intersection des deux premières. On exprime que cette surface est un cône (n° 579) en égalant à zéro le déterminant des quatre équations homogènes et du premier degré

$$\begin{cases} kf'_x + \varphi'_x = 0, \\ kf'_y + \varphi'_y = 0, \\ kf'_z + \varphi'_z = 0, \\ kf'_t + \varphi'_t = 0. \end{cases} \tag{13}$$

On obtient ainsi une équation du quatrième degré en $k$; on en conclut que par la ligne d'intersection des deux surfaces données passent quatre cônes, réels ou imaginaires.

596. Corollaire. *Par deux coniques situées dans des plans différents et qui se coupent en deux points, passent deux cônes du second degré.*

On peut considérer les deux coniques comme la ligne d'intersection d'une surface du second ordre $f = 0$ et du système de deux plans $\varphi = xy = 0$. Les deux dernières des équations (13) se réduisant à $kf'_z = 0$, $kf'_t = 0$, le déterminant contient $k^2$ en facteur. A la racine double $k = 0$ correspond le système des plans des deux coniques. Après la suppression de ce facteur, l'équation du second degré en $k$ donne deux cônes.

**897.** L'intersection de deux surfaces de second ordre $S=o$, $S'=o$ est, en général, une courbe gauche du quatrième ordre que l'on nomme *biquadratique gauche*. Cette courbe est telle que, par un point A de l'espace, on peut mener deux droites (réelles ou imaginaires) s'appuyant chacune en deux points sur la courbe. En effet, parmi les surfaces du second ordre $S+\lambda S'=o$ qui passent par la biquadratique gauche, il s'en trouve une qui passe par le point A; sur cette surface particulière on peut mener deux génératrices réelles ou imaginaires par le point A : chacune d'elles rencontre la courbe en deux points qui sont les points où elle rencontre l'une ou l'autre des deux surfaces $S=o$, $S'=o$.

Il est important de remarquer qu'il existe d'*autres courbes gauches du quatrième ordre;* ces courbes sont unicursales et s'obtiennent comme il suit. Sur une surface de troisième ordre $S_3$ prenons deux droites $G_1$ et $G_2$ non situées dans un même plan et faisons passer par ces deux droites une surface du second ordre $S_2$. L'intersection des deux surfaces $S_3$ et $S_2$ est une courbe gauche du sixième ordre formée des deux droites $G_1$, et $G_2$ et d'une courbe gauche C du quatrième ordre. Les génératrices G de la surface du second ordre $S_2$ qui sont du même système que $G_1$ et $G_2$ rencontrent la courbe C en trois points qui sont les points où ces génératrices rencontrent la surface $S_3$; les génératrices de $S_2$ de l'autre système rencontrent la courbe C en un seul point, car elles rencontrent la surface $S_3$ en trois points dont deux sont situés sur les droites $G_1$ et $G_2$. Il résulte de là que la courbe C n'est pas une *biquadratique gauche*, car la surface $S_2$ est la seule surface du second ordre passant par la courbe. En effet, soit $S'_2$ une surface du second ordre passant par C, toutes les génératrices de $S_2$ du système G rencontrent la courbe, c'est-à-dire $S'_2$, en trois points; elles appartiennent dans toute leur étendue à la surface $S'_2$ qui, par suite, coïncide avec $S_2$.

**898.** *Note sur les sections circulaires.*

Soit une surface du second ordre ayant pour équation en coordonnées rectangulaires

$$f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0$$

où $\varphi(x, y, z)$ désigne l'ensemble des termes du second degré

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Nous allons démontrer que cette surface admet en général six plans de sections circulaires qui sont parallèles aux plans que représente l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z) - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

quand on y remplace S par l'une des racines de l'équation en S; parmi ces six plans *deux seulement sont réels* à savoir ceux que l'on obtient en prenant pour S la *racine moyenne* de l'équation en S.

En effet, considérons un cercle situé sur une surface du second ordre ayant pour équation $f(x, y, z) = 0$, et par ce cercle faisons passer une sphère ayant pour équation $\Sigma = 0$; la surface et la sphère ayant en commun une courbe plane auront en commun une deuxième courbe plane, qui sera nécessairement un cercle comme étant une section plane d'une sphère. Appelons

$$lx + my + nz + p = 0 \quad \text{et} \quad l'x + m'y + n'z + p' = 0$$

les équations des plans de ces deux cercles; on aura identiquement pour une valeur convenable de S

$$f(x, y, z) - S\Sigma = (lx + my + nz + p)(l'x + m'y + n'z + p'),$$

ou, en prenant dans cette identité les termes du second ordre

$$(2) \quad \varphi(x,y,z) - S(x^2 + y^2 + z^2) = (lx + my + nz)(l'x + m'y + n'z).$$

La valeur de S doit donc être choisie de façon à annuler le discriminant de la forme quadratique

$$\varphi(x,y,z) - S(x^2 + y^2 + z^2),$$

en d'autres termes la valeur de S est racine de l'équation en S.

Réciproquement, si l'on remplace S par l'une des racines S', S'', S''' de l'équation en S, l'équation (1) représente deux plans qui sont des plans de sections circulaires. En effet l'on aura alors l'identité (2) qui peut s'écrire

$$\varphi(x, y, z) = S(x^2 + y^2 + z^2) + (lx + my + nz)(l'x + m'y + n'z)$$

et en ajoutant $2Cx + 2C'y + 2C''z + F$ aux deux membres

$$f(x, y, z) = S(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F$$
$$+ (lx + my + nz)(l'x + m'y + n'z)$$

identité qui montre que la surface $f(x, y, z) = 0$ passe par les deux cercles suivant lesquels les plans

$$lx + my + nz = 0, l'x + m'y + n'z = 0$$

coupent la sphère

$$(3) \qquad S(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0;$$

ces plans sont donc bien des plans de sections circulaires.

Enfin les plans ainsi obtenus ne sont réels que si l'on remplace S par la racine moyenne de l'équation en S. En effet, si l'on fait tourner les axes coordonnés de façon à prendre pour axes OX, OY, OZ les axes du cône des directions asymptotiques $\varphi(x, y, z) = 0$, la fonction $\varphi(x, y, z)$ deviendra $S'X^2 + S''Y^2 + S'''Z^2$ (n° 506) et l'équation (1) deviendra

$$S'X^2 + S''Y^2 + S'''Z^2 - S(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$$

qui ne représente deux plans réels que si l'on fait S égal à la racine moyenne S″ en supposant $S' > S'' > S'''$.

On appliquera cette méthode pour retrouver les plans de section circulaires de l'ellipsoïde, des deux hyperboloïdes, du paraboloïde elliptique. Si on l'appliquait au paraboloïde hyperbolique, on trouverait des plans parallèles aux plans directeurs : la racine moyenne serait alors *nulle,* la sphère (3) se réduirait à un plan, et les section à des droites.

Enfin, comme exercice, on cherchera les sections circulaires de la surface représentée par l'équation

$$z^2 + 2axy = 0$$

suivant les différentes valeurs de la constante $a$.

## EXERCICES.

1° On mène des normales à un ellipsoïde par les différents points d'une section plane; trouver le lieu des traces de ces normales sur l'un des plans principaux. Examiner le cas où le plan de la section est perpendiculaire à un plan principal.

2° Étant donné un ellipsoïde, on mène des plans diamétraux qui coupent le solide suivant une ellipse d'aire constante; trouver le lieu: 1° de la perpendiculaire menée par le centre à ce plan; 2° du diamètre conjugué.

3° L'œil étant placé en un point de la surface d'un ellipsoïde, les perspectives de toutes les sections planes de la surface sur un plan diamétral conjugué du rayon qui aboutit à l'œil sont des courbes homothétiques; le centre de chacune d'elles est la perspective du sommet du cône circonscrit à l'ellipsoïde suivant la section plane considérée.

4° Démontrer que le lieu de la droite d'intersection de deux plans rectangulaires, menés par deux droites données, est un hyperboloïde à une nappe dont les sections circulaires sont perpendiculaires à chacune des deux droites données.

5° Un cône a pour sommet un point d'un hyperboloïde de révolution à une nappe engendré par une hyperbole équilatère, et pour base le cercle de gorge; démontrer que les sections antiparallèles de ce cône sont perpendiculaires au plan du cercle de gorge.

6° Les quatre perpendiculaires abaissées des sommets d'un tétraèdre sur les faces opposées sont situées sur un hyperboloïde à une nappe. Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, le centre de gravité du tétraèdre et le centre de l'hyperboloïde sont en ligne droite.

7° Trouver le lieu des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux à deux droites données soit constant. Déterminer ensuite, pour une surface du second degré susceptible de ce mode de génération, les divers couples de droites que l'on peut employer.

8° Le lieu des normales à une surface réglée quelconque le long d'une même génératrice est un paraboloïde hyperbolique.

9° Étant donnés un point et deux plans rectangulaires, trouver le lieu des points tels que la distance de chacun d'eux au point fixe soit moyenne proportionnelle entre ses distances aux deux plans fixes.

10° Déterminer la ligne de striction pour chacun des systèmes de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique.

11° Trouver l'équation du cône qui a pour sommet le centre d'un

hyperboloïde à une nappe et pour directrices les lignes de striction des deux systèmes de génératrices.

12° Par un point O pris sur l'arête d'un angle dièdre, on mène dans l'une des faces une droite OA et dans la seconde face une droite OB perpendiculaire à OA; trouver le lieu de la perpendiculaire menée par le point O au plan AOB.

13° Étant donnés un cercle et deux points fixes A et B dans l'espace, par le point B et la droite des contacts relative à un point quelconque P du plan du cercle, on mène un plan; trouver le lieu du point d'intersection de ce plan avec la droite AP.

14° Lorsque deux surfaces du second degré passent par deux droites non situées dans un même plan, l'intersection des deux surfaces se compose de ces droites et de deux autres droites, réelles ou imaginaires.

15° Lorsque deux surfaces du second degré se raccordent suivant une même génératrice, il y a, en général, sur cette génératrice deux points tels que la seconde génératrice qui passe par chacun d'eux est la même sur les deux surfaces.

16° Les perspectives sur un même plan des sections planes d'une surface du second degré ont un double contact réel ou imaginaire avec le contour de la surface.

17° Deux surfaces du second degré qui ont les mêmes plans principaux sont dites homofocales, lorsque leurs sections principales admettent les mêmes foyers, réels ou imaginaires; ainsi l'équation

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=1,$$

dans laquelle $\lambda$ désigne un paramètre arbitraire, représente toutes les surfaces homofocales à la surface $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$. Démontrer que par un point donné passent trois surfaces du second degré, homofocales à une surface donnée; de ces trois surfaces, l'une est un ellipsoïde, la seconde un hyperboloïde à une nappe, la troisième un hyperboloïde à deux nappes.

18° Les équations

$$\frac{x^2}{a^2-p^2}+\frac{y^2}{b^2-p^2}+\frac{z^2}{c^2-p^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}+\frac{z^2}{c^2-q^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-r^2}+\frac{y^2}{b^2-r^2}+\frac{z^2}{c^2-r^2}=1,$$

dans lesquelles on suppose $a>b>c, p<c, c<q<b, b<r<a$, représentent des surfaces homofocales : la première est un ellipsoïde, la seconde un hyperboloïde à une nappe, la troisième un hyperboloïde à

deux nappes. Démontrer : 1° que ces surfaces se coupent deux à deux à angle droit; 2° que les deux courbes suivant lesquelles une des surfaces est coupée par les deux autres ont pour tangentes en leur point d'intersection des droites parallèles aux axes de la section faite dans la première surface par un plan parallèle au plan tangent en ce point.

19° A un ellipsoïde donné on circonscrit un cône ayant pour sommet un point donné; démontrer que les trois axes de ce cône sont les normales aux surfaces homofocales à l'ellipsoïde proposé et passant par le point donné.

20° Étant données deux surfaces homofocales, trouver une surface de révolution du second degré ayant pour axe l'un des axes de ces surfaces et à laquelle appartienne la ligne d'intersection.

21° Étant donnés les paraboloïdes homofocaux représentés par l'équation

$$\frac{y^2}{p-\lambda}+\frac{z^2}{q-\lambda}=2x-\lambda,$$

dans laquelle $\lambda$ est un paramètre arbitraire; si l'on attribue au paramètre $\lambda$ deux valeurs telles que les paraboloïdes correspondants se coupent, ils se couperont à angle droit. Lorsqu'un paraboloïde est coupé par deux autres d'espèces différentes, les tangentes aux deux lignes d'intersection au point commun sont parallèles aux axes de la section faite dans la première surface par un plan parallèle au plan tangent en ce point.

22° Étant donnés deux paraboloïdes homofocaux, trouver une surface de révolution du second degré ayant pour axe l'axe commun des paraboloïdes et à laquelle appartienne la ligne d'intersection.

23° Étant données une surface du second ordre et deux droites tangentes à cette surface, trouver la surface engendrée par une droite qui glisse sur les deux droites données en restant tangente à la surface donnée.

24° Trouver le lieu du sommet d'un angle trièdre circonscrit à un ellipsoïde, et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'un autre ellipsoïde.

25° Trouver le lieu du sommet d'un cône de révolution circonscrit à un ellipsoïde donné.

26° Par les divers points d'une section plane d'un cône de révolution on mène des normales à la surface; trouver le lieu du second point de rencontre de chacune des normales avec la surface.

27° Une droite se meut de telle sorte que trois de ses points restent dans trois plans fixes; quel est le lieu décrit par un point quelconque de la droite mobile ?

28° Un cône a son sommet au centre d'un ellipsoïde et pour base la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et d'une sphère concentrique; tout

plan tangent au cône coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont l'arête de contact est l'un des axes.

29° On coupe l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ par le plan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0;$$

démontrer que les axes de la section sont déterminés par l'équation

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0,$$

dans laquelle $2r$ désigne la longueur de l'un des axes.

30° Deux surfaces du second degré qui se touchent en deux points peuvent être inscrites dans un même cône du second degré.

31° Deux ellipsoïdes se touchent suivant une courbe plane; on mène un plan tangent à l'un des ellipsoïdes parallèlement aux sections circulaires de cet ellipsoïde; ce plan coupe l'autre ellipsoïde suivant une ellipse dont l'un des foyers est au point de contact.

32° Étant données deux coniques concentriques dont les axes ont les mêmes directions, trouver le lieu d'un point tel que les cônes qui ont ce point pour sommet, et pour directrices les deux coniques, soient égaux entre eux.

33° Par le centre O d'un ellipsoïde on fait passer un plan sécant quelconque P, qui coupe la surface suivant une ellipse, et au point O on élève une perpendiculaire au plan P sur laquelle on porte des longueurs $om$, $om'$, égales aux deux axes de l'ellipse E; trouver l'équation de la surface décrite par les deux points $m$ et $m'$ et étudier la forme de cette surface. On déterminera, en particulier, les points par lesquels passent plusieurs nappes de la surface et les cônes tangents à la surface en ces points, les plans qui touchent la surface en plusieurs points et les cônes qui ont leur sommet au centre de l'ellipsoïde et dont les directrices sont les courbes formées par les points de contact avec un même plan tangent.

34° Trouver le lieu des centres des surfaces du second degré tangentes à sept plans donnés.

35° Trouver le lieu des centres des ellipsoïdes tangentes à six plans donnés et tels que la somme des carrés de leurs axes soit égale à une quantité donnée.

36° Une courbe située sur un ellipsoïde est telle que la surface réglée formée par les normales en ses différents points coupe un plan principal suivant un cercle de rayon donné; démontrer que la projection de cette courbe sur le plan principal est une ellipse d'aire donnée.

37° Les deux surfaces $z-xy=0$, $z^2-y^3=0$ se coupent suivant une courbe gauche du quatrième ordre qui n'est pas une *biquadratique gauche*. Démontrer

1° Que cette courbe est unicursale.

2° Que les génératrices de l'un des systèmes du paraboloïde $z - xy = 0$ rencontrent la courbe en trois points, celles du second système en un seul point.

38° On coupe la courbe de l'exercice précédent par un plan quelconque; démontrer que les abscisses des points d'intersection sont telles que la somme de leurs produits deux à deux est *nulle*. Former l'équation du plan osculateur à la courbe en un point d'abscisse $x$. Démontrer que les points de contact des plans osculateurs menés à la courbe par un point P de l'espace sont sur un plan passant par P.

39° Étant données deux droites D et D' dans l'espace on désigne par $\delta$ et $\delta'$ les distances d'un même point M à ces deux droites. Trouver le lieu géométrique des points M pour lesquels on a

$$\alpha\delta^2 + \beta\delta'^2 = \gamma$$

$\alpha, \beta, \gamma$ désignant des constantes.

Le lieu est une surface du second ordre. *Réciproquement*, une surface du second ordre étant donnée, chercher si elle peut être définie de cette façon et, dans le cas de l'affirmative, déterminer les droites D et D' et les coefficients $\alpha, \beta, \gamma$.

Pour qu'une surface du second ordre puisse être engendrée de cette façon, il faut que l'une des racines de l'équation en S correspondante soit égale à la somme des deux autres.

40° Lieu géométrique des sommets des cônes qui passent par une parabole donnée et qui admettent un système de plans de sections circulaires *rectangulaires*.

### COMPLEXES DE DROITES

**599.** Les équations d'une droite dans l'espace étant mises sous la forme

$$(1) \qquad x = az + a', \quad y = bz + b'$$

on peut appeler les quatre coefficients $a, b, a', b'$ les *coordonnées* de la droite : à chaque système de valeurs de ces quatre coefficients répondra une seule droite et inversement à chaque droite répondra un seul système de valeurs des quatre *coordonnées* $a, b, a', b'$.

Si l'on établit une relation

$$(2) \qquad F(a, b, a', b') = 0$$

entre ces quatre coordonnées, les droites (1) dont les coordonnées vérifient cette relation forment ce que l'on appelle un

*complexe de droites* et l'équation (2) est dite l'équation du complexe.

Exemple : La condition nécessaire et suffisante pour que la droite (1) soit tangente à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

s'exprimant par la relation unique

$$(3) \qquad (aa' + bb')^2 - (a^2 + b^2 + 1)(a'^2 + b'^2 - R^2) = 0,$$

on dira que les droites tangentes à la sphère forment un complexe, et l'équation (3) sera appelée l'équation de ce complexe.

**600.** Au lieu de définir une droite à l'aide de quatre coordonnées $a, b, a', b'$ il est plus commode d'introduire avec Plücker le système suivant de coordonnées.

Pour définir une droite prenons sur elle deux points

$$M'(x', y', z') \text{ et } M''(x'', y'', z'');$$

les équations de cette droite seront

$$\frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''} = \frac{z - z'}{z' - z''}$$

et ses projections sur les plans coordonnées auront pour équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \beta z - \gamma y = p \\ \gamma x - \alpha z = q \\ \alpha y - \beta x = r \end{cases}$$

en posant

$$(5) \qquad \alpha = x' - x'', \quad \beta = y' - y'', \quad \gamma = z' - z''$$
$$p = y'z'' - z'y'', \quad q = z'x'' - x'z'', \quad r = x'y'' - y'x''.$$

Les six coefficients

$$\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$$

seront les *coordonnées* de la droite d'après Plücker. Ces six coordonnées sont liées par la relation identique

$$(6) \qquad p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$$

ainsi qu'on le vérifie immédiatement.

Si l'on remplace les deux points M' et M'' par deux autres

points pris sur la même droite, les six coordonnées (5) ne font que varier proportionnellement. Ce fait qu'il serait facile de vérifier directement résulte de ce que les équations (4) des projections de la droite sur les plans de coordonnées ne doivent pas changer. Inversement si l'on a six nombres

$$\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$$

dont les trois premiers ne sont pas tous nuls et qui vérifient la relation (6), ces six nombres définissent une droite et une seule qui reste la même quand les six nombres varient proportionnellement. En effet, si la condition (6) est remplie sans que $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ soient nuls tous trois, les équations

$$\begin{aligned} \beta z - \gamma y &= p \\ \gamma x - \alpha z &= q \\ \alpha y - \beta x &= r \end{aligned}$$

représentent trois plans passant par une même droite, car en multipliant la première de ces équations par $\alpha$, la deuxième par $\beta$, la troisième par $\gamma$ et ajoutant on obtient une identité. Ces trois équations définissent donc une droite et une seule qui ne change évidemment pas quand $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ varient proportionnellement.

Au lieu de définir une droite par deux de ses points, on peut la considérer comme l'intersection de deux plans P′ et P″ ayant pour équation

$$\begin{aligned} u'x + v'y + w'z + 1 &= 0 \\ u''x + v''y + w''z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les projections de la droite sur les plans de coordonnées auront alors pour équations

$$\begin{aligned} (u'w'' - w'u'')z - (v'u'' - u'v'')y &= u' - u'' \\ (v'u'' - u'v'')x - (w'v'' - v'w'')z &= v' - v'' \\ (w'v'' - v'w'')y - (u'w'' - w'u'')x &= w' - w'' \end{aligned}$$

En comparant avec les équations (4) on voit que l'on peut poser aussi

$$(7) \left\{ \begin{array}{lll} \alpha = w'v'' - v'w'', & \beta = u'w'' - w'u'', & \gamma = v'u'' - u'v'' \\ p = u' - u'', & q = v' - v'', & r = w' - w''. \end{array} \right.$$

On a ainsi par les équations (5) et (7) deux expressions différentes des coordonnées d'une droite, suivant que l'on considère la droite comme définie par deux points pris sur elle ou par deux plans passant par elle.

Remarque. Si l'on rend les équations (4) de la droite homogènes en remplaçant $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$, $\frac{x''}{t''}$, $\frac{y''}{t''}$, $\frac{z''}{t''}$ et chassant les dénominateurs, ces équations prennent la forme

$$\beta z - \gamma y = pt \quad , \quad \gamma x - \alpha z = qt \quad , \quad \alpha y - \beta x = rt$$

et les coordonnées de la droite ont pour expressions

$$(5)' \quad \begin{cases} \alpha = x't'' - t'x'' \quad , \quad \beta = y't'' - t'y'' \quad , \quad \gamma = z't'' - t'z'' \\ p = y'z'' - z'y'' \quad , \quad q = z'x'' - x'z'' \quad , \quad r = x'y'' - y'x''. \end{cases}$$

De même, si l'on prend les équations des deux plans P′ et P″ qui définissent la droite sous la forme homogène

$$u'x + v'y + w'z + h't = 0 \quad , \quad u''x + v''y + w''z + h''t = 0,$$

on aura

$$(7)' \quad \begin{matrix} \alpha = w'v'' - v'w'' \quad , \quad \beta = u'w'' - w'u'' \quad , \quad \gamma = v'u'' - u'v'' \\ p = u'h'' - h'u'' \quad , \quad q = v'h'' - h'v'' \quad , \quad r = w'h'' - h'w'' \end{matrix}$$

Ces formules permettent de supposer que l'un des points M′, M″ est à l'infini ou que l'un des plans P′, P″ passe par l'origine. Par exemple, si le point M′ est à l'infini on fera $t' = 0$, et si le plan P′ passe par l'origine on fera $h' = 0$.

Complexes. Comme les équations (4) d'une droite sont homogènes par rapport aux coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$, toutes les conditions géométriques imposées à une droite s'exprimeront par des relations homogènes entre ses six coordonnées.

L'ensemble des droites dont les coordonnées vérifient une relation homogène.

$$(8) \qquad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0 \quad ,$$

constitue un *complexe de droites;* l'équation (8) est l'équation du complexe, et le degré de cette équation s'appelle l'ordre du complexe

**601.** Exemple I. Les droites dont les coordonnées vérifient l'équation du premier degré

$$(9) \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma + Dp + Eq + Fr = 0,$$

où A, B, C, D, E, F sont des constantes, forment un complexe du *premier ordre*.

*Par un point de l'espace il passe une infinité de droites appartenant à ce complexe; toutes ces droites sont situées dans un même plan.* En effet appelons $M'(x', y', z',)$ un point fixe de l'espace et sur une droite du complexe passant par ce point prenons un point $M''(x'', y'', z'')$; les coordonnées de la droite seront alors données par les expressions (5) et comme cette droite appartient au complexe, ses coordonnées vérifient l'équation (9) qui devient

$$A(x'-x'') + B(y'-y'') + C(z'-z'') + D(y'z''-z'y'') + E(z'x''-x'z'') + F(x'y''-y'x'') = 0.$$

Cette équation étant du premier degré en $x'', y'', z''$ et étant évidemment satisfaite pour $x''=x'$, $y''=y'$, $z''=z'$, le lieu du point M″ et, par suite de la droite M′M″ est un plan passant par le point M′, ce que nous voulions établir.

Inversement, *dans un plan quelconque il existe une infinité de droites appartenant au complexe; toutes ces droites passent par un même point.* En effet appelons $(u', v', w')$ les coordonnées d'un plan fixe P′ et, par une droite du complexe située dans ce plan, menons un plan P″ de coordonnées $(u'', v'', w'')$; les coordonnées de la droite seront alors données par les expressions (7) et l'équation (9) deviendra

$$A(w'v''-v'w'') + B(u'w''-w'u'') + C(v'u''-u'v'') + D(u'-u'') + E(v'-v'') + F(w'-w'') = 0.$$

Cette équation étant du premier degré en $u'', v'', w''$ et étant vérifiée pour $u''=u'$, $v''=v'$, $w''=w'$, l'enveloppe du plan P″ et, par suite, de la droite d'intersection des plans P′ et P″ est un point situé dans le plan P′.

• Exemple II. Étudions le complexe formé par les droites D de l'espace qui sont *perpendiculaires à leurs conjuguées* par rapport à un ellipsoïde donné

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c^2}-1=0.$$

Soit D une droite du complexe ayant pour coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$. Prenons sur cette droite deux points $M'(x', y', z')$, $M''(x'', y'', z'')$; la droite D' conjuguée de D par rapport à l'ellipsoïde est l'intersection des plans polaires des deux points M' et M'', c'est-à-dire des deux plans

$$(D')\qquad \begin{aligned} &\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1=0\\ &\frac{xx''}{a^2}+\frac{yy''}{b^2}+\frac{zz''}{c^2}-1=0.\end{aligned}$$

Les cosinus directeurs de cette droite D' sont proportionnels aux quantités

$$\frac{y'z''-z'y''}{b^2c^2},\quad \frac{z'x''-x'z''}{c^2a^2},\quad \frac{x'y''-y'x''}{a^2b^2}.$$

c'est-à-dire à

$$\frac{p}{b^2c^2},\quad \frac{q}{c^2a^2},\quad \frac{r}{a^2b^2};$$

d'autre part les cosinus directeurs de la droite D sont proportionnels à

$$x'-x'',\quad y'-y''\quad z'-z'',$$

c'est-à-dire à

$$\alpha, \beta, \gamma.$$

Comme ces droites sont rectangulaires, on a la condition

$$(10)\qquad a^2\alpha p+b^2\beta q+c^2\gamma r=0$$

qui est l'équation d'*un complexe du second ordre* formé par les droites D.

*Le lieu de celles de ces droites* D *qui passent par un point fixe* $M'(x', y', z')$ *de l'espace est un cône du second ordre*. En effet, si par le point fixe M' on mène une droite D du complexe et si l'on prend un point $M''(x'', y'', z'')$ sur cette droite, les coordonnées de la droite D seront données par les formules (5) et l'équation (10) deviendra

$$(11)\qquad a^2(x'-x'')(y'z''-z'y'')+b^2(y'-y'')(z'x''-x'z'')+ c^2(z'-z'')(x'y''-y'x'')=0.$$

Si l'on considère $x'' y'' z''$ comme coordonnées courantes, cette équation représente un cône du second ordre ayant pour sommet le point M' : ce cône passe par l'origine et par les parallèles aux axes menées par le point M'. Si l'on rapporte le cône à ces trois parallèles, les coordonnées nouvelles du point M'' seront $x''-x'$, $y''-y'$, $z''-z'$, c'est-à-dire $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ et l'équation du cône deviendra

$$(11)\qquad \beta\gamma x'(b^2-c^2)+\gamma\alpha y'(c^2-a^2)+\alpha\beta z'(a^2-b^2)=0.$$

Il est facile de voir sur les équations précédentes que ce cône se décomposera en *deux plans* quand le point M' $(x', y', z')$ sera situé dans un des plans principaux de l'ellipsoïde ou à l'infini.

*L'enveloppe de celles des droites* D *du complexe qui sont situées dans un plan fixe* P' *est une courbe de seconde classe.*

En effet soient $(u', v', w')$ les coordonnées du plan P' dont l'équation sera

$$u'x+v'y+w'z+1=0.$$

Prenons dans ce plan une droite D du complexe et faisons passer par cette droite un plan P'' ayant pour équation

$$u''x+v''y+w''z+1=0.$$

Alors les coordonnées de la droite D seront données par les formules (7) et l'équation (9) donnera

$$(12)\qquad \begin{aligned} a^2(u'-u'')(w'v''-v'w'')+b^2(v'-v'')(u'w''-w'u'')\\ +c^2(w'-w'')(v'u''-u'v'')=0. \end{aligned}$$

Si l'on considère $u'' v'' w''$ comme coordonnées tangentielles courantes, cette équation qui est homogène et du second degré en $u''-u'$, $v''-v'$, $w''-w'$ est l'équation tangentielle d'une courbe de seconde classe située dans le plan P' (n° 505 *bis*). L'équation (12) étant vérifiée quand $u''$, $v''$, $w''$ tendent vers zéro, c'est-à-dire quand le plan P'' s'éloigne indéfiniment, la courbe de seconde classe, enveloppe des droites D, a une tangente éloignée indéfiniment; elle est donc une *parabole* si elle n'est pas décomposée en deux points.

Formons l'équation tangentielle du cône ayant pour sommet l'origine et passant par la courbe de seconde classe enve-

loppée par les droites D du plan P'. Cette droite D est l'intersection des deux plans

$$u'x + v'y + w'z + 1 = 0$$
$$u''x + v''y + w''z + 1 = 0;$$

donc le plan

$$(u'' - u')x + (v'' - v')y + (w'' - w')z = 0$$

ou

$$(13) \quad px + qy + rz = 0$$

est le plan passant par l'origine et la droite D. Comme on a

$$u'' = u' - p, \quad v'' = v' - q, \quad w'' = w' - r$$

l'équation (12) donne entre $p, q, r$ la relation

$$(14) \quad qru'(b^2 - c^2) + rpv'(c^2 - a^2) + pqw'(a^2 - b^2) = 0.$$

On peut dire que cette équation est l'équation tangentielle du cône enveloppé par le plan (13). Ce cône est tangent aux trois plans coordonnés, car l'équation (14) est vérifiée quand deux des trois quantités $p, q, r$ s'annulent. Donc, dans le plan, la courbe enveloppe des droites D est une parabole tangente aux trois plans coordonnés.

Il est facile de voir que cette parabole se décompose en deux points quand le plan P' est parallèle à l'un des deux axes, ou passe par l'origine.

**602.** On verra de même, d'une façon générale, que si on a un complexe d'ordre $m$ défini par une équation homogène de degré $m$ en $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$,

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0,$$

*celles des droites de ce complexe qui passent par un point donné de l'espace formant un cône d'ordre m, et celles de ces droites qui sont situées dans un plan donné enveloppent une courbe de* m[ième] *classe.*

Les équations ponctuelles du cône et les équations tangentielles de l'enveloppe s'obtiendront immédiatement comme dans l'exemple précédent.

L'ensemble des droites appartenant à la fois à deux complexes d'ordres $m$ et $n$ forme une *congruence*. Par un point de l'espace, il passe $mn$ droites de la congruence, et dans un plan de l'espace il y a $mn$ de ces droites.

**603.** *Signification géométrique des coordonnées d'une droite.* — Soit D une droite : prenons sur cette droite deux points $M'(x', y', z')$ et $M''(x'', y'', z'')$; les coordonnées appelées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les *projections du vecteur* M'M'' sur les trois axes coordonnées et les coordonnées appelées $p$, $q$, $r$ les *moments de ce vecteur* par rapport aux trois axes.

## EXERCICES

1. Exprimer en fonction des coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $p$, $q$, $r$ d'une droite la plus courte distance de cette droite à chacun des axes coordonnés, la distance de cette droite à l'origine et les angles qu'elle fait avec les axes.

2. Exprimer en fonction des coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ $(\alpha', \beta', \gamma', p', q', r')$ de deux droites leur angle, leur plus courte distance et les équations de la perpendiculaire commune.

3. Étant donné un axe fixe, appelons $\delta$ la plus courte distance d'une droite de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ à cet axe et $\theta$ l'angle de cette droite avec l'axe. Démontrer

1° Que les droites satisfaisant à l'équation $\delta \tang \theta = k$, dans laquelle $k$ est une constante, forment un complexe du premier ordre.

2° Que tout complexe du premier ordre peut être défini de cette façon. L'axe fixe est appelé l'*axe central du complexe*.

4. Dans un complexe du premier ordre, les droites passant par un point M de l'espace engendrent un plan P passant par ce point, et les droites situées dans un plan P enveloppent un point M du plan. On appelle le point M le foyer du plan P. Démontrer que

1° Lorsque le point M décrit un plan H, le plan P passe par un point fixe $\mu$ foyer du plan H; et réciproquement;

2° Lorsque le point M décrit une droite D, le plan P tourne autour d'une droite fixe $\Delta$; et réciproquement.

5. Étudier le complexe formé par l'ensemble de celles des droites D et $\Delta$ de l'exercice précédent qui sont perpendiculaires entre elles.

6. On donne un ellipsoïde. On considère des droites D telles que si, par chacune d'elles, on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contacts M et M' soient dans un même plan. 1° Démontrer que la droite D et la droite des contacts MM' sont rectangulaires; 2° trouver le lieu des droites D qui passent par un point donné A; 3° ce lieu est un cône du second degré; trouver les positions du point A pour lesquelles ce cône est de révolution; 4° trouver l'en

veloppe C des droites D qui sont contenues dans un plan donné P, et trouver la surface S engendrée par C quand P se déplace parallèlement à un plan Q; 5° trouver pour quelle direction de Q la surface S est de révolution. (Agrégation 1881.)

7. Les normales aux surfaces homofocales

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-1=0,$$

les droites perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à ces surfaces, et les axes des cônes circonscrits à ces surfaces forment un même complexe du second ordre.

8. Étant donné un ellipsoïde ayant pour équation $Ax^2 + By^2 + Cy^2 = 1$, étudier les deux complexes formés:

1° Par les cordes de la surface qui sont vues du centre sous un angle droit.

2° Par les droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires à la surface.

Le premier de ces complexes a pour équations

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(B+C)p^2+(C+A)q^2+(A+B)r^2,$$

et le second

$$p^2+q^2+r^2=(B'+C')\alpha^2+(C'+A')\beta^2+(A'+B')\gamma^2,$$

si l'on pose :

$$A'=\frac{1}{A} \qquad B'=\frac{1}{B} \qquad C'=\frac{C}{1}.$$

9. Étant donné un hyperboloïde à une nappe, on considère toutes les cordes D de cette surface qui sont vues du centre sous un angle droit et l'on demande :

1° L'équation du cône, lieu des cordes D qui passent par un point donné S, ainsi que les positions du point S pour lesquelles ce cône est de révolution;

2° La courbe à laquelle sont tangentes toutes les droites D situées dans un plan donné P, ainsi que les positions du plan P pour lesquelles cette courbe est une parabole ou une circonférence de cercle. (Concours général 1885.)

10. Étudier le complexe formé par les droites qui coupent deux surfaces données du second degré suivant quatre points en proportion harmonique.

11. Étant données deux surfaces du second degré, on considère une droite D telle que les deux plans tangents que l'on peut mener par D à la première surface soient conjugués harmoniques par rapport aux deux plans tangents menés par D à la seconde surface. Étudier le complexe formé par ces droites.

12. Etant données deux surfaces du second degré, étudier le complexe formé par les droites telles que les deux segments déterminés par les deux surfaces, sur chacune de ces droites, aient le même milieu.

Que devient ce complexe lorsque les deux surfaces ont un, deux ou trois plans de symétrie droite ou oblique en commun ?

13. On considère un système quelconque de forces $F_1, F_2, \ldots F_n$ appliquées à un corps solide et on appelle droite de moment nul un axe $\Delta$ tel que la somme des moments des forces par rapport à $\Delta$ soit nulle. Démontrer que les droites de moment nul forment un complexe du premier ordre dont l'axe central (Exercice 3) est l'axe central du système de forces $F_1, F_2, \ldots F_n$ d'après Poinsot.

14. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse diriger suivant six droites des forces se faisant équilibre est que ces six droites appartiennent à un même complexe du premier ordre.

15. Des forces appliquées à un corps solide peuvent d'une infinité de manières être réduites à deux F et $\Phi$. On considère seulement celles de ces réductions dans lesquelles les forces F et $\Phi$ sont *rectangulaires*. Démontrer qu'alors les forces F et $\Phi$ appartiennent à un complexe du second ordre. (Exercice identique au fond à l'exercice 5).

16. Lieu géométrique des axes centraux des complexes de premier ordre passant par les droites communes à deux complexes du premier ordre donné. (L'axe central a été défini dans l'exercice 3. On remarquera que si $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sont les équations de deux complexes du premier ordre, l'équation générale des complexes du premier ordre passant par les droites communes à ces deux complexes est $\varphi + \lambda\psi = 0$. Le lieu géométrique demandé est le conoïde droit qui a été appelé cylindroïde par Cayley, et dont l'équation peut, par un choix convenable des axes, être écrite $z(x^2 + y^2) = 2axy$.)

# QUESTIONS POSÉES AUX DIVERS CONCOURS

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

**1860.** On donne une parabole P; soient A et B deux points mobiles sur cette courbe, mais tellement choisis que les normales en A et B se coupent en un point C, situé sur P. La tangente en C et la droite AB se coupent en un point M; trouver le lieu décrit par ce point et construire la courbe.

**1861.** Déterminer les diverses surfaces représentées par l'équation

$$a\,(x^2+2yz)+b\,(y^2+2zx)+c\,(z^2+2xy)=1$$

lorsque les paramètres $a$, $b$, $c$, varient de $-\infty$ à $+\infty$.

Exprimer que ces surfaces sont de révolution.

**1862.** Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$x^2+y^2-z^2+2pxz+2qyz-2ax-2by+2cz=0\,,$$

($a$, $b$, $c$, étant des nombres positifs donnés; $p$, $q$ représentant des paramètres variables) : 1° Lorsque $p$ et $q$ varient de toutes les manières possibles; 2° lorsque $p$ et $q$ varient de manière à ce que l'équation donnée représente un cône. Distinguer la partie du lieu qui correspond à des hyperboloïdes à une nappe, de celle qui correspond à des hyperboloïdes à deux nappes.

**1863.** On donne sur un plan deux circonférences O, O'; d'un point A, pris sur O, on mène des tangentes à O' et l'on joint les points de contact obtenus. Cette droite coupe la tangente à O, au point A, en M; trouver le lieu décrit par M.

Examiner les différentes formes de ce lieu selon la grandeur et la position relatives des circonférences O et O'; indiquer le cas où il se décompose. Faire voir que le lieu des points M est tangent à O en chacun des points qui lui sont communs avec cette circonférence.

**1864.** On considère le cercle qui a pour équation

$$x^2+y^2=1\,,$$

et la parabole qui est représentée par l'équation

$$(\beta x-\alpha y)^2+2\alpha x+2\beta y=\frac{3\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2},$$

où $\alpha$ et $\beta$ désignent des paramètres positifs quelconques. On propose de déterminer :

1° Le nombre des points réels communs aux deux courbes, pour les différentes valeurs de $\alpha$ et de $\beta$.

2° Les coordonnées des quatre points communs quand on suppose :

$$\alpha^2+\beta^2=1\,,$$

ou :

$$\alpha=1 \quad \text{et} \quad \beta>0\,,$$

enfin, lorsque l'on a

$$\beta = \sqrt{(\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)}.$$

**1865.** On donne dans un plan une parabole P et l'on considère une circonférence C passant par le foyer de P. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre de C, pour que cette circonférence ait successivement avec P : 1° quatre points réels; 2° quatre points imaginaires; 3° deux points réels et deux points imaginaires. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare les deux premières régions de la troisième.

**1866.** On considère la parabole et l'hyperbole équilatère qui correspondent, respectivement, aux équations

$$y^2 - 2px = 0 \quad , \quad xy - m^2 = 0.$$

On propose :

1° De former l'équation ayant pour racines les abscisses ou les ordonnées des pieds des normales communes à ces deux courbes.

2° De déduire de cette équation que le nombre des normales communes est au moins égal à *un* et au plus égal à *trois*.

3° De démontrer qu'en supposant

$$7p^4 > 2m^4,$$

il n'y a qu'une normale commune réelle.

**1867.** Étant donnés un triangle BOA rectangle en O et une droite D, située dans le plan de ce triangle, on propose :

1° De former l'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle BOA; 2° de calculer l'équation du lieu L des points où ces différentes hyperboles ont pour tangentes des parallèles à D; 3° d'examiner les différentes formes du lieu L qui correspondent aux directions diverses de la droite D.

**1868.** Soient deux paraboles $P_1$, $P_2$, ayant toutes deux pour foyer le point fixe O et, pour axes respectifs, les droites fixes OX, OY, droites qu'on suppose rectangulaires. On mène à ces paraboles une tangente commune : soient $M_1$ et $M_2$ les points de contact; trouver le lieu décrit par le milieu de $M_1 M_2$, sachant que cette droite passe par un point fixe.

**1869.** On donne un triangle rectangle isocèle AOB et on demande :

1° L'équation générale des paraboles P tangentes aux trois côtés du triangle AOB;

2° L'équation de l'axe de l'une quelconque de ces paraboles;

3° L'équation et la forme du lieu des projections du point O, sommet de l'angle droit AOB, sur les axes des paraboles P.

**1872.** On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et deux droites (A) et (B) respectivement parallèles aux axes et l'on demande :

1° De former l'équation générale des courbes du second degré qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui admettent comme normales les droites données (A) et (B);

2° De démontrer que par un point du plan, il passe en général trois de ces courbes, à savoir deux ellipses et une hyperbole;

2° De faire connaître les points du plan pour lesquels cette règle générale souffre une exception.

**1873.** On donne un cercle et un point A, et l'on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par le point donné A et à toucher en deux points le cercle donné.

On discutera la courbe obtenue pour les différentes positions du point A et l'on démontrera que, dans le cas général, les points de contact des tangentes qu'on peut mener au lieu par le point A sont situés sur une circonférence de cercle.

**1874.** Étant donné un triangle, on sait que, par un point M de son plan, il passe, en général, deux paraboles circonscrites au triangle.

Cela posé, on demande de construire et de discuter le lieu du point M pour lequel les axes des deux paraboles correspondantes forment entre eux un angle donné.

**1875.** Trouver le lieu géométrique de l'intersection des deux normales menées à la parabole aux deux extrémités de toutes les cordes dont les projections orthogonales sur une perpendiculaire à l'axe ont une même valeur.

Que dire du cas où l'on fait tendre vers zéro cette valeur de la projection?

Revenant au cas général, on propose de mener par un point quelconque du lieu trois normales à la parabole.

Application particulière au point maximum du lieu.

**1875.** (*Question retirée.*) Une conique donnée de forme et de grandeur se déplace de manière que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée. A cette conique, parallèlement à l'une des droites données, on mène une tangente; trouver le lieu des points de contact.

**1876.** 1. (*Admissibilité.*) 1° Expliquer la recherche du lieu des milieux des cordes parallèles à la droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$, pour la surface représentée par l'équation

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 8xy + 5x + z = 0.$$

2° On demande de trouver les limites entre lesquelles doit varier le coefficient $a$ pour que l'équation

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

ait ses quatre racines réelles.

2. (*Admission.*) On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles concentriques à cette courbe. A chacun des cercles on mène des tangentes qui soient, en même temps, normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de contact avec le cercle variable, du point d'incidence sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu décrit par ce milieu. — Si l'équation du lieu se présente sous une forme irrationnelle on devra la rendre rationnelle.

**1877.** 1. (*Admissibilité.*) 1° On donne une surface rapportée à un système de coordonnées rectangulaires

$$3x^2 - 3y^2 + z^2 - 2yz - 4zx + 8xy - 8x + 6y + 2z = 0,$$

trouver l'équation de la même surface par rapport à un même système de plans principaux.

On opérera directement, en supposant connue l'équation du plan diamétral.

2° Démontrer que, dans une équation à coefficients réels, qui a ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations du premier membre ordonné suivant les puissances décroissantes de $x$.

On supposera connue la règle des signes de Descartes.

2. (*Admission.*) Soit, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes; $\xi$, $\eta$, les coordonnées d'un point M du plan de l'hyperbole. Par ce point M, on mène deux tangentes à l'hyperbole; soient A et B les points de contact.

Trouver l'équation du cercle passant par A, B et le centre O de l'hyperbole.

Ce cercle rencontre l'hyperbole en deux points C, D, distincts de A et B; trouver l'équation de la droite CD.

Si M décrit une ligne droite, aux diverses positions du point M correspondent diverses positions de CD; trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de l'hyperbole sur ces droites.

**1878.** 1. (*Admissibilité.*) 1° Méthode de Newton, fondée sur la considération des dérivées successives, pour trouver une limite supérieure des racines positives d'une équation.

2° Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par les deux équations

$$x=\frac{t}{1-t^2}\quad,\quad y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

2. (*Admission.*) On donne une droite D dont l'équation par rapport à deux axes rectangulaires $ox$ et $oy$ est

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1.$$

On considère les différentes coniques qui ayant pour axes $ox$ et $oy$ sont normales à la droite D. Chacune d'elles rencontre cette droite en deux points; en ces points, on mène les tangentes à la conique.

Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Démontrer que ce lieu est une parabole et que la distance du foyer de cette parabole à son sommet est le quart de la distance du point O à la droite D.

On construira géométriquement l'axe et le sommet de la parabole.

**1879.** 1. (*Admissibilité.*) 1° Comment déduit-on du théorème de Sturm les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation algébrique de degré donné.

2° Construire la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho=\frac{\sin\omega}{2\omega-3\cos\omega}.$$

2. (*Admission.*) On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1,$$

et un point M cette conique. Par les extrémités d'un diamètre quelconque

de la conique et le point M on fait passer un cercle. Prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique K passant par l'origine O des axes.

Si autour du point O, on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique K en deux points, prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpendiculaire au segment OM et passant par le milieu de ce segment.

Par le point O on peut mener, indépendamment de la normale ayant son pied en O, trois autres droites normales à la conique K.

1° Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où $a=1$, $b=-1$, montrer qu'une seule de ces normales est réelle et calculer les coordonnées de son pied.

2° Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.

*Nota*. Le pied de la normale est le point de la courbe d'où part la normale.

**1880.** Soient M et N les points où l'axe des $x$ rencontre le cercle

$$x^2+y^2=R^2;$$

considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points M et N; menons par un point Q, pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole; soient A et B les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact.

Démontrer que, des deux droites QA et QB, l'une est parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe P.

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante qui passe par les points M et N est déterminée. On construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets.

Si le point P décrit la droite $y=x$, quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.

**1881.** 1. On considère une parabole P et une droite AB normale au point A à cette courbe (ce point A se projetant, d'ailleurs, sur l'axe au foyer même de la courbe).

Trouver le lieu des sommets des sections faites dans le cylindre droit qui a pour base P, par des plans passant par AB.

2. On donne une asymptote d'une hyperbole et un point P de la courbe. Sachant que l'un des foyers décrit la perpendiculaire menée du point P sur l'asymptote considérée, on demande le lieu du point M d'intersection de la seconde asymptote avec la directrice correspondant au foyer donné.

**1882.** On donne deux cercles se coupant aux points A et B. Une conique quelconque passant par ces points et tangente aux deux cercles rencontre l'hyperbole équilatère qui a ces points pour sommets en deux autres points C et D.

1° Démontrer que la droite CD passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés.

2° Si l'on considère toutes les coniques qui, passant par A et B, sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences E et F.

3° Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences, E ou F; démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux circonférences données.

**1883.** On donne une parabole et une droite. Trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à la parabole, forment avec la droite donnée un triangle de surface donnée.

**1884.** On donne une conique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

On joint un point M de cette conique aux deux foyers F et F'

1° On demande d'exprimer les coordonnées du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF', au moyen des coordonnées du point M.

2° Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et M' de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu du segment MM'.

3° Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P. On déterminera, en coordonnées polaires, l'équation du lieu décrit par le point P. On prendra le foyer F pour origine des rayons, et l'axe des $x$ pour origine des angles.

**1885.** Par les deux foyers d'une ellipse on fait passer une circonférence de cercle variable.

1° A quelle condition doit satisfaire cette ellipse pour que la circonférence du cercle puisse la rencontrer en quatre points réels et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour que les quatre points d'intersection soient réels.

2° En chacun des points d'intersection on mène les tangentes à l'ellipse; trouver, quand le cercle varie, le lieu des sommets du quadrilatère formé par ces tangentes.

3° Quel est le lieu des points d'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse.

4° On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse; trouver le lieu de leurs points de contact avec le cercle.

**1886.** On donne un rectangle ABA'B'. Deux hyperboles équilatères A et B ayant toutes deux leurs asymptotes parallèles aux côtés du rectangle passent : l'une (A) par les sommets opposés A et A', l'autre (B) par les sommets opposés B et B' du rectangle.

1° Démontrer que le centre de l'hyperbole A a par rapport à l'hyperbole B la même polaire P que le centre de l'hyperbole B par rapport à l'hyperbole A.

2° Le rectangle restant fixe, on fait varier en même temps les deux hyperboles de manière qu'elles soient égales entre elles sans être symétriques par rapport à l'un des axes de symétrie du rectangle. Examiner si elles se coupent en des points réels. Trouver le lieu du milieu de la droite qui joint leurs centres, et prouver que la droite P est constamment tangente à ce lieu.

3° Si l'on prend une quelconque des hyperboles (A) et une quelconque des hyperboles (B), il existe une infinité de rectangles ayant comme le rectangle donné deux sommets opposés sur chacune de ces hyperboles et les côtés parallèles aux asymptotes. Trouver le lieu des centres de ces rectangles.

**1887.** On donne dans un plan un point $\omega$ fixe et deux axes rectangulaires fixes $Ox$, $Oy$. Par le point $\omega$ on fait passer deux droites rectangulaires rencontrant $Ox$ en B et D, $Oy$ en A et C. Par les points A, B, on fait

passer une parabole P tangente aux axes $Ox$ et $Oy$ en ces points; par les points C, D, on fait passer une parabole P' tangente aux axes $Ox$ et $Oy$ en ces points.

On fait tourner les droites rectangulaires AB, CD autour du point $\omega$, et l'on demande :

1° Les équations des paraboles P, P' de leurs axes et de leurs directrices;

2° L'équation du lieu du point de concours des axes et des directrices;

3° L'équation du lieu du point de concours de leurs axes, qui se compose de deux cercles;

4° On prouvera que la distance des foyers est constante.

**1888.** On donne un quadrilatère plan OABC et deux séries de paraboles : les unes tangentes en A à AC et ayant pour diamètre OA; les autres tangentes en B à BC et ayant pour diamètre OB. On demande :

1° Le lieu du point de contact M d'une parabole de la première série avec une parabole de la deuxième série;

2° Indiquer, en laissant le triangle OAB invariable, dans quelle région du plan il faut placer le point C pour que le lieu soit une ellipse et pour qu'il soit une hyperbole;

3° Démontrer que dans l'hypothèse où OABC est un parallélogramme, la tangente commune en M aux deux paraboles pivote autour du point de concours K des médianes du triangle ABC;

4° Trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point d'intersection P de la tangente en M aux deux paraboles avec l'autre tangente commune DE que l'on peut mener à ces deux courbes.

*Nota.* On pose $OA = a, \ OB = b.$

**1889.** Étant donnés dans un plan deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$ et deux séries de paraboles : les unes P, de paramètre $p$, tangentes à $Oy$ du côté des $x$ positifs, et ayant leur axe parallèle à $Ox$; les autres Q, de paramètre $q$, tangentes à $Ox$ du côté des $y$ positifs et ayant leur axe parallèle à $Oy$. On demande :

1° Le lieu du centre d'une conique C qui se déplace sans changer de grandeur en passant constamment par les points communs à l'une des paraboles P et à l'une des paraboles Q.

2° De démontrer que si l'on associe une parabole P et une parabole Q de manière que la droite qui joint leurs foyers respectifs reste constamment parallèle à une direction donnée, la somme des angles que font les tangentes communes à ces deux paraboles avec un axe fixe, $Ox$ par exemple, demeure constante, et de trouver, dans ces conditions, le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles.

3° De placer une parabole P et une parabole Q, de façon qu'elles aient trois points communs confondus en un seul et de calculer, pour cette position des deux courbes, les coordonnées de leurs points communs et le coefficient angulaire de leur tangente commune en ce point.

4° De démontrer que tout triangle circonscrit à la fois à l'une quelconque des paraboles P et à l'une quelconque des paraboles Q est inscrit dans une conique fixe et de trouver l'équation de cette conique.

**1890.** On donne, dans un plan, une hyperbole équilatère H, dont l'équation par rapport à ses axes, pris pour axes des cordonnées, est :

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{1}$$

D'un point M du plan, ayant pour coordonnées $x = p, y = q$, on mène des normales à cette courbe.

On demande :

1° De faire passer par les pieds de ces normales une nouvelle hyperbole équilatère dont les normales en ces points soient concourantes et de déterminer leur point de concours;

2° En désignant par K une hyperbole équilatère satisfaisant à cette condition, dans quelle région du plan doit être placé le point M pour qu'il y ait une hyperbole K correspondant à ce point;

3° Quelle ligne doit décrire le point M pour que l'hyperbole K soit égale à l'hyperbole H.

*N. B.* — On conservera les notations indiquées.

**1891.** On donne une parabole P et on porte à partir de chacun de ses points, et dans les deux sens, sur une parallèle à une direction fixe $\Delta$, des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de la parabole.

1° Lieu des extrémités de ces longueurs. Il se compose de deux paraboles $P_1$ et $P_2$ : montrer la raison de ce dédoublement.

2° Démontrer que les axes de $P_1$ et $P_2$ sont perpendiculaires l'un à l'autre, qu'ils pivotent autour d'un même point indépendant de $\Delta$ et que, quel que soit cette direction, la somme des carrés des paramètres de ces paraboles est constante;

3° Trouver et construire le lieu décrit par les sommets des paraboles $P_1$ et $P_2$ quand on fait varier $\Delta$. On prendra, comme axes, l'axe et la tangente au sommet de la parabole donnée de paramètre $p$. On désignera par $\theta$ l'angle de $\Delta$ avec l'axe des $x$.

**1892.** On donne une hyperbole équilatère $\Gamma$ et une circonférence (C) décrite sur une corde DD′ de cette hyperbole comme diamètre.

1° On mène dans la circonférence une corde perpendiculaire à DD′ : démontrer que la moitié de cette corde est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu aux points où elle rencontre l'hyperbole;

2° Indiquer dans quel cas les points d'intersection de la circonférence et de l'hyperbole sont réels;

3° Trouver le lieu des points de rencontre des sécantes communes à l'hyperbole et à la circonférence, lorsque la corde DD′ se déplace en restant parallèle à une direction fixe;

4° Soit H, un des points communs à l'hyperbole et au cercle mobile, A le point où la tangente à la circonférence en H coupe l'hyperbole, B le point où la tangente à l'hyperbole en H coupe la circonférence : prouver que la droite AB passe par un point fixe.

(Voyez à la fin les compositions de 1893.)

## CONCOURS GÉNÉRAL

### CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

**1833.** Couper un triangle par une droite de manière que les deux parties de ce triangle soient entre elles dans un rapport donné et qu'elles aient leurs centres de gravité sur une même perpendiculaire à la sécante. On résoudra le même problème : 1° lorsque les deux côtés sont égaux; 2° lorsque les trois côtés sont égaux.

**1837.** Étant données, dans un plan, deux paraboles égales dont les sommets se touchent et dont les axes sont tournés en sens contraires; on suppose que l'une d'elles roule sur l'autre de manière que, dans chacune des positions qu'elle vient occuper successivement, elle lui soit toujours tangente en un point également éloigné du sommet de la parabole fixe et du sommet de la parabole mobile. Pendant ce mouvement, le sommet de cette dernière courbe décrit un lieu dont on demande l'équation.

**1844.** Étant donnés une ellipse et un point A sur l'ellipse, on décrit un cercle tangent à la courbe en ce point et l'on mène au cercle et à l'ellipse les deux tangentes communes, autres que celles qui toucheraient les deux courbes données au point A. On demande le lieu du point commun à ces deux tangentes quand on fait varier le rayon du cercle.

**1845.** Étant donnés un cercle et un point situé dans son intérieur, on imagine que sur chacun des diamètres de ce cercle on décrive une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe et qui passe par le point donné. On demande :

1° L'équation générale de ces ellipses;

2° Le lieu géométrique de leurs foyers;

3° Le lieu des extrémités de leurs petits axes.

**1846.** Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que ABCD, on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse. Cela étant admis, des points de contact N et Q de deux côtés opposés de chaque rectangle, on mène deux droites au point de contact M de l'un des deux autres côtés et l'on demande de prouver :

1° Que MN et MQ sont également inclinées sur le côté AB;

2° Que MN + MQ est constante;

3° Que ces droites MN, MQ, enveloppent une ellipse homofocale à la proposée.

**1847.** Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle, on forme un second triangle dont les sommets A, B, C, sont les points milieux des côtés du premier. Des sommets de ce second triangle, on mène au cercle les tangentes A*a*, B*b*, C*c*, qui rencontrent respectivement en *abc*, les côtés opposés à ces sommets. On propose de démontrer que ces trois points sont en ligne droite.

On verra si le théorème a également lieu lorsque, à la place du cercle incrit, on prend une section conique quelconque tangente aux trois côtés du triangle PQR.

**1848**. Soit dans le plan d'une ellipse donnée, une droite quelconque TS; par le centre C de l'ellipse, on mène le diamètre ACB conjugué à la direction de cette droite et qui va la couper au point O. On prolonge ensuite la ligne OC d'une longueur OM, telle que $OC.\,CM = CA^2$. On suppose que la droite TS se meuve de manière à être toujours tangente à une courbe donnée et l'on demande quelle sera la courbe décrite par le point M. On indiquera la méthode à suivre et l'on en fera l'application au cas suivant. L'ellipse a pour équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, et la droite TS reste tangente à la courbe qui est représentée par l'équation $x^2=ay$.

**1849**. Soient, dans un plan, une ellipse et une droite située hors de cette ellipse. On prend sur la droite deux points N, N', conjugués par rapport à l'el ipse (c'est-à-dire deux points tels que la polaire de l'un passe par l'autre); cela posé :

1° Prouver qu'il existe dans le plan de l'ellipse deux points O, O', desquels on voit chaque segment NN' sous un angle droit; 2° On demande le lieu des points O, O', quand la droite se meut parallèlement à elle-même.

**1850**. Étant donnés deux axes fixes *ox*, *oy*; autour d'un point fixe P, on fait tourner un angle ABP de grandeur constante et donnée (A, marquant le point où l'un des côtés de l'angle va couper *ox*, et B, le point où l'autre côté coupe l'axe *oy*). On demande de prouver qu'il existe sur *ox* un point fixe A' et sur *oy* un point fixe B' tels que le produit AA' × BB' reste constant pour toutes les positions de l'angle. On examinera le cas particulier où les droites *ox*, *oy*, coïncident.

**1851**. Étant donnée une droite L. on mène, de chacun de ces points M, deux droites à deux points fixes P et P'. Deux autres points fixes O, et O', sont les sommets de deux angles AOB, A'OB', de grandeurs données et constants, que l'on fait tourner autour de leurs sommets respectifs de manière que leurs côtés OA, O'A', soient respectivement perpendiculaires aux deux droites MP, M'P'. On demande quelle est la courbe décrite par le point d'intersection N des deux droites OA, O'A' et la courbe qui est décrite par le point d'intersection des deux autres côtés OB, O'B', quand le point M glisse sur la droite fixe L.

**1854**. Si l'on prend pour diamètre d'un cercle la portion de l'axe non transverse comprise entre le centre et la normale en un point quelconque de la courbe, la tangente menée au cercle par ce dernier point est égale au demi-axe réel.

Résoudre, d'après cela, la question suivante : Étant donnés les deux sommets et un troisième point quelconque de l'hyperbole, construire la normale en ce point. Indiquer les propriétés et les constructions analogues pour l'ellipse.

**1857**. Étant données deux coniques C et C', on mène dans la première tous les systèmes possibles de diamètres conjugués et par un point de la circonférence de l'autre on mène des paraboles aux diamètres de chaque système. Faire voir que la droite qui joint les seconds points d'intersection de ces parallèles avec la courbe passent par un même point.

**1859**. Par un point donné sur l'axe d'un paraboloïde de révolution on mène une sécante et par les points où cette sécante rencontre la surface, on mène des normales à la section méridienne qui la contient; ces normales se rencontrent en un point dont on demande le lieu. On examinera si tous les points de la surface font réellement partie du lieu.

**1860.** On donne deux ellipsoïdes A et B. On demande le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde A et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de B.

**1861.** Un ellipsoïde étant donné, trouver le lieu des centres des sections planes dont l'aire est égale à une constante donnée.

**1862.** Deux paraboles de même paramètre ont leurs axes à angle droit; l'une d'elles est fixe, l'autre est mobile. Une corde commune AB passe constamment par le pied D de la directrice de la parabole fixe; on demande le lieu décrit par le sommet de la parabole mobile.

**1863.** Une surface du second degré de révolution pourvue d'un centre se meut de manière que dans chacune de ses positions elle rencontre, suivant une circonférence de cercle, une surface du second degré fixe et donnée. On demande le lieu du centre de la surface mobile.

**1864.** On donne deux coniques ayant un même foyer et leurs axes proportionnels. Soient FA, FA, leurs rayons vecteurs minimums; on fait tourner ces rayons vecteurs autour de F, en conservant leur distance angulaire, soit FC. FC′, une position. En C et C′ on mène les tangentes à chacune des coniques; trouver le lieu de leur point de rencontre.

**1865.** Etant données deux coniques tangentes en un point O, on leur mène une tangente commune OR, ainsi que les tangentes communes extérieures AA′, BB′, qui se coupent en M. Cela posé, on propose de démontrer que :

1° La droite PP′, qui joint les points P et P′ diamétralement opposés au point O dans les deux coniques, passe par le point M.

2° Les droites AB, A′B′, qui joignent les points de contact de chaque conique avec les tangentes extérieures communes, se coupent en un point *R* qui est situé sur la tangente commune OR.

3° Les tangentes menées aux deux coniques par le point R touchent les courbes en des points qui sont situés sur la droite MC.

On fera voir que, généralement, le point R ne partage cette propriété avec un autre point et on déterminera la condition qui doit être remplie pour qu'il existe une ligne telle que les tangentes menées par chaque point de cette ligne aux deux coniqnes donnent quatre points de contact en ligne droite.

**1866.** Démontrer que 1° les quatre points d'intersection de deux coniques quelconques inscrites dans un rectangle donné sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à deux directions fixes.

2° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point du plan à toutes les coniques inscrites dans un rectangle donné; ou bien des tangentes parallèles à une direction donnée.

3° Trouver le lieu des points de toutes ces coniques où la tangente fait un angle donné avec le diamètre qui aboutit au point de contact.

**1867.** Un ellipsoïde étant donné, on propose de trouver une droite L dans l'espace, et un point P sur l'ellipsoïde, de façon que les cônes qui ont pour sommet commun le point P, et pour bases les sections faites dans l'ellipsoïde par des plans contenant L, soient de révolution. On cherchera, en outre, quel est le lieu des positions occupées par la droite L, lorsque le plus grand et le plus petit axes de l'ellipsoïde restant invariables, on fait varier la longueur de l'axe moyen.

**1868.** On propose :

1° De trouver le lieu géométrique des points divisant dans un rapport

donné les portions des tangentes à une conique fixe qui sont comprises entre deux droites fixes;

2° De classer méthodiquement, en s'attachant surtout aux cas généraux, les diverses formes que ce lieu géométrique peut affecter;

3° De trouver les conditions que doivent remplir la conique et les deux droites fixes pour que le lieu géométrique demandé se décompose en lignes droites ou en lignes du second ordre.

**1869.** On donne un cercle dont le centre est en O, et un point P dans le plan de ce cercle, en dehors de la circonférence; trouver le lieu décrit par les foyers d'une hyperbole équilatère, doublement tangente au cercle et passant par le point P.

On construira le lieu en supposant la distance PO égale au triple du rayon du cercle.

**1870.** Deux ellipses ont leur centre en un même point et leurs axes dirigés suivant les mêmes droites. Déterminer le lieu d'un point tel que les cônes ayant ce point pour sommet commun, et les deux ellipses pour directrices, soient égaux.

**1872** [1]. Étant donné un prisme triangulaire droit on le coupe par des plans rencontrant les trois arêtes, de telle manière que les volumes des troncs de prisme obtenus soient dans un rapport donné :

1° Trouver la surface engendrée par le centre de gravité de l'un des troncs de prisme, quand le plan sécant se déplace sans cesser de rencontrer les trois arêtes.

2° Trouver les courbes qui forment les contours de ces surfaces.

On examinera, en particulier, le cas où le prisme donné a pour bases des triangles équilatéraux.

**1873.** Une surface du second degré étant donnée, ainsi que deux points A, B, sur cette surface; il existe une infinité de surfaces du second degré $\Sigma$ qui sont tangentes en A et B, à S. On propose de trouver :

1° Le lieu géométrique des centres des surfaces $\Sigma$;

2° Le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener parallèlement à un plan donné;

3° Le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener par une droite donnée.

**1874** (*Paris*). Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier F $(x)$ satisfaisant aux relations :

$$F(1-x) \equiv F(x) \quad , \quad F\left[\frac{1}{x}\right] \equiv \frac{F(x)}{x^m}$$

est :

$$F(x) \equiv (x^2-x)^{2p}(x^2-x+1)^q \Big\{ A_0(x^2-x+1)^{3n} + A_1(x^2-x+1)^{3(n-1)}(x^2-x)^2$$
$$+ A_2(x^2-x+1)^{3(n-2)}(x^2-x)^4 + \ldots + A_n(x^2-x)^{2n} \Big\}$$

$p$, $q$, $n$ désignant des nombres entiers, et $A_0$, $A_1$, $A_2$,.... $A_n$ des constantes quelconques.

**1874** (*Départements*). Si l'on considère la fonction $e^{-x^2}$ de la variable $x$ et que l'on en prenne les dérivées successives, on reconnaît que la dérivée de l'ordre $n$ est égale au produit de la fonction $e^{-x^2}$ par un polynôme entier en $x$ que l'on représentera par $\varphi_n(x)$.

1. Il n'y a pas eu de concours général en 1871.

1° Démontrer que les polynômes $\varphi(x)$ satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &\equiv -2x\varphi_{n-1}(x) - 2(n-1)\varphi_{n-2}(x), \\
\varphi'_n(x) &\equiv -2n\varphi_{n-1}(x), \\
\varphi''_n(x) &\equiv -2x\varphi'_n(x) + 2n\varphi_n(x).
\end{aligned}$$

2° Calculer les coefficients du polynôme $\varphi_n(x)$ ordonné suivant les puissances de $x$.

**1875.** Étant donnés un ellipsoïde, un plan P, et un point A dans ce plan; trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde et tels que la section de chacun de ces cônes, par le plan P, admette pour foyer le point A.

**1876.** Étant donné un parallélipipède on considère trois arêtes, qui n'ont pas d'extrémités communes et les deux sommets non situés sur ces trois arêtes :

1° Trouver l'équation du lieu d'une courbe plane du second degré, passant par ces deux points et s'appuyant sur les trois arêtes.

2° Chercher les droites réelles situées sur la surface.

3° Étudier la forme des sections faites dans la surface par des plans parallèles à l'une des faces du parallélipipède.

**1877.** Rechercher les surfaces S du second degré sur lesquelles existe une droite D telle que l'hyperboloïde de révolution H qui a pour axe une génératrice quelconque G, de la surface S, et du même système que D, et qui passe par la droite D, coupe orthogonalement la surface S en tous les points de cette droite.

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H qui se rapportent à une même surface S, jouissant de la propriété énoncée :

1° Trouver le lieu des sommets A et celui des foyers F des hyperboloïdes H' conjugués des hyperboloïdes H;

2° Par l'un des foyers F de l'hyperboloïde H', on mène un point P parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites G et D, et faisant, avec cette dernière, un angle supplémentaire de celui que fait, avec cette même droite, l'axe G de l'hyperboloïde H; trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan P coupe la droite D à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface S et de l'hyperboloïde H.

**1878.** Les droites A'OA, B'OB, C'OC sont trois axes de coordonnées rectangulaires; on suppose $OA' = OA = a$, $OB' = OB = b$, $OC' = OC = c$.

1° Le lieu des axes de révolution des surfaces de révolution du second degré qui passent par les six points A, A', B, B', C, C';

2° Le lieu des extrémités D de ces axes.

On construira la projection du lieu des points D sur le plan AOB, en supposant $a > c > b$ et l'on partagera la courbe en arcs tels que chacun d'eux corresponde à des surfaces de même espèce.

**1879.** On donne un hyperboloïde à une nappe et un point dans le plan du cercle de gorge. Par ce point on mène une droite parallèle à une génératrice de la surface. Cette droite est l'axe d'un cylindre de révolution qui passe par la génératrice de l'hyperboloïde. Trouver l'équation de la projection sur le plan de $xy$ de l'intersection des deux surfaces. La projection a un point double dont on demande le lieu lorsque la droite varie.

**1880.** Sur une courbe donnée du troisième degré, ayant un point de rebroussement O, on considère une suite de points

$$A_{-n},\ A_{-(n-1)},\ \ldots,\ A_{-2},\ A_{-1},\ A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n;$$

tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant :

1° Étant données les coordonnées du point $A_0$, on propose de trouver les coordonnées des points $A_{-n}$, $A_n$, et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice $n$ augmente indéfiniment.

2° On demande le lieu décrit par le premier point limite, lorsque la courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement O, la même tangente en ce point, et en passant constamment par trois points fixes P, Q, R.

3° On étudiera comment varient les points d'intersection de ce lieu et les côtés du triangle P Q R, quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par O.

**1881.** Trouver le lieu des points tels que les pieds des six normales qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné, à trois axes inégaux, se séparent en deux groupes de trois points dont les plans respectifs soient parallèles entre eux.

Montrer que, si l'on se donne un point P du lieu, la solution de ce problème « mener du point P les normales à l'ellipsoïde » dépend de la résolution de deux équations du troisième degré.

Discuter ces équations.

**1882.** Par un point quelconque P pris dans le plan d'une parabole donnée, dont le sommet est en O, on mène à cette courbe trois normales qui la rencontrent aux points A, B, C. Les longueurs PA, PB, PC, PO étant représentées respectivement par $a$, $b$, $c$, $l$, on demande de former l'équation du troisième degré dont les racines sont $l_2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$, et d'indiquer les signes des racines d'après la portion du point P dans les diverses régions du plan.

**1883.** D'un point P pris sur une normale en un point A d'un paraboloïde elliptique on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds B, C, D, et E; 1° on demande de trouver l'équation de la sphère S passant par les quatre points B, C, D, et E; 2° de trouver le lieu des centres I de la sphère S quand le point P se déplace sur la normale au point A, ainsi que la surface engendrée par la droite PI.

**1884.** Par le centre d'un ellipsoïde donné, on mène trois diamètres conjugués quelconques; et par les points où ces droites rencontrent la sphère circonscrite au parallélépipède formé par les plans tangents au sommet de l'ellipsoïde, on fait passer des plans; 1° trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné P sur ces plans variables; 2° ce lieu est une surface du quatrième ordre dont l'équation peut être ramenée à la forme suivante :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 + 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0;$$

trouver toutes les sphères telles que chacune d'elles coupe la surface suivant deux cercles; 3° ces sphères forment cinq séries parmi lesquelles deux ne sont pas distinctes. Démontrer que les sphères de la série *double* passent toutes par un même point, et trouver le lieu de leurs centres. Démontrer que les sphères de chacune des trois autres séries coupent respectivement à angle droit des sphères fixes $S_1$, $S_2$, $S_3$. Trouver le lieu des centres des sphères de ces trois séries.

**1885.** Voyez fin du chap. VII. Exercice 9.

**1886.** Étant donnée une surface du deuxième ordre S et deux points A, B. on mène par le point B une sécante qui rencontre la surface S aux points C

et C′ et le plan polaire de A au point D. Soient M et M′ les points où la droite AD rencontre les plans qui touchent la surface S aux points C et C′.

1° La sécante BD tournant autour du point B, on demande le lieu décrit par les points M et M′.

2° Ce lieu se compose de deux surfaces du deuxième ordre dont l'une est indépendante de la position du point B et dont l'autre Σ dépend de la position de ce point. Chercher ce que devient la surface Σ quand, dans la construction qui donne les points de cette surface, on fait jouer au point A le rôle du point B et inversement.

3° Le point A restant fixe, déterminer les positions occupées par le point B quand la surface Σ n'a pas un centre unique à distance finie.

**1887.** I. On représente par $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$... $(x_m, y_m)$ les coordonnées des points d'intersection de deux courbes algébriques dont les équations mises sous forme entière sont $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$. On suppose que les points d'intersection sont *simples et situés à distance finie*.

1° Montrer que, pour chaque valeur de $i$, on peut écrire :

$$f(x, y) = (x - x_i)\, a_i(x, y) + (y - y_i)\, b_i(x, y)$$
$$(i = 1, 2 \ldots m)$$
$$F(x, y) = (x - x_i)\, A_i(x, y) + (y - y_i)\, B_i(x, y),$$

les coefficients $a_i$, $b_i$, $A_i$, $B_i$ étant des polynômes en $x$ et $y$.

2° On pose
$$\varphi_i(x, y) = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ A_i & B_i \end{vmatrix}$$
et
$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{i=m} C_i\, \varphi_i(x, y),$$

et l'on demande de déterminer les constantes $C_i$ de manière que le polynôme $\Phi$ prenne pour $x = x_i$ et $y = y_i$ une valeur donnée $u_i$. Montrer que le polynôme $\Phi$ ainsi obtenu comprend, comme cas particulier, la formule d'interpolation de Lagrange.

3° Démontrer que tous les polynômes en $x$ et $y$ qui, pour $x = x_i$ et $y = y_i$ prennent la valeur $u_i$, peuvent être mis sous la forme

$$\Phi + Mf + NF$$

M et N étant des polynômes en $x$ et $y$.

II. Soient $f = 0$, $F = 0$ les équations de deux coniques $u$ et U, et $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de la fonction $f - \lambda F$; trouver la relation entre $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse inscrire, dans la conique $u$, un quadrilatère circonscrit à la conique U.

**1888.** Soit C la courbe, lieu géométrique des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une ellipse donnée E; et D une droite également donnée. 1° Démontrer qu'il y a trois coniques tangentes à la droite D et touchant en quatre points la courbe C. Déterminer la nature de ces trois coniques. 2° Soit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ les points où la droite D rencontre la courbe C; par deux de ces points, $\alpha_1$ et $\alpha_2$ par exemple, on fait passer une série de cercles coupant la courbe C en deux points variables M et M′; et on demande de trouver la courbe enveloppe des droites MM′. 3° On suppose la droite D tangente à l'ellipse E, et, par les points $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ où cette tangente rencontre la courbe C, on mène à l'ellipse des tangentes autres que la tangente D : trouver le lieu décrit par les sommets du quadrilatère formé par ces tangentes, quand la droite D roule sur l'ellipse E.

**1889.** Étant donnés un cercle ayant pour centre le point O et une para-

bole P, on considère toutes les coniques inscrites au quadrilatère formé par les tangentes communes au cercle O et à la parabole P.

Cela posé, on demande de trouver.

1° (*a*) L'enveloppe des polaires A, du point O, par rapport aux coniques C; (*b*) l'enveloppe des tangentes T aux coniques C, telles que les normales aux points de contact passent par le point O; (*c*) l'enveloppe des axes des coniques C.

2° Les lieux géométriques des pieds des perpendiculaires abaissées du point O, sur les polaires A, sur les tangentes T et sur les axes des coniques C.

Résultats. — Pour les enveloppes (*a*), (*b*), (*c*), on trouve la même parabole; pour les lieux géométriques (2) une strophoïde, podaire de la parabole par rapport à un point de sa directrice.

**1890.** On donne une surface du second ordre S, un point fixe A sur cette surface et une conique C, située dans un plan P. Les trois droites qui joignent le point A aux sommets $A_1$, $A_2$, $A_3$ d'un triangle T situé dans le plan P rencontrent respectivement la surface S en des points $A'$, $A'_2$, $A'_3$ autres que $A_1$.

1° Démontrer que le plan $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$ passe par un point fixe M quand le triangle T se déplace dans le plan P en restant conjugué par rapport à la conique C;

2° Trouver le lieu décrit par le point M quand la conique C varie en restant circonscrite à un quadrilatère donné;

3° Trouver le lieu décrit par le même point M quand la conique C varie en restant inscrite dans un quadrilatère donné.

**1891.** On donne une quadrique Q et une sphère S, de rayon nul, ayant pour centre le point P; soit Σ une quelconque des quadriques passant par l'intersection de la quadrique Q et de la sphère S.

1° Démontrer que le cône ayant pour sommet le point P et pour base la section de la surface Σ par un plan touchant la quadrique Q en un point quelconque M a pour un de ses axes de symétrie la droite PM;

2° Trouver le nombre des quadriques Σ qui se réduisent à de véritables cônes et les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'un de ces cônes devienne un véritable cylindre ou un système de deux plans réels.

3° La quadrique Q et le point P étant donnés, examiner si la propriété énoncée au 1° peut subsister quand on remplace la sphère-point S par une quadrique convenablement choisie.

**1892.** Une quadrique Q est circonscrite à un ellipsoïde donné E.

A étant le pôle, par rapport à l'ellipsoïde, du plan P de la courbe de contact des deux surfaces :

1° Démontrer qu'en général il y a trois quadriques $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ homofocales avec E et telles que les plans polaires $P_1$, $P_2$, $P_3$, du point A, par rapport aux surfaces $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, passent par le centre de Q.

2° Les plans $P_1$, $P_2$, $P_3$ sont les plans principaux de Q, et les coniques $C_1$, $C_2$, $C_3$ intersections des surfaces $(P_1Q_1)$; $(P_2Q_2)$; $(P_3Q_3)$ sont les focales de cette quadrique.

3° Les projections orthogonales des coniques $C_1$, $C_2$, $C_3$ sur les plans principaux de E sont des coniques homofocales. En particulier, on projettera sur le plan principal contenant les axes majeur et moyen de l'ellipsoïde E. Chercher le lieu des foyers des coniques projetées, quand Q varie, en restant circonscrite à E, le plan P de la courbe de contact ne changeant pas.

(Voyez à la fin les compositions de 1893.)

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

**1861.** D'un point P extérieur à une conique, on mène une sécante PAB. Aux points A, B, où elle rencontre la courbe, on mène des tangentes qui se coupent en M et l'on projette le point M sur la droite AB; trouver le lieu de ces projections.

Prouver: 1° que le lieu passe au point P : tangente en ce point; 2° que le lieu est le même pour toutes les coniques homofocales; 3° que le lieu peut être considéré comme le lieu des projections du point P sur certaines droites qui sont tangentes à une courbe dont on demande l'équation.

**1863.** On considère les hyperboles équilatères tangentes à une droite fixe AB en un point donné C et passant par un point D. D'un point P pris sur AB, on mène des tangentes à chacune des hyperboles et l'on demande le lieu des points de contact.

Déterminer la nature du lieu suivant la position du point D.

**1864.** Étant donnés un triangle ABC et une droite D passant par le point A, il y a une infinité de coniques passant par les points A, B, C et tangentes à la droite AD.

A chacune de ces courbes on mène des tangentes parallèles à AD; trouver le lieu des points de contact.

Ce lieu est une conique; on demande la courbe décrite par ses foyers lorsque, les points A, B, C restant fixes, la droite AD tourne autour du point A.

**1866.** Dans une ellipse donnée, on inscrit un parallélogramme ayant pour diagonales deux diamètres conjugués quelconques AA', BB'. Aux sommets de ce parallélogramme on mène les normales à l'ellipse; elles forment un second parallélogramme MN M'N.

1° Démontrer que les diagonales de chacun des deux parallélogrammes AB A'B' MN MN' sont respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre.

2° Trouver le lieu des sommets du parallélogramme MN M'N' quand on fait varier les diamètres conjugués.

3° Trouver le lieu du point d'intersection de la diagonale NN' et de la tangente en M au lieu précédent.

**1867.** On donne deux droites rectangulaires AB, CD, et l'on considère les hyperboles ayant la droite AB pour asymptote et touchant la droite CD en un point fixe P. On demande :

1° Le lieu des foyers de toutes ces hyperboles; 2° le lieu du point de rencontre de la seconde asymptote avec la perpendiculaire abaissée du point fixe sur sa direction; 3° le lieu des points d'intersection de la seconde

asymptote avec la droite qui joint le foyer au point d'intersection des deux droites données.

**1868.** On donne une ellipse et un point P situé dans le plan de la courbe. Déterminer le lieu des sommets des cônes qui ont l'ellipse pour directrice et dont l'un des trois axes de symétrie passe par le point P.

**1869.** Étant donnés un rectangle et un point P dans son plan, on mène par le point P une droite quelconque PQ et l'on imagine les deux coniques qui passent par les sommets du rectangle et touchent la droite PQ. Soient E, E' les deux points de contact et M le milieu du segment EE'; trouver le lieu décrit par le point M, quand on fait tourner la droite PQ autour du point P.

On construira le lieu dans les hypothèses suivantes : le rectangle se réduit à un carré dont le côté est $2a$, et, si l'on prend pour axes des coordonnées les parallèles aux côtés du carré menées par son centre, les coordonnées du point P sont $x = y = \frac{a}{4}$.

**1870.** Par l'axe transverse d'une hyperbole donnée, on mène un plan P faisant un angle $\alpha$ avec le plan de la courbe, puis dans le plan P, une droite OZ, perpendiculaire à cet axe transverse.

Trouver l'équation de la surface de révolution décrite par la rotation de l'hyperbole autour de OZ.

Construire la section méridienne de la surface, en supposant 1° l'hyperbole équilatère; 2° la droite OZ menée par l'un des sommets de la courbe; 3° l'angle $\alpha$ égal à 45 degrés.

**1872**[1]. Par un point fixe A, pris sur une surface du second degré donnée, on mène tous les plans qui coupent la surface suivant des courbes dont l'un des sommets est en A :

1° Trouver le lieu de celui des axes de la section qui passe par le point A;

2° Trouver le lieu du point où le diamètre conjugué du plan sécant, relativement à la surface donnée, rencontre le plan tangent à cette surface au point A;

3° Construire ce dernier lieu dans le cas où le plan tangent en A coupe la surface donnée suivant deux droites rectangulaires.

**1873.** Étant donnés une ellipse A et un point P dans son plan, de ce point P on mène des normales à l'ellipse A et l'on considère la conique B qui passe par le point P et les pieds des quatre normales :

1° Trouver les coordonnées du centre de cette conique B et celles de ses foyers.

2° Trouver le lieu C du centre et le lieu D des foyers de la conique B, lorsque l'ellipse A varie de manière que ses foyers restent fixes.

3° Trouver le lieu des points d'intersection du lieu D et de la droite OP lorsque le point P décrit un cercle de rayon donné et ayant pour centre le centre O de l'ellipse A.

**1874.** 1° Par les trois sommets d'un triangle rectangle on fait passer des paraboles. On mène à ces paraboles des tangentes parallèles à l'hypoténuse du triangle donné. On demande le lieu des points de contact.

2° Le lieu cherché est une conique qui coupe chacune des paraboles en quatre points. On demande le lieu décrit par le centre de gravité du triangle formé par les sécantes communes qui ne passent pas par l'origine.

**1875.** On considère une infinité d'ellipses semblables entre elles ayant

1. Il n'y a pas eu de concours en 1871

un sommet fixe O et la même tangente en ce point; on demande le lieu des pieds des normales menées, d'un point fixe P, à ces ellipses.

On construira le lieu, dans le cas particulier où OP est incliné de 45 degrés sur la tangente fixe donnée et en supposant, successivement, que le rapport des axes des ellipses considérées est égal à $\sqrt{3}$ ou égal à 2.

**1876.** On considère toutes les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires *ox*, *oy*, et telles que la droite PQ, qui joint leurs points de contact P et Q avec les deux droites, passe par un point fixe donné

1° On demande le lieu du point d'insersection de la normale en P à l'une de ces paraboles avec le diamètre de la même courbe passant en Q.

2° On demande de déterminer le nombre des paraboles réelles qui passent par un point quelconque du plan.

3° On demande l'équation du lieu des points de rencontre de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées et dont les axes font un angle donné.

On construira ce lieu dans le cas où l'angle donné est un angle de 45 degrés et où le point A est sur la droite *ox*.

**1877.** On considère toutes les coniques circonscrites à un triangle ABC rectangle en A, et telles que les tangentes en B et C à ces coniques aillent se couper sur la hauteur du triangle. On demande :

1° Le lieu du point de concours des normales en B et C à ces coniques;

2° Le lieu du centre de ces coniques : on distinguera les points du lieu qui sont centres des ellipses, de ceux qui sont centres des hyperboles;

3° Le lieu des pôles d'une droite quelconque D. Ce lieu est une conique. On considère toutes les droites D pour lesquelles cette conique est une parabole et l'on demande le lieu des projections du point A sur ces droites

**1878.** On donne une conique et deux points fixes A et B sur cette courbe. Une circonférence quelconque passant par les deux points A et B rencontre la conique en deux autres points variables C et D; on mène les droites AC, BD qui se coupent en M, les droites AD, BC qui se coupent en N.

Déterminer :

1° Le lieu des points M et N;

2° Le lieu des points de rencontre de la droite MN avec la circonférence avec laquelle elle correspond.

On construira les deux lieux.

**1879.** Étant donné un tétraèdre OABC défini par l'angle trièdre O et les longueurs *4a*, *4b*, *4c* des trois arêtes OA, OB, OC.

1° Démontrer que l'ellipsoïde qui admet pour diamètres conjugués les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées deux à deux, est tangent aux six arêtes du tétraèdre;

2° Trouver l'intersection de cet ellipsoide et de l'hyperboloïde engendré par une droite mobile qui s'appuie sur les trois droites :

| | | | |
|---|---|---|---|
| La première menée par le milieu de | OA | parallèlement à | OB, |
| La deuxième » | » | OB | » OC, |
| La troisième » | » | OC | » OA. |

Par chacun des points où la droite mobile rencontre la surface, on mène un plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde à l'autre point.

Démontrer que ces plans passent par le centre $\omega$ et trouver le lieu décrit par l'intersection de ces deux plans.

**1880.** Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une

génératrice rectiligne A de cette surface et la génératrice B du même système qui est perpendiculaire à la première; par les points $a$ et $b$ où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes A′ et B′ de l'autre système; soient $a'$ et $b'$ les points où les deux droites A′ et B′ sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.

1° Trouver le lieu des points $a$ et $b$, et celui des points $a'$ et $b'$, quand la droite A décrit le paraboloïde;

2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites A et B′, ou A′ et B;

3° Calculer le rapport des longueurs $a'b'$ et $ab$ des perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.

**1881.** On considère la courbe

$$27y^2 = 4x^3.$$

1° On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres $m$ et $n$ pour que la droite $y = mx + n$ soit tangente à cette courbe.

2° On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2axy = B.$$

3° Par un point A pris sur la courbe on mène des sécantes coupant cette courbe en deux points variables M et M′. On demande le lieu du milieu du segment M et M′. Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points MM′ sont réels.

**1882.** Soit un point fixe donné P ayant pour coordonnées $a$ et $b$ par rapport à deux angles rectangulaires O$x$, O$y$. et soient A et B les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur ces deux axes. On considère les courbes du second ordre tangentes aux deux axes en ces points A et B; du point P on mène à chacune de ces courbes deux normales variables PM, PM′.

1° Déterminer l'équation de la droite MM′ qui joint les pieds des normales variables, et démontrer que cette droite passe par un point fixe;

2° Déterminer l'équation de la courbe C lieu des points M et M′. Construire la courbe C, dans l'hypothèse $a = b$, au moyen de coordonnées polaires ayant le point O pour pôle.

**1883.** On donne la cissoïde qui, rapportée à des axes rectangulaires, a pour équation

$$(x^2 + y^2)\,x = ay^2.$$

Soient $x'$, $y'$ les coordonnées d'un point M du plan. On propose de former :

1° L'équation du troisième degré qui a pour racines les coefficients angulaires des droites qui joignent l'origine O aux points de contact des trois tangentes à la cissoïde issues du point M; 2° l'équation du cercle qui passe par ces points de contact.

Montrer que, si les trois tangentes sont réelles, le point M est intérieur au cercle.

On considère l'ensemble des cercles $C_m$ dont chacun jouit de cette propriété que les tangentes à la cissoïde, en trois des quatre points où ils la rencontrent, concourent en un même point; soit M ce point pour le cercle $C_m$.

On demande le lieu des centres des cercles $C_m$ qui passent par un point donné P du plan, ainsi que le lieu des points M relatifs à ces cercles. On

examinera en particulier le cas où le point P est situé sur la cissoïde et ne fait pas partie des trois points communs au cercle $C_2$ et à la cissoïde, pour lesquels les tangentes concourent.

Combien passe-t-il de cercles $C_m$ par deux points donnés P et Q du plan? Peut-on disposer de ces points de façon qu'ils appartiennent à une infinité de cercles $C_m$?

**1884.** $a$ et $b$ désignant les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M, quelle est pour chaque position de ce point la nature des racines de l'équation

$$3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0\ ?$$

On construira, en particulier, le lieu des positions du point M pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine.

**1885.** Voyez page 368. Exercice 10.

**1886.** On considère les courbes du troisième degré C, représentées par l'équation

$$x^2y + a^2x = \lambda,$$

où $\lambda$ désigne un paramètre variable.

On demande de démontrer qu'il existe deux courbes de cette espèce tangentes à une droite quelconque D du plan, ayant pour équation

$$y = mx + p,$$

et de calculer les coordonnées des deux points de contact M et M'. Distinguer les droites D, pour lesquelles ces deux points sont réels, des droites pour lesquelles ils sont imaginaires. Examiner pour quelles positions de la droite D les deux points M et M' viennent se confondre en un seul, et trouver, dans ce cas, le lieu décrit par le point de contact.

Connaissant les coordonnées $(\alpha, \beta)$ d'un point de contact M d'une courbe C avec une droite D, trouver les coordonnées $(\alpha', \beta')$ du second point de contact M' situé sur D. Construire la courbe décrite par le point M' lorsque le point M décrit la ligne droite

$$\beta = \alpha - 2a.$$

**1887.** On considère la surface (dite *cylindroïde*) qui, rapportée à des axes rectangulaires, a pour équation

$$z(x^2 + y^2) - m(x^2 - y^2) = 0.$$

Soit M un point de l'espace, dont les coordonnées sont $x'\,y'\,z'$; on propose de mener de ce point des normales au cylindroïde :

1° Désignant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées du pied de l'une quelconque des normales abaissées du point M sur le cylindroïde, on formera l'équation du quatrième degré (I) ayant pour racine les valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$, l'équation (II) ayant pour racines les valeurs de $\gamma$, et l'on montrera comment, des racines de l'une ou de l'autre de ces équations, on déduirait les coordonnés des pieds des normales cherchées.

2° Sur quel lieu doit se trouver le point M pour que l'équation (I) soit réciproque? Trouver, en supposant le point M situé sur ce lieu, les coordonnées des pieds des normales.

3° Sur quel lieu doit se trouver le point M pour que l'équation (II) ait une racine double égale à $z'$? En supposant le point M situé sur ce lieu, recon-

naître si les racines de l'équation (II), différentes de $z'$, sont réelles ou imaginaires.

4° Que représente l'équation (II) quand on y regarde l'inconnue comme une constante et $x'$, $y'$, $z'$ comme les coordonnées d'un point variable?

**1888.** Un polynôme $f(x)$ du degré $n$ vérifie l'identité

$$nf(x) = (x - a) f'(x) + bf''(x):$$

1° Chercher les coefficients de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $(x - a)$;

2° Chercher les conditions de réalité des racines;

3° Prouver que si $b_0$ est la valeur absolue de $b$, les racines de $f(x)$ sont comprises entre

$$a - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\, b_0, \qquad a + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\, b_0.$$

Construire la courbe représentée par l'équation :

$$x(x^2 - y^2)^2 + 4xy(x - y)^2 - 4y(2y - 3x) = 0.$$

**1889.** 1° Déterminer un polynôme entier en $x$ du septième degré, $f(x)$, sachant que $f(x) + 1$ est divisible par $(x + 1)^4$ et $f(x) - 1$ par $(x + 1)^4$. Quel est le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$?

2° On considère, dans un plan, une parabole (P) et une ellipse (E) représentées respectivement par les deux équations

$$(\text{P})\ y^2 - 8x = 0, \qquad (\text{E})\ y^2 + 4x^2 - 4 = 0,$$

et un point M de coordonnéss $(\alpha, \beta)$. On demande de trouver sur la parabole (P) un point Q, tel que le pôle de la droite MQ, par rapport à l'ellipse (E), soit situé sur la tangente en Q à la parabole.

Trouver le nombre des solutions réelles du problème, suivant la position du point M dans le plan.

**1890.** I. Entre les coordonnées $x$, $y$ d'un point A et les coordonnées $u$, $v$ d'un point B, on établit les relations

$$x = \frac{u^3 + \lambda uv^2}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{v^3 + \lambda vu^2}{u^2 + v^2},$$

où $\lambda$ est un nombre positif donné.

Après avoir déduit de ces relations l'équation qui relie les coefficients angulaires $\alpha$, $\beta$ des droites qui joignent l'origine aux points A, B, on montrera que, en général, à chaque point A correspondent trois positions du point B : ces points $B_1$, $B_2$, $B_3$ peuvent-ils être réels et distincts? Où le point A doit-il se trouver pour qu'il en soit ainsi? Sur quel lieu doit-il être situé pour que deux de ces points ($B_2$ et $B_3$, par exemple) soient confondus? Si le point A décrit ce lieu, quels sont les lieux décrits par les points confondus $B_2$, $B_3$ et par le point $B_1$?

**1891.** Soit E une ellipse qui, rapportée à ses axes, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et soient $x_0$, $y_0$ les coordonnées d'un point M du plan de cette ellipse; on

considère le cercle (C) passant par le point M et les points de contact P, Q des tangentes à l'ellipse issues du point M.

1° Le cercle (C) rencontre l'ellipse en deux autres points P', Q'; prouver que les tangentes à l'ellipse en ces deux points se coupent en un point M' situé sur le cercle; montrer que par M, M' et les deux foyers réels on peut faire passer un cercle; de même par M, M' et les deux foyers imaginaires.

2° Soient I, I', I'' les points où se coupent respectivement les droites PQ, P'Q', les droites PQ', P'Q, enfin les droites PP', QQ'; on suppose que le point M reste fixe et que l'ellipse (E) se déforme en gardant les mêmes foyers : on demande les lieux décrits par les points I, I', I''; on propose enfin de montrer que tout cercle passant par les points I', I'' est orthogonal au cercle décrit sur MM' comme diamètre.

1892. Un cercle C est représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(C) \qquad x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

1° On demande de former l'équation générale des coniques A qui sont doublement tangentes au cercle C, de telle façon que la corde qui joint les deux points de contact passe par l'origine des coordonnées, et qui sont en outre tangentes à la droite D ayant pour équation

$$y = x\sqrt{3} + \sqrt{3}.$$

2° Par un point quelconque M du plan, de coordonnées $\alpha$, $\beta$, il passe en général deux coniques de cette espèce A', A''; où le point M doit-il se trouver pour que ces coniques soient réelles?

3° Les deux coniques A', A'' qui passent au point M ont trois autres points communs $M_1$, $M_2$, $M_3$, dont on demande de calculer les coordonnées en fonction des coordonnées $\alpha$, $\beta$ du point M.

4° Former l'équation de l'hyperbole équilatère H, qui passe par les quatre points M, $M_1$, $M_2$, $M_3$, et montrer que cette hyperbole passe par quatre points fixes, quand le point M se déplace.

5° Trouver le lieu des points d'intersection des deux coniques A', A'' et l'enveloppe de leurs sécantes communes, lorsque les cordes de contact de ces deux coniques avec le cercle C sont perpendiculaires. — Quelle est, dans ce même cas, l'espèce des coniques A', A''?

*N. B.* — On prendra pour paramètre variable le coefficient angulaire $m$ de la corde de contact de la conique A avec le cercle C.

## ÉCOLE CENTRALE

1880. (*Première session.*) Soient $Ox$, $Oy$, deux axes rectangulaires et sur $Ox$ un point A, sur $Oy$ un point B. On mène par le point A une droite quelconque AR, de coefficient angulaire $m$.

1° Former l'équation de l'hyperbole A qui est tangente à l'axe $Ox$ au point O, qui passe par le point B, et pour laquelle AR est une asymptote.

2° On fait varier $m$ et on demande le lieu décrit par le point de rencontre de la tangente en B à l'hyperbole H et de l'asymptote AR.

3° On considère le cercle circonscrit au triangle AOB; ce cercle coupe l'hyperbole H aux points O et B, et en deux autres points P et Q. Former l'équation de cette droite PQ; puis, faisant varier $m$, trouver successivement les lieux des points de rencontre de cette droite PQ avec les parallèles menées par le point O, soit à l'asymptote AR, soit à la seconde asymptote de l'hyperbole H.

1880. (*Deuxième session.*) 1° Écrire l'équation générale des paraboles

passant par deux points donnés A et B et dont les diamètres ont une direction donnée;

2° Donner l'expression des coordonnées du sommet et du foyer de ces paraboles;

3° On mène à chaque parabole une tangente perpendiculaire à la droite AB, trouver le lieu des points de contact et construire ce lieu.

**1881.** (*Première session.*) Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation d'une ellipse rapportée à son centre O et à ses axes; soient $\alpha$, et $\beta$, les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

1° Démontrer que les pieds des normales menées à cette ellipse par le point P sont situés sur l'hyperbole représentée par l'équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

dans laquelle $c^2 = a^2 - b^2$;

2° On considère toutes les coniques qui passent par les points A, B, C, D, communs à l'ellipse proposée et à cette hyperbole; dans chacune d'elles on mène le diamètre conjugué à la direction OP et on projette le point O sur ce diamètre : trouver le lieu de cette projection;

3° Par les points A, B, C, D, on peut faire passer deux paraboles : trouver le lieu du sommet de chacune d'elles quand le point P se meut sur une droite de coefficient angulaire donné $m$, menée par le point O.

On examinera le cas particulier où $m = \frac{a^3}{b^3}$ et celui où $m = -\frac{a^3}{b^3}$.

**1881.** (*Seconde session.*) On donne une parabole ($y^2 = 2px$) rapportée à son axe et à son sommet et un point $P(\alpha, \beta)$ dans le plan de la courbe.

1° Démontrer que, du point P, on peut en général mener trois normales à la parabole : former l'équation du troisième degré qui donne les ordonnées des pieds A, B, C de ces normales;

2° Démontrer que chacune des deux courbes

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0,$$
$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0$$

passe par les quatre points A, B, C, P, et trouver l'équation générale de toutes les coniques passant par ces quatre points;

3° Chacune de ces coniques coupe la parabole donnée aux trois points fixes A, B, C, et un quatrième point D, trouver les coordonnées du point D;

4° Par le sommet de la parabole donnée, on imagine deux droites parallèles aux asymptotes de l'une quelconque des coniques précédentes; on mène la droite joignant les points d'intersection de ces deux droites avec la conique, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec la parallèle DD menée à l'axe de la parabole par le point D.

Former et discuter l'équation du lieu de ce point de rencontre.

**1882.** (*Première session.*) Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et soient $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées d'un point P situé dans le plan de l'ellipse.

Former l'équation générale des coniques qui passent par les points de contact M et M' des tangentes menées du point P à l'ellipse et par les points Q et Q' où cette ellipse est rencontrée par la droite qui correspond à l'équation $\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \mu = 0$.

Disposer du paramètre $\mu$ et de l'autre paramètre variable que contient l'équation générale, de manière qu'elle représente une hyperbole équilatère passant par le point P.

On fait mouvoir le point P sur la droite représentée par l'équation $x + y = l$, et l'on demande :

1° Le lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse sur QQ';

2° Le lieu décrit par le point de concours des cordes MM' et QQ'.

Démontrer que ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit $l$, et déterminer ces points.

Chercher pour quelles valeurs de $l$ ce lieu se réduit à deux droites, et déterminer ces droites.

**1882.** (*Seconde session.*) On donne dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires, O$x$, O$y$, et deux points H et H', le premier défini par ses coordonnées $a$ et $b$, et le second symétrique du premier par rapport au point O. Par ce dernier point O on mène une droite indéfinie DOE, formant avec l'axe O$x$ un angle D$\mathrm{O}x = \theta$, on projette les points H et H' sur cette droite en $h$, $h'$. On projette le point $h$ en $u$ sur l'axe O$x$, et le point $u$ en $u_1$ sur la droite DOE; on projette le point $h$ en $v$ sur l'axe O$y$, et le point $v$ en $v_1$ sur la droite DOE; toutes ces projections sont orthogonales. Enfin, sur la longueur $u_1 v_1$ comme hypothèse, on construit un triangle rectangle $u_1 v_1$ S, en menant $u_1$S parallèle à O$x$, et $v_1$S parallèle à O$y$. Cela posé, on demande :

1° De trouver les coordonnées du point S, en fonction des trois constantes $a, b, \theta$;

2° D'écrire l'équation d'une parabole ayant le point S pour sommet et la droite DOE pour directrice;

3° De démontrer que le lieu des foyers de toutes les paraboles, en faisant varier l'angle $\theta$, se compose d'un système de circonférences de cercle :

4° De démontrer que toutes ces paraboles sont tangentes aux axes de coordonnées;

5° De demontrer que les cordes de leurs contacts avec ces axes se croisent en un même point.

**1884.** (*Première session.*) On donne l'équation $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$, d'une hyperbole rapportée à son centre et à son axe, et l'équation $y - \mathrm{K}x = 0$ d'une droite menée par le centre de cette hyperbole.

I. Former l'équation générale des coniques qui passent par les points réels ou imaginaires communs à l'hyperbole et à la droite données, et qui de plus sont tangentes à l'hyperbole en celui des deux sommets de cette hyperbole qui est situé sur la partie positive de l'axe des $x$. Discuter cette équation générale et reconnaître la nature des coniques qu'elle peut représenter.

II. Trouver le lieu des centres des coniques représentés par l'équation générale précédente. Ce lieu est une conique $\Delta$, chercher un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer géométriquement cette conique $\Delta$.

III. Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à la conique $\Delta$, parallèlement à la droite de coefficient angulaire $\frac{b}{a}$, quand on ait varier K. — On vérifiera que l'équation de ce dernier lieu, qui est du troisième degré, représente trois droites.

**1885.** On donne deux axes rectangulaires $ox$, $oy$ et le cercle représenté par l'équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

On considère la corde fixe AB menée par l'origine et partagée par ce point en deux parties égales, et une corde mobile CD, de direction constante dont le coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de la corde fixe AB.

On sait que, par les quatre points A, B, C, D, on peut faire passer deux paraboles P, P'.

Trouver, quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même :

1° Le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles P et P'.

2° Le lieu du sommet et le lieu du foyer de chacune de ces paraboles.

**1885-2.** On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires $ox$, $oy$ et une droite AB définie par son coefficient angulaire $m$ et son ordonnée à l'origine $b$ et l'on demande :

1° De trouver la direction des diamètres des paraboles tangentes à l'axe des $y$ au point B où il est coupé par la droite AB et ayant leurs foyers sur cette dernière droite ;

2° D'écrire l'équation générale de ces courbes;

3° De construire le lieu de leurs sommets;

4° De construire le lieu des points où leurs tangentes sont parallèles à l'axe des $x$;

5° De construire le lieu des pôles de l'axe des $x$ relativement aux paraboles considérées.

(En d'autres termes, par les deux points d'intersection de chaque parabole avec l'axe des $x$, on mène des tangentes à la courbe et on demande de trouver le lieu des points d'intersection de ces tangentes).

**1886.** (*Première session.*) On donne une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et, dans son plan, un point P dont les coordonnées sont $\alpha$ et $\beta$, et l'on considère toutes les paraboles bitangentes à l'ellipse en des points tels que la corde des contacts passe par le point P :

1° Former l'équation générale de ces paraboles;

2° Montrer que, en général, par tout point Q du plan, passent deux des paraboles considérées, et reconnaître que les régions du plan, dans lesquelles doit se trouver le point Q pour que ces deux paraboles soient réelles, sont limitées par l'ellipse donnée et par une droite;

3° Trouver le lieu des positions que doit occuper le point Q pour que les axes des deux paraboles considérées qui passent par ce point soient rectangulaires;

4° Trouver le lieu du point de rencontre de l'axe de chacune des paraboles considérées avec la corde des contacts de cette parabole et de l'ellipse. L'équation de ce lieu est du quatrième degré; on transportera les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes, en prenant pour nouvelle origine le point P, et, cela fait, on montrera que l'équation du lieu peut être décomposée en deux équations de second degré.

**1886-2.** Soit un rectangle OACB dont les côtés $OA = a$ et $OB = b$, prolongés, sont pris, le premier pour axe des $x$, le second pour axe des $y$. On considère toutes les coniques qui passent par les trois points O, A, B, et pour lesquelles la polaire du point C est parallèle à la droite AB.

1° Former l'équation générale de ces coniques. Trouver le lieu de leur centre, et, sur ce lieu, séparer les parties qui contiennent des centres d'ellipses de celles qui contiennent des centres d'hyperboles.

2° A chacune de ces coniques, on mène la normale au point A et la

normale au point B; trouver le lieu du point de rencontre de ces deux normales.

3° Soit $\Delta$ une quelconque des coniques considérées; si, par le point C, on mène à cette conique des normales, on sait que les pieds de ces normales sont les points de rencontre de la conique $\Delta$ et d'une certaine hyperbole équilatère. Former l'équation de cette hyperbole équilatère, et chercher le lieu du centre de cette hyperbole, quand la conique $\Delta$ varie.

**1887-1.** On considère toutes les coniques qui ont un foyer en un point donné F, et qui passent par deux points donnés A et B.

1° Montrer que ces coniques forment deux séries telles que, pour toute conique d'une série, la directrice correspondant au foyer F passe par un point fixe de la droite AB, situé entre A et B, tandis que pour toute conique de l'autre série la directrice correspondant au foyer F passe par un point fixe de la droite AB, non situé entre A et B.

2° Trouver le lieu des centres des coniques considérées et montrer qu'il se compose de deux coniques homofocales.

3° Prenant un point C sur le lieu précédent, reconnaître, d'après la position qu'il occupe sur ce lieu, si la conique considérée dont le point C est centre est telle que les points A et B sont sur une même branche ou sur deux branches différentes de cette conique.

4° Si le point C est tel que les points A et B sont sur une même branche de la conique considérée, reconnaître, d'après la position du point C, si cette conique est du genre ellipse, ou du genre hyperbole, et, dans ce dernier cas, si les points A et B sont sur la branche voisine du point F, ou sur l'autre.

*Nota.* — On prendra pour axe des $x$ la droite AB et pour axe des $y$ la perpendiculaire à cette droite menée par le milieu de AB.

**1887-2.** On donne deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$, un point A sur $Ox$, un point B sur $Oy$,

$$OA = a, \quad OB = b.$$

1° Écrire l'équation générale des paraboles qui passent par les trois points O, A, B. Montrer qu'en général il passe par chaque point M du plan deux de ces paraboles. Trouver le lieu des points M pour lesquels les deux paraboles sont confondues, et indiquer la région du plan qui contient les points où il n'en passe aucune réelle.

2° Trouver le lieu des points M tels que les axes des deux paraboles qui y passent forment entre eux un angle donné $\alpha$. Construire le lieu pour le cas où $\alpha = 90°$.

3° Trouver le lieu du point de chacune de ces paraboles pour lequel la tangente est parallèle à OB, celui du point où la tangente est parallèle à OA, celui où la tangente est parallèle à AB.

Ces lieux sont trois coniques. Construire ces coniques, vérifier que deux quelconques d'entre elles n'ont pas de point commun réel à distance finie; marquer leurs centres D, E, F, et comparer le triangle DEF au triangle OAB.

4° On joint l'origine O au point F, centre de la conique, lieu du point de contact des tangentes parallèles à AB; et, à cette droite OF, on élève au point O une perpendiculaire qui rencontre la droite AB en P. On

demande le lieu du point P lorsque, le point A restant fixe, le point B parcourt l'axe des $y$.

**1888-1.** Étant donnés deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et un point A sur l'axe des $x$, on considère le faisceau des coniques pour lesquelles l'axe des $y$ est une directrice et le point A un sommet de l'axe focal. Par un point quelconque M du plan des axes passent deux coniques de ce faisceau, réelles ou imaginaires.

1° Déterminer les parties du plan dans lesquelles doit être le point M pour que les deux coniques du faisceau qui passent par ce point soient réelles, et celles où il doit être pour que les deux coniques soient imaginaires. (La ligne de séparation est de degré supérieur au second.)

2° Reconnaître, d'après la position d'un point par lequel passent deux coniques réelles, le genre de ces coniques.

3° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées de l'origine des coordonnées à toutes les coniques du faisceau considéré.

**1888-2.** On donne une ellipse rapportée à ses axes

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

et, dans son plan, un point P $(p, q)$ par lequel on mène deux droites parallèles aux bissectrices des angles des axes. On considère toutes les coniques passant par les points d'intersection de ces droites avec l'ellipse donnée. Écrire l'équation générale de ces coniques; trouver le lieu de leurs centres et distinguer les portions de cette courbe qui correspondent à des centres d'ellipse ou à des centres d'hyperbole.

On prend la polaire de l'origine des coordonnées par rapport à chacune des coniques et on abaisse, du point P, une perpendiculaire sur cette polaire. Trouver le lieu des pieds de ces perpendiculaires. — Parmi les coniques considérées se trouvent deux paraboles; trouver leurs foyers pour une position donnée du point P et les lieux de ces foyers lorsque le point P parcourt : 1° une des bissectrices des axes de l'ellipse donnée; 2° la circonférence circonscrite au rectangle des axes de cette ellipse.

**1889-I.** Soient $Ox$, $Oy$ deux axes rectangulaires et une droite LL′ parallèle à $Oy$ dont l'équation est $x - a = 0$. On considère le faisceau des paraboles qui passent par le point O et qui ont la droite LL′ pour directrice.

1° Trouver le lieu du foyer et le lieu du sommet de chacune de ces paraboles.

2° Par un point quelconque du plan $xOy$ passent deux des paraboles considérées, réelles ou imaginaires; déterminer la région du plan dans laquelle doit être ce point pour que les deux paraboles soient réelles.

3° Étant données les coordonnées d'un point M du plan $xOy$, former l'équation qui a pour racines les coefficients angulaires des tangentes au point O aux deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point M. En déduire l'équation de la ligne S sur laquelle doit se trouver le point M pour que les tangentes au point O aux deux paraboles du faisceau qui passent au point M soient rectangulaires.

4° Soit M un point situé sur la ligne S, et soient F, F′, les foyers des deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point, démontrer

que, lorsque le point M se déplace sur la ligne S, la droite FF' tourne autour d'un point fixe.

**1889-II.** 1° Démontrer que les coniques représentées par l'équation

$$(A)\ (1-m^2)x^2+y^2+2mrx-r^2=0,$$

où l'on suppose $m$ variable, ont deux points communs et que, si les axes de coordonnées sont rectangulaires, elles ont en outre un foyer commun.

2° Trouver l'équation (B) de la conique assujettie aux conditions suivante : passer par l'origine, être tangente à une des coniques représentées par (A) en un point P ($x'$, $y'$) pris sur cette courbe et enfin passer par les deux projections du point P sur les axes de coordonnées.

3° Trouver le lieu des points de contact, avec les courbes représentées par (A), des tangentes issues d'un point ($x=0$, $y=h$) de l'axe des $y$, lorsqu'on fait varier $m$.

4° Trouver le lieu des centres des courbes (B) correspondantes à une courbe fixe (A) quand on fait varier la position du point P sur cette courbe.

5° Discuter l'équation (B) en supposant que l'on déplace le point P sur une des courbes représentées par l'équation (A); séparer les parties qui répondent à des ellipses, celles qui répondent à des hyperboles, et trouver le lieu des points de séparation lorsque l'on fait varier $m$.

**1890.** *Première session.* — On donne deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ et deux points A et B symétriques par rapport au point O.

1° On prend, sur l'axe des $x$, un point quelconque P et l'on considère la parabole (P) qui est tangente aux droites PA et PB au point A et au point B. Lieu du foyer et lieu du sommet de cette parabole quand P parcourt $x'Ox$.

2° On prend sur l'axe des $y$ un point quelconque Q, et l'on considère la parabole (Q) qui est tangente aux droites QA, QB au point A et au point B. Ces deux paraboles (P) et (Q) qui correspondent ainsi à un point P pris sur $x'Ox$ et à un point Q sur $y'Oy$ se coupent aux points A, B et en deux autres points C, D. Former l'équation de la droite CD et trouver le lieu décrit par les points C, D, quand P, Q se déplacent l'un sur $x'Ox$, l'autre sur $y'Oy$, de façon que l'abscisse du premier soit toujours égale à l'ordonnée du second.

*Seconde session.* — On donne une parabole rapportée à deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$; cette parabole a son axe parallèle à l'axe des $y$; elle passe par l'origine et par un point pris sur $Ox$ et dont l'abscisse est $l$; enfin elle admet une ordonnée maxima égale à $f$.

On donne, en outre, une droite passant par l'origine et par un point A ($x=l$, $y=h$).

1° Démontrer que si, pour une abscisse déterminée, on porte en ordonnée la somme algébrique de l'ordonnée de la droite et de celle de la parabole correspondant à cette abscisse, l'extrémité de cette ordonnée est sur une parabole (P), égale à la première;

2° Démontrer que les axes des coniques qui passent par l'intersection d'un cercle et d'une conique sont parallèles aux axes de celle-ci;

3° Une circonférence de cercle décrite sur OA, comme diamètre, coupant la parabole (P) en quatre points O, A, B, C, chercher le lieu du point d'intersection des sécantes communes OA. BC, quand on fait varier $h$ et construire ce lieu qui n'est pas du deuxième degré.

4° Chercher la valeur du rapport $\frac{l}{f}$ pour laquelle le cercle décrit sur OA comme diamètre est tangent à la parabole, quel que soit $h$.

1891. *Première session.* — On donne deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et sur l'axe de $x$ un point A dont l'abscisse est $a$. On considère le faisceau des ellipses pour lesquelles le point O est un sommet d'axe non focal, et la parallèle à l'axe des $y$, menée par le point A, une directrice.

I. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses du faisceau considéré passent par un point donné P, est que ce point soit à l'intérieur du cercle qui a le point O pour centre et OA pour rayon.

II. Démontrer que ce cercle a un double contact, réel ou imaginaire, avec chacune des ellipses du faisceau.

III. Limiter les régions du plan dans lesquelles doit être situé un point P :

1° Pour qu'*une seule* des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point ait, avec le cercle, un double contact réel ;

2° Pour que *chacune des deux ellipses* du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel ;

3° Pour qu'*aucune* des deux ellipses n'ait avec le cercle un double contact réel.

IV. Lieu des pieds des normales menées, par le point O, à toutes les ellipses du faisceau.

*Seconde session.* — On donne deux axes rectangulaires et un cercle C passant par l'origine et dont le centre a pour coordonnées $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$. Dans ce cercle, on mène deux cordes de longueurs $d$ passant par l'origine. D'un point de l'axe $x$, dont l'abscisse est $p$, on mène des droites perpendiculaires à ces cordes.

1° Trouver l'équation $\Delta$ du lieu des points tels que le produit de leurs distances aux cordes soit dans un rapport donné $\lambda$ avec le produit de leurs distances aux droites perpendiculaires à ces cordes ; lieu des centres des coniques représentées par l'équation $\Delta$, quand $\lambda$ varie ;

2° Discuter la nature des coniques représentées par l'équation $\Delta$ ;

3° Le rapport $\lambda$ étant choisi de façon que la conique $\Delta$ devienne un cercle, trouver le lieu du centre de la courbe lorsque le centre du cercle C décrit l'hyperbole $x^2 + nxy = \frac{d^2}{4}$.

1892. *Première session.* — On donne dans un plan deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et une droite D dont l'équation est $Ax + By + C = 0$ ; sur cette droite, on prend un point quelconque M de coordonnées $a$, $b$, et à ce point on fait correspondre les deux paraboles qui ont toutes deux le point O pour foyer et l'une la droite $x = a$, l'autre la droite $y = b$ pour directrice.

1° Démontrer que ces deux paraboles ont, en général, deux points communs réels et deux points communs imaginaires, et former, selon la position du point M de la droite D, l'équation de la droite qui passe par les deux points réels communs aux deux paraboles ;

2° Trouver le lieu des points communs aux deux paraboles que l'on fait ainsi correspondre à un point M, quand ce point M parcourt la droite D. Ce lieu se compose, en général, d'une ellipse et d'une hyperbole ; distinguer, sur la droite D, la partie que parcourt le point M quand les points

communs aux deux paraboles sont sur l'ellipse, de celles qu'il parcourt quand ces points sont sur l'hyperbole ;

3° Vérifier analytiquement et expliquer géométriquement les faits suivants :

Soit P le point de rencontre de la droite D avec l'un des axes, et soient. sur l'autre axe, de part et d'autre du point O, les points P′ et P″ tels que l'on ait $OP' = OP'' = OP$. L'une des deux coniques du lieu passe par P′ et l'autre par P″, et les tangentes au lieu, au point P′ et au point P″ sont les droites PP′, PP″.

Construire le lieu en supposant que l'équation de la droite D est

$$x + 2y + 2 = 0.$$

4° Le lieu demandé est, en général, composé d'une véritable ellipse et d'une véritable hyperbole ; trouver les divers cas particuliers pour lesquels il en est autrement, et, dans chacun de ces cas, reconnaître ce que deviennent les deux coniques du lieu.

*Seconde session.* — On donne deux circonférences dont les centres sont O et C, $OC = a$.

Par le point A $(p.\ q)$ d'intersection de ces deux circonférenees, on mène deux sécantes BAE et DAC ayant une longueur commune $2l$. Ces deux sécantes coupent l'axe des $y$ et sa parallèle, menée par C, en des points M, N et P, Q.

1° On demande de former l'équation générale des coniques passant par les quatre points M, N, P, Q;

2° On assujettit les coniques à passer par un point du plan ; reconnaître le genre de la conique d'après la position du point ;

3° Trouver le lieu des centres de ces coniques ;

4° Trouver le lieu du point de rencontre des droites BC et DE, quand on fait varier la longueur $2l$. (Voyez à la fin pour 1893.)

## AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

**1859.** Trouver le lieu géométrique des points dont les distances à deux droites données (non situées dans un même plan) ont entre elles un rapport constant.

Quelles sont les surfaces du second degré auxquelles s'applique ce mode de génération, et quelle est la situation des deux droites à l'égard de ce surfaces?

**1860.** Trouver et discuter l'équation de la surface engendrée par une parabole du second degré qui se meut parallèlement à elle-même, de manière que, dans chacune des positions de son plan, elle rencontre en deux points une autre courbe du second degré *fixe et donnée en dehors de ce plan.*

**1861.** Étant donnés un triangle ABC et un point P situé dans son plan, on mène par ce point une droite quelconque qui rencontre les côtés du triangle ou leurs prolongements en A′, B′, C′ ; puis on prend sur cette droite un point M tel que l'on ait

$$\frac{PB' + MB'}{PC' + MC'} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{A'C'}^2}$$

On demande le lieu géométrique du point M.

On s'assurera d'abord que l'équation du lieu contient un facteur linéaire.

**1862.** Étant données deux droites non situées dans un même plan, on fait passer par ces droites un parabole hyperbolique auquel on mène un

plan tangent parallèle à un plan fixe et donné. On demande le lieu du point de contact.

**1863**. Trouver le lieu d'une droite s'appuyant sur un cercle et sur deux droites fixes qui rencontrent le cercle. Dans quel cas les plans qui passent par une génératrice et par les deux droites fixes sont-ils constamment rectangulaires? Trouver dans ce cas les secondes sections circulaires de la surface.

**1864**. Sur le grand axe d'une ellipse, on décrit un cercle dans lequel on trace deux rayons OP, OQ, faisant entre eux un angle constant : on projette P et Q en D et E sur l'ellipse : en D on élève perpendiculairement au plan de l'ellipse une droite de longueur constante $h$ dont on joint l'extrémité au point E; lieu de cette dernière droite, quand l'angle constant POQ tourne autour de son sommet.

**1865**. Étant donnée une sphère, dont le rayon sera pris pour unité, et un cylindre droit ayant pour base une ellipse de même centre que la sphère, et dont les axes seront représentés par les constantes $\sin. a$ et $\sin. b$, démontrer : 1° qu'il existe sur la sphère deux points F et F' tels que la somme des arcs de grands cercles MF et MF', aboutissant à un point quelconque M de la courbe d'intersection, est constante; 2° que ces deux arcs font des angles égaux avec la tangente au point M.

Construction graphique des deux points F et F'; examen du cas particulier où la somme MF + F' est égale à une circonférence de grand cercle.

**1866**-1. On donne deux paraboloïdes hyperboliques, semblables, semblablement placés et ayant le même axe principal. On mène à l'une de ces surfaces des plans tangents qui coupent l'autre suivant des hyperboles équilatères; on demande le lieu des points de contact de ces plans.

**1866-2**. Présenter géométriquement (dans la partie du cours relative aux courbes usuelles) les propriétés principales des diamètres conjugués et des cordes supplémentaires de l'ellipse.

**1867**. Une ellipse et une droite étant données dans un même plan, on propose de trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à l'ellipse interceptent sur la droite une longueur constante.

**1868**. Étant données dans un plan deux paraboles du deuxième degré, on les fait tourner autour de leurs sommets supposés fixes, de manière que, dans chacune de leurs positions, leurs quatre points d'intersection soient sur une circonférence, et l'on demande le lieu du centre de cette circonférence.

**1869**. On donne une série de surfaces du second ordre, homofocales et à centre : d'un point fixe P, pris dans l'un de leurs plans principaux, on abaisse des normales sur ces diverses surfaces, et l'on demande :

1° De trouver et de construire le lieu des pieds de ces normales;

2° De déterminer l'enveloppe des plans tangents menés aux surfaces par les pieds des normales.

**1871**[1]. On donne trois points fixes A, B, C : on demande de trouver le lieu des centres des ellipsoïdes de révolution pour lesquels ces trois points fixes sont les extrémités des trois diamètres conjugués.

**1872**. On donne deux droites fixes $\Delta$ et $\Delta'$ qui ne se rencontrent pas; par ces deux droites on fait passer des surfaces (S) du second ordre, pour

1. Il n'y a pas eu de concours en 1870.

lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes ainsi que le produit de ces mêmes longueurs sont des quantités constantes et données.

1° Trouver le lieu des centres des surfaces (S).

2° Considérant une quelconque des surfaces (S) et le centre I de cette surface, on mène par le point I une droite rencontrant les deux droites fixes en D et D'; calculer la distance DD'.

3° Par les points D et D', on mène des plans respectivement perpendiculaires aux droites $\Delta$ et $\Delta'$; trouver le lieu des intersections de ces plans.

**1873.** On donne un hyperboloïde à une nappe, sur lequel on prend une génératrice déterminée G. En un point quelconque P de cette génératrice, on mène la normale à la surface; on suppose que cette normale, considérée comme un rayon incident, se réfléchit, suivant la loi connue, sur le plan de l'ellipse de gorge. On demande : 1° la surface engendrée par le rayon réfléchi, lorsque le point P se déplace sur la génératrice G; 2° l'enveloppe des sphères ayant pour centre le point d'incidence et pour rayon la distance du point d'incidence au point P.

**1874.** On donne une ellipse et une hyperbole homofocales; on imagine une conique quelconque C, doublement tangente *à chacune* des coniques données. On demande de trouver et de discuter le lieu des points de rencontre des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole aux points où ces courbes sont touchées par la conique variable C.

**1875.** A un ellipsoïde donné on circonscrit une série de surfaces du second ordre $\Sigma$, la courbe de contact étant l'intersection de l'ellipsoïde par un plan fixe P. On circonscrit ensuite à chaque surface $\Sigma$ un cône ayant pour sommet un point donné A :

1° Trouver le lieu des courbes de contact des cônes et des surfaces $\Sigma$ :

2° Classer les surfaces qui forment le lieu, quand on suppose le plan P fixe et le point A mobile dans l'espace.

(*On déterminera, pour chacune des variétés du lieu, les surfaces qui limitent les régions de l'espace où se trouve alors le point* A.)

**1876.** On donne une parabole P et un point H dont la projection orthogonale sur le plan de la parabole se fait au sommet de cette parabole :

1° Trouver l'équation générale des surfaces de révolution du second ordre qui passent par la parabole P et par le point H.

2° Déterminer le nombre de celles de ces surfaces dont l'axe passe par un point A donné dans le plan Q, qui contient le point H et l'axe de la parabole P.

Classer les mêmes surfaces quand le point A se meut dans le plan Q.

**1877.** On donne un ellipsoïde et un point A :

1° Trouver un point B tel que, en menant par ce point un plan *quelconque* P, la droite AB soit toujours l'un des axes du cône qui a pour sommet le point A et pour base la section de l'ellipsoïde par le plan P.

2° Le problème a, en général, trois solutions : trouver pour quelles positions du point A le nombre des solutions devient infini.

3° Le point A restant fixe, on suppose que l'ellipsoïde se déforme de façon que trois sections principales conservent les mêmes foyers, et l'on demande le lieu que décrit alors le point B.

**1878.** On donne une sphère S, un plan P et un point A; par le point A on mène une droite qui rencontre P en un point B; puis sur AB comme

diamètre on décrit une sphère S′ ; le plan radical des sphères S et S′ rencontre la droite AB en un point M.

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand la droite AB tourne autour du point A.

2° Discuter le lieu précédent, en supposant que le point A se déplace dans l'espace, le plan P et la sphère S restant fixes.

**1879**. On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. On considère un paraboloïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan P de la courbe de contact passe par A. Soit M le point d'intersection de ce paraboloïde avec celui de ses diamètres qui passe par A ; soit Q le point de rencontre de P avec la droite qui joint le point M au pôle du plan P, par rapport à l'hyperboloïde.

Le plan P tournant autour de A, on demande :

1° Le lieu du point M ;

2° Le lieu du point Q. Ce second lieu est une surface du second degré S, que l'on discutera en faisant varier la position du point A dans l'espace ;

3° Le lieu des positions que doit occuper le point A, pour que S soit de révolution.

**1880**. On donne un ellipsoïde et l'on considère un cône ayant pour base la section principale de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe mineur ; ce cône coupe l'ellipsoïde suivant une seconde courbe située dans un plan Q.

1° Le sommet du cône se déplaçant dans un point donné P, trouver le lieu décrit par le pôle de R, par rapport à l'ellipsoïde.

2° Ce lieu est une surface du second degré $\Sigma$ ; on demande de déterminer les positions du plan P pour lesquelles le cône asymptote de $\Sigma$ a trois génératrices parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.

3° Le plan P se déplaçant de façon que $\Sigma$ satisfasse aux conditions précédentes, trouver le lieu des foyers des sections faites dans ces surfaces $\Sigma$ par un plan fixe R perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde.

4° Trouver la surface engendrée par la courbe, lieu de ces foyers, quand le plan R se déplace, parrallèlement à lui-même.

**1881**. Voyez page 685. Exercice 6.

**1882**. On donne une ellipse et un point P dans son plan :

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse tels que chacune des cordes communes à l'ellipse et à ses différents cercles passe par le point P ;

2° Trouver pour chacune des positions du point P combien de ces cercles sont réels ;

3° Démontrer que les points de contact de l'ellipse et des cercles osculateurs sont sur un même cercle C ;

4° Trouver l'enveloppe E des cercles C, quand le point P décrit l'ellipse donnée ;

5° La courbe E peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe et dont les centres sont une conique. Chercher de combien de manières différentes est susceptible ce mode de génération.

**1883**. D'un point donné P on mène des normales à un ellipsoïde donné.

1° Démontrer que par les pieds de ces six normales on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre S concentriques à l'ellipsoïde ;

2° Trouver le lieu que doit décrire le point P pour que les surfaces S soient de révolution ;

3° Déterminer le cône lieu des axes de révolution des surfaces S ;

4° Sur la section de ce cône par un plan perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface S est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou deux nappes, un cône, un cylindre ou un système de deux plans parallèles.

**1884.** On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P, Q et pour chacune desquelles la droite d'intersection des plans P et Q est un axe de symétrie.

1° On considère tous les plans R tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole et l'on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre S tangentes à la fois à tous les plans R.

2° Trouver le lieu des centres des surfaces S et déterminer la nature de chacune de ces surfaces, suivant la position occupée par son centre.

3° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces S soient homofocales.

**1885.** 1° On donne une sphère S et, sur cette sphère, un cercle C et un point T; démontrer qu'il y a deux paraboloïdes passant par le cercles C et tangents à la sphère au point T.

2° Démontrer que les axes de ces paraboloïdes sont dans un même plan et trouver le lieu de leur point d'intersection quand le point T se meut sur la sphère.

3° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des sommets de ces paraboloïdes.

4° Soient T et T' deux points diamétralement opposés sur la sphère. Au point T correspondent deux paraboloïdes P et Q; au point T' correspondent deux autres paraboloïdes P' Q'. — Trouver le lieu engendré par la courbe d'intersection de chacun des paraboloïdes P et Q avec chacun des paraboloïdes P' et Q' quand on fait varier la direction du diamètre T T'

**1886.** Étant donnés dans un plan une droite D, un point O sur cette droite et une droite D' :

1° Former l'équation générale des coniques qui touchent la droite D au point O et qui ont D' pour directrice ;

2° Démontrer que deux de ces coniques passent par un point quelconque P du plan; déterminer les régions du plan où doit se trouver le point P pour que ces deux courbes soient réelles et, dans ce cas, en reconnaître le genre ;

3° Les deux coniques du faisceau considéré se coupent en outre en un point P'; calculer les coordonnées du point P' en fonction de celles du point P et, en supposant que le point P décrive une ligne C, trouver quelle doit être la forme de l'équation de cette ligne pour que le point P' décrive la même ligne.

**1887.** 1° Démontrer que le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à une conique S soient conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées du même point à une autre conique S', est une troisième conique Σ qui passe par les points de contact A, B, C, D et A', B', C', D', des tangentes communes aux deux coniques S et S'.

2° La conique S étant une ellipse donnée, et la conique Σ un cercle donné, trouver l'équation de la conique S'.

3° Démontrer qu'il existe quatre cercles réels passant chacun par deux des foyers de la conique S et deux des foyers de la conique S'.

4° Soient A et A' les points de contact des coniques S et S' avec une de

leurs tangentes communes; démontrer que si le point A' est la projection du centre de la conique S sur la tangente AA', les normales à la conique S', aux points B', C', D', se coupent en un point M qui reste fixe quand le cercle Σ varie en passant constamment par les points A et A'.

**1888.** On donne un ellipsoïde S et deux points P et P'; et l'on considère les ellipses C et C', suivant lesquelles l'ellipsoïde est coupé par les plans polaires des points P et P'.

1° Démontrer que les coniques C, C' et les points P, P' sont situés sur une quadrique Σ qui est, en général, unique.

2° Discuter cette quadrique, en supposant que le point P' se déplace dans l'espace, le point P et l'ellipsoïde S restant fixes.

3° Les points P et P' étant supposés fixes et situés de façon que la quadrique Σ soit indéterminée, trouver le lieu du centre de cette quadrique.

4° En supposant que les points P et P' se déplacent de façon que la quadrique Σ soit une sphère, trouver la surface enveloppe E de cette sphère.

5° Peut-on déterminer un point A tel que la transformée par rayons vecteurs réciproques, de la surface E, en prenant le point A pour pôle d'inversion, soit un cône du deuxième degré?

**1889.** On donne un cône du second degré C et deux quadriques A, A' inscrites à ce cône; on considère une quadrique variable S inscrite au même cône et touchant les quadriques données A et A' en des points variables $\alpha$ et $\alpha'$.

1° Démontrer que la droite $\alpha\alpha'$ passe par un point fixe.

2° Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface S aux points $\alpha$ et $\alpha'$.

3° Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe P par rapport à la surface S se compose de deux quadriques bitangentes.

4° Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan P se déplace en restant parallèle à un plan tangent au cône C.

**1890.** On donne un triangle ABC et un point P dans son plan.

1° Trouver le lieu des centres des coniques S inscrites dans le triangle ABC et qui sont vues du point P sous un angle donné $\omega$;

2° Discuter ce lieu en supposant que le point P se déplace;

3° Démontrer que, si l'angle donné $\omega$ est droit, toutes les coniques S sont aussi vues sous un angle droit d'un autre point P'. Montrer que, dans ce cas, si le point P se déplace, la droite PP' passe par un point fixe I et que le produit IP.IP' est constant.

**1891.** Étant donnés un triangle ABC et deux points P et Q situés dans son plan, on considère les coniques S qui touchent le côté CA en A et passent par les points P et Q; on considère de même les coniques S' qui touchent le côté CB en B et passent par les points P et Q.

1° Soient M et N les points d'intersection d'une conique S avec les droites CP et CQ, M' et N' les points d'intersection d'une conique S' avec les mêmes droites. Démontrer que la droite MN passe par un point fixe $A_1$ et la droite M'N' par un point fixe $B_1$ quand les coniques S et S' varient;

2° En substituant le triangle $CA_1B_1$ au triangle CAB dans la définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points $A_2$ et $B_2$, et ainsi de suite; trouver l'équation de la droite $A_n$ et $B_n$ et chercher sa position limite quand $n$ devient infini;

3° On suppose que les coniques S et S′ varient de manière que les deuxièmes tangentes menées du point C à ces courbes soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites CP et CQ; trouver, dans cette hypothèse, le lieu du point d'intersection des polaires d'un point donné H, par rapport à ces coniques;

4° Lorsque les coniques S et S′ varient en restant tangentes, trouver le lieu de leur point de contact.

1892. Étant donnés un ellipsoïde E, de centre O, et un cône du second ordre Q de sommet S, on considère un trièdre O$\alpha\beta\gamma$ dont les arêtes forment un système de diamètres conjugués de l'ellipsoïde, et on prend le point d'intersection de chaque arête de ce trièdre avec le plan diamétral qui lui est conjugué dans le cône Q. On obtient ainsi trois points ABC qui déterminent un plan P.

1° Démontrer que le plan P passe par un point fixe F quand le trièdre O$\alpha\beta\gamma$ varie;

2° Les points S et F déterminent une droite D; trouver le lieu des droites D qui passent par un point donné $\omega$ lorsque le cône Q se déplace en restant égal et parallèle à un cône fixe;

3° Trouver, dans la même hypothèse, l'enveloppe G des droites D qui sont situées dans un plan donné H;

4° Trouver le lieu des foyers des courbes G lorsque le plan H se déplace en restant parallèle à une droite donnée.

(Voyez à la fin pour les compositions de 1893.)

## BOURSES DE LICENCE

1885. 1° Discuter la courbe représentée par l'équation

$$(x^4 - 5x^2 + 4)y^2 - 4xy + x^2 = 0;$$

2° Reconnaître la nature des différentes surfaces représentées par l'équation du second degré

$$x^2 + y^2 + hz^2 + 2axz + 2byz + 2cz = 0$$

quand les coefficients $h$, $a$, $b$, $c$ prenant toutes les valeurs possibles. Déterminer les sections circulaires de ces surfaces.

1886. On considère le système (S) des plans représentés par l'équation

$$\mu^3 + 3\mu^2 x + 3\mu y + z = 0$$

ou $\mu$ est un paramètre variable; les axes des coordonnées sont supposés rectangulaires.

Soit (M) le plan de ce système pour lequel le paramètre $\mu$ a la valeur particulière $m$; par chaque point du plan (M) passent deux plans (M′) (M″).

du système (S) autres que le plan (M); soient $\mu'$ et $\mu''$ les valeurs du paramètre $\mu$ relatives à ces plans.

I. Suivant la région du plan (M) à laquelle appartient le point A, les nombres $\mu'$ et $\mu''$ sont réels ou imaginaires, comprennent entre eux le nombre $m$, ou bien sont tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à lui; distinguer ces diverses régions.

II. Trouver, dans le plan (M), le lieu des points A tels que les deux plans (M') (M'') soient perpendiculaires entre eux.

III. Trouver, dans l'espace, le lieu des points tels que deux des trois plans du système (S) qui passent par l'un quelconque d'entre eux soient perpendiculaires.

Résultats. — I. Les régions sont séparées par une parabole et une tangente à cette parabole.

II. Le lieu est composé de deux droites.

III. Le lieu est composé de deux paraboloïdes.

**1887**-I. Dans un plan rapporté à des axes rectangulaires, on considère le système de cercles (S) définis par l'équation

$$x^2+y^2+ax+by+Aa+Bb+C=0$$

où A, B, C sont des constantes données, $a$ et $b$ des paramètres variables. Démontrer qu'à chaque point M du plan correspond au point M' tel que par les deux points M et M', on puisse faire passer une infinité de cercles (S); on montrera comment les coordonnées de l'un de ces points s'expriment au moyen des coordonnées de l'autre; on prouvera que la droite MM' passe par un point fixe I et que le produit IM.IM' est constant; enfin on cherchera à remplacer la définition analytique des cercles (S) par une définition géométrique qui mette facilement en évidence les propositions qui précèdent.

II. Les constantes A, B, C, $a$, $b$, $c$, étant données, on propose de déterminer les constantes $A_1$ $B_1$ $C_1$ de façon que l'expression

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\frac{A_1}{(x-a)^2}+\frac{B_1}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fraction rationnelle en $x$.

A quelle condition le problème est-il possible?

**1888**-I. Décomposer en facteurs réels du 2e degré le polynôme

$$x^4-4x^3\cos a\cos b+2x^2(1+\cos 2a+\cos 2b)-4x\cos a\cos b+1$$

où $a$ et $b$ désignent des angles donnés.

II. On considère l'ellipse S qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Soit M un point de cette ellipse de coordonnées $x'y'$, on demande de déterminer le paramètre $\lambda$ de manière que l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1-\lambda\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)^2=0$$

représente une parabole. Cette parabole est dite osculatrice en M à l'ellipse. On demande de démontrer :

1° Que par chaque point P du plan il passe en général 4 paraboles osculatrices à S; les 4 points où ces paraboles sont osculatrices à S sont situés sur deux droites parallèles; leurs coordonnées peuvent s'obtenir en fonction des coordonnées du point P par la résolution d'équations du 2° degré; deux d'entre eux au plus sont réels,

2° Par ces 4 points passe une véritable parabole que l'on peut faire correspondre au point P; on formera l'équation de cette parabole et l'on prouvera qu'elle est tangente à la corde des contacts des tangentes S issues du point P, en son milieu. — Sur quel lieu doit se trouver le point P pour que la parabole qui lui correspond passe par un point donné Q du plan?

1889. I. Construire la courbe définie par l'équation

$$(1) \qquad y = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}.$$

II. Si l'on coupe cette courbe par une parallèle à l'axe des $x$, et si l'on désigne par $a$ l'abscisse de l'un des points d'intersection, les abscisses des cinq autres points d'intersection seront

$$\frac{1}{a}, \quad 1-a, \quad 1-\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}.$$

Distinguer sur la figure les points qui correspondent aux formules précédentes, en supposant que $a$ soit la plus grande des abscisses des points d'intersection.

III. La résolution de l'équation (1), où l'on regarde $y$ comme un nombre donné et $x$ comme l'inconnue, peut, de diverses manières, être ramenée à la résolution d'une équation du troisième degré et d'une équation du second degré.

IV. Lieu de la projection du point d'intersection de deux tangentes à la courbe (1), en des points dont les abscisses sont inverses l'une de l'autre, sur la droite qui joint ces deux points. (Les coordonnées sont supposées rectangulaires).

1890. I. — En désignant par $m$ un nombre entier positif, on considère deux polynômes $\varphi(x)$, $\psi(x)$ entiers en $x$, de degré inférieur à $m$, et tels que l'on ait identiquement

$$(1-x)^m\varphi(x) + x^m\psi(x) = 1.$$

1° Démontrer que l'on a identiquement

$$\psi(x) = \varphi(1-x), \quad \varphi(x) = \psi(1-x),$$
$$(1-x)\varphi'(x) - m\varphi(x) = \alpha x^{m-1};$$

dans cette dernière égalité, $\alpha$ désigne une constante et $\varphi'(x)$ la dérivée de $\varphi(x)$ : en déduire, à l'aide du théorème de Rolle, que le polynôme $\varphi(x)$ ne peut pas avoir deux racines négatives;

2° Déterminer en fonction de $m$ la constante $\alpha$ et les coefficients du polynôme $\varphi(x)$ ; démontrer que ce polynôme a au plus une racine réelle.

II. — Étant donnés deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, on considère un losange POP'Q' ayant les deux sommets P, P' sur l'axe des $x$ et les deux sommets Q, Q' sur l'axe des $y$. On supposera $OP = p$, $OQ = q$.

1° Par un point M, de coordonnées $x$, $y$, passent deux coniques inscrites dans le losange; former l'équation du second degré en $m$, qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes en M à ces deux coniques;

2° Trouver le lieu des points M où se coupent sous un angle donné deux coniques inscrites dans le losange;

3° Prévoir sur l'équation aux coefficients angulaires que ce dernier lieu doit se composer d'hyperboles.

1891. 1° Représenter sur une même figure les trois courbes (A), (B), (C), dont les équations en coordonnées rectangulaires sont respectivement :

(A) $$y^2 + 3a^2x^2 - 3axy - a^3 = 0;$$
(B) $$y - x^3 = 0;$$
(C) $$y + x^3 - 3ax = 0.$$

2° Les points B, B', C, C' où l'ellipse (A) rencontre les courbes (B), (C) sont les sommets d'un parallélogramme; on demande les lieux décrits par les milieux des côtés de ce parallélogramme et par les sommets du parallélogramme formé par les tangentes à l'ellipse aux points B, B', C, C' quand le paramètre $a$ varie.

3° Montrer qu'il existe une valeur du paramètre $a$ et une seule telle que l'ellipse correspondante (A) soit réelle et passe par un point donné P du plan; on donnera l'expression explicite de la valeur de $a$ au moyen des coordonnées du point P;

4° Déterminer les coefficients angulaires des axes de l'ellipse (A) en distinguant le coefficient angulaire du grand axe et celui du petit axe.

(*Résultats.* — L'ellipse est osculatrice aux deux courbes en deux points à la première (B) aux points B et B' de coordonnées $x = \pm\sqrt{a}$, $y = ax$, à la deuxième (C) aux points C et C' de coordonnées $x = \pm\sqrt{a}$, $y = 2ax$. Les côtés CB, C'B' du parallélogramme sont parallèles à $Oy$; les tangentes à (C) en C et C' sont parallèles à $Ox$. Le lieu du milieu de BC est $y = \frac{3}{2}x^3$; celui du milieu de CB', $x = 0$. Le point de concours des tangentes à l'ellipse en B et C est le pôle de $x = \sqrt{a}$: le lieu de ce point est $y = \frac{27}{32}x^3$. Les tangentes à l'ellipse en C et B' se coupent sur $Oy$. L'équation qui donne $a$ quand $x$ et $y$ sont donnés dans (A) n'a qu'une racine réelle, comme on le voit en écrivant (A) sous la forme $\left(\frac{y}{a} - x\right)^3 = y - x^3$, d'où la valeur de $a$; CB et CB' étant deux cordes supplémentaires de l'ellipse, le grand axe est dans l'angle aigu formé par les diamètres conjugués parallèles à ces cordes.)

1892 I. En désignant par $ab$, $x'y'$ des constantes, on demande de déterminer $\lambda$ de manière que l'expression

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - (x - x')^2 - (y - y')^2$$

soit le produit de deux facteurs P et Q du premier degré en $x$ et $y$.

L'équation dont $\lambda$ dépend admet une racine nulle et deux autres racines réelles. Pour l'une de ces dernières racines, les facteurs PQ sont réels; pour l'autre, ils sont imaginaires.

II. Étant donnée une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

en coordonnées rectangulaires, on considère un point fixe M de coordonnées $x'y'$, et l'on demande de déterminer deux droites P, Q telles que le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipse au point M, divisé par le produit des distances du même point de l'ellipse aux droites P, Q, soit constant (c'est-à-dire que le rapport considéré doit être indépendant de la position du point de l'ellipse dont on prend les distances au point M et aux droites P et Q). On formera explicitement les équations de ces droites en supposant le point M sur l'ellipse, et l'on déterminera le lieu de leur point d'intersection quand le point M parcourt l'ellipse.

III. Inversement, étant donnée une droite P dont l'équation est

$$ux + vy - 1 = 0,$$

peut-on trouver un point M et une droite Q tels que le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipse au point M divisé par le produit des distances du même point de l'ellipse aux deux droites PQ soit constant. Montrer qu'on trouve, en général, deux positions pour M symétriques par rapport à P. Comment la droite P doit-elle être placée pour que les solutions soient réelles?

## COMPOSITIONS DONNÉES EN 1893.

*École polytechnique. 1er problème.* — On considère un plan et deux sphères S et S' de rayons R et R' ayant leur centre dans ce plan. Puis une sphère variable Σ tangente au plan et aux deux sphères S et S'. On demande :

1° Le lieu des points de contact sur le plan (on trouve deux cercles);

2° Le lieu des centres (quatre ellipses).

*2e problème.* — On donne deux sphères de rayons R et R' et de centres C et C' et un cône de révolution de sommet O dont l'axe est perpendiculaire au plan COC', le triangle COC' étant rectangle en O.

1° Équations du lieu du centre d'une sphère tangente au cône et aux deux sphères;

2° Discuter le lieu dans le cas $R = R'$; COC' isocèle et où la sphère variable touche S et S' toutes deux intérieurement ou toutes deux extérieurement.

*Concours général.* — On donne une conique S et un triangle ABC conjugué à S.

I. Démontrer que par un point quelconque P de S passent quatre coniques circonscrites à ABC et touchant S en un point autre que P.

II. Les points où ces quatre coniques touchent S sont sur une conique $S_1$ circonscrite à ABC.

III. Quand P décrit S, la conique $S_1$ enveloppe Γ du quatrième ordre.

IV. D'un point M de Γ, on peut mener à cette courbe quatre tangentes autres que celle au point M. Démontrer que les points où ces quatre tangentes touchent Γ sont sur une même droite D. Enveloppe de D lorsque M décrit Γ.

*Agrégation.* — On considère un hyperboloïde à une nappe H et le cône S qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde menés par un point donné M :

1° Déterminer les sommets $M, M_1, M_2, M_3$ du tétraèdre conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde H et du cône S.

Trouver le lieu C des sommets $M_1, M_2, M_3$ de ce tétraèdre lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné;

2° Trouver la surface engendrée par la ligne C lorsque le point M décrit une droite donnée D et détermine les positions qu'il faut donner à cette droite D pour que cette surface soit de révolution;

3° Déterminer les coordonnées du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $M, M_1, M_2, M_3$ en fonction des coordonnées du point M pour un hyperboloïde donné H. Trouver le lieu de ce centre lorsque le point M restant fixe l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné;

4° Démontrer que la droite qui joint le centre $\omega$ de la sphère circonscrite au tétraèdre $M, M_1, M_2, M_3$ au centre de gravité G de ce tétraèdre passe par un point fixe I, lorsque le point M restant fixé l'hyperboloïde H se modifie encore en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné et faire voir que G est le milieu de $\omega$I.

*Ecole normale.* — 1° Les coordonnées des points d'une courbe (C) étant représentées par les formules

$$x = \frac{2}{t-a}, \quad y = \frac{2}{t-b}, \quad z = \frac{2}{t-c},$$

où $t$ désigne un paramètre variable, et $a$, $b$, $c$ sont trois constantes *différentes*, on considère tous les segments de droite dont les deux extrémités sont sur la courbe (C) et on demande de trouver la surface (S) lieu des milieu M de ces cordes;

2° Démontrer que la surface (S) contient la courbe (C) et ses trois asymptotes;

3° Montrer qu'à chaque point M de cette surface correspond une seule corde de la courbe (C) ayant son milieu en M. Discuter analytiquement et mettre ainsi en évidence trois droites tracées sur la surface (S);

4° Délimiter la région du plan des $xy$ où doit se projeter un point M de la surface (S) pour que la corde dont ce point est le milieu joigne deux points réels de la courbe (C);

5° Trouver toutes les droites situées à distance finie sur la surface (S);

6° Trouver le lieu des cordes de la courbe (C) dont les milieux sont sur une droite.

*Bourses de licence.* — On considère la courbe (C) décrite, quand $t$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, par le point dont les coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$ sont données par les formules

$$x = 3t, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 2t^3.$$

I. Trouver les lieux décrits par les points dont les cordonnées sont respectivement égales aux cosinus des angles que font avec les axes coordonnées : 1° la tangente ; 2° la normale principale ; 3° la perpendiculaire au plan osculateur en un point de la courbe.

II. Montrer que l'une des bissectrices de l'angle formé par la tangente et la perpendiculaire au plan osculateur en un point de la courbe a une direction fixe, et que, par conséquent, la courbe (C) peut être regardée comme une courbe tracée sur un cylindre de manière à couper sous un angle de 45 degrés toutes les génératrices de ce cylindre. Former l'équation de la section droite de ce cylindre rapportée à deux axes situés dans son plan et la construire.

III. Par un point donné sur la courbe (C), combien peut-on mener de plans qui passent par une tangente à cette courbe et qui soient perpendiculaires au plan osculateur au point de contact de cette tangente?

# TABLE DES MATIÈRES

## GÉOMÉTRIE PLANE

### LIVRE I

PRÉLIMINAIRES



### LIVRE II

LIGNE DROITE ET CERCLE.



### LIVRE III

COURBES DU SECOND DEGRÉ

## LIVRE IV

### THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES.



# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

## LIVRE V



## LIVRE VI

### SURFACES DU SECOND DEGRÉ.



Coulommiers. — Imp. Paul Brodard.